



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad x \in \mathbb{R}, \quad b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad b_{13} = 5-x, \quad b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^2 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 \Rightarrow q^2 = \sqrt{x+1}, \quad q - \text{знаменатель прогрессии}$$

$$b_{13} = b_7 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = 5-x$$

$$1) \quad x+1 > 0 \quad (x > -1):$$

$$\sqrt{13x-35} = 5-x \Rightarrow \begin{cases} 13x-35 = 25-10x+x^2 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-23x+60=0 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ (x-20)(x-3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x=20; 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=3} \quad \text{и} \quad 3 > -1$$

$$2) \quad x+1 < 0 \quad (x < -1)$$

$$\sqrt{35-13x} = 5-x \Rightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 35-13x = 25-10x+x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2+3x-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ (x+5)(x-2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x=-5; 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5; 2 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=-5}$$

$$\text{Ответ: } x = -5; 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$4x^2 - 2x - 24 \quad D_1 = 1 + 96 = 97$$

①  $x \in \mathbb{R}$ ,  $b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$

$$b_{13} = 5-x \quad b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\Rightarrow q^8 = (x+1)^2$$

$$q^4 = \sqrt[4]{(x+1)^2}$$

$$b_{13} = b_7 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt[6]{(x+1)^2} = 5-x$$

$$q^2 = \sqrt[4]{x+1}$$

$$x \in (-3; 4]$$

1) Если  $x+1 \geq 0$ : ( $x \geq -1$ )  $11-4x \geq 0$

$$4x \leq 11$$

$$x \leq \frac{11}{4}$$

$$q^2 = \sqrt[4]{-5+1} = 2 = \sqrt[4]{4}$$

$$x \leq 2,75$$

$$\sqrt{13x-35} = 5-x$$

$$(1): x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$5-x \geq 0$$

$$(x-20)(x-3) = 0$$

$$2x^2 - x - 12 = 0$$

$$D = 1 + 96 = 97$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$13x - 35 = 25 - 10x + x^2 (1)$$

$$= 257$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}, -\frac{6}{4}$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{-100}{(-4)^3}}$$

2)  $x+1 < 0$  |  $x < -1$

$$\sqrt{35-13x} = 5-x$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$35 - 13x = 25 - 10x + x^2$$

$$x \leq 5$$

$$4(x - \frac{6}{4})(x+1)$$

$$(4x-6)(x+1)$$

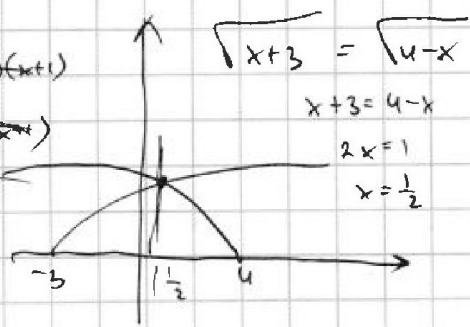
$$(x-1)(x+6)$$

$$(x+5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -5$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$-5 \quad 2$$

$$(x+5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -5$$



$$\text{Ответ: } -5 \text{ и } 3$$

$$a \geq 0$$

$$b \geq 0$$

$$a-b+5 = 2ab$$

$$x+3 + 5a + 25 = 4a^2 + b^2$$

$$a^2 + 5a + 25 = 4a^2b^2 + 4ab^2 + b^2$$

$$x+3 + 5\sqrt{x+3} + 25 = 4(12+x-x^2) + 4(4-x)\sqrt{x+3} + 4-x$$

$$x+3 + 25 - 48 - 4x + 4x^2 - 4+x = \sqrt{x+3} (16-4x-5)$$

$$4x^2 - 2x - 24 = \sqrt{x+3} (11-4x)$$



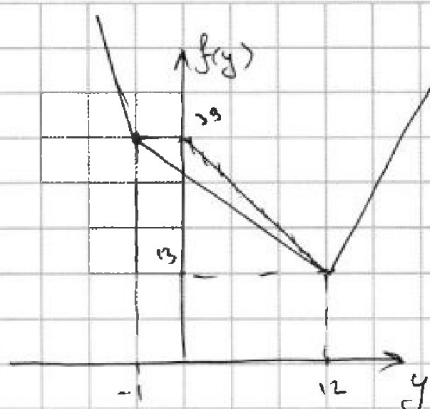
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{169-z^2} \in [-13, 13], \text{ а } |y+1| + 3|y-12| \geq$$



$\Rightarrow$  единственно возможный вариант - это  $y=12, z=0 \Rightarrow$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \quad (x \in [-3, 4])$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \quad (1) \quad a = (x+3)(4-x)$$

$$(1): \sqrt{x+3} \geq \sqrt{4-x} : x+3 \geq 4-x \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$4a - 18\sqrt{a} + 18 = 0 \Rightarrow 2a - 9\sqrt{a} + 9 = 0$$

$$\sqrt{a} = t \geq 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0 \Rightarrow D = 81 - 72 = 9 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{4} = 3; 1,5$$

$$1) t = 3 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow 12+x-x^2 = 9 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0$$

$$D = 1 - 12 = -11 < 0 \Rightarrow \text{нет корней}$$

$$2) 12+x-x^2 = 2,25 \Rightarrow x^2 - x - 9,75 = 0$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0 \Rightarrow D_1 = 4 + 4 \cdot 39 = 160 = (4\sqrt{10})^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} \geq \sqrt{4-x} \Rightarrow x+3 \geq 4-x \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{подходят } \frac{1}{2} + \sqrt{10} \text{ и } \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } y=12, z=0, x = \frac{1}{2} + \sqrt{10}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③  $\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$

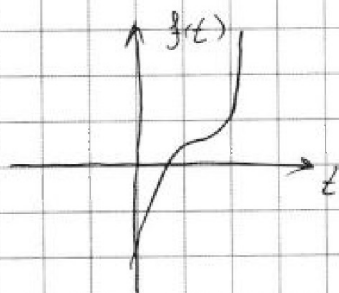
$t = \cos x \in [-1; 1]$

$4t^3 - 3t + 3(2t^2 - 1) + 6t = p \quad (1)$

(1):  $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \rightarrow f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$

$4t^2 + 4t + 1 = 0 \Rightarrow (2t + 1)^2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$  и функция имеет вид:



$\Rightarrow$  в каждом случае 1 корень есть <sup>и функция</sup>  $\Rightarrow$  монотонность

$\Rightarrow f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$

$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$

$\Rightarrow p \in [-4; 10]$

Ответ:  $p \in [-4; 10]$

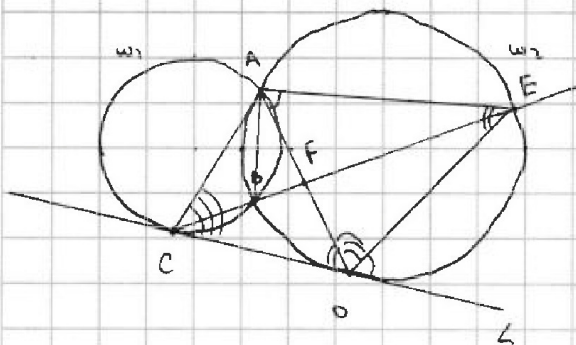


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4)



Дано:  $w_1, w_2$

$$w_1 \cap w_2 = \{A, B\}$$

CD - секущая к  $w_1$  и  $w_2$

$$[CB] \cap w_2 = \{B, E\}$$

$$AD \cap CE = F; \frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$$

Найти:  $\frac{ED}{CD}$

Решение:

1. Т.к. CD - секущая  $w_1 \Rightarrow \angle AED = \angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOD$  (углы между хордой и касан.)  
 $= \frac{1}{2} \angle AOD$

и  $\angle EAD = \angle EOL = \angle$  (углы между хордой и касан.)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOE = 180^\circ - \angle ADC - \angle EOL = 180^\circ - 2\beta$  (как разбег, углы)

2.  $\angle ABE = \angle ADE = 180^\circ - 2\beta$  (впис. углы, опир. на одну хорду)  $\Rightarrow$

$\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 2 + \beta$  (смежные)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 360^\circ - \angle ACB = 360^\circ - 2(2 + \beta) = 2(180^\circ - 2\beta)$

$\angle ACD = \frac{1}{2} \angle ABC = 180^\circ - 2\beta = \angle AOE.$

3.  $\angle ACD = \angle AOE = 180^\circ - 2\beta$   $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE$  (по двум углам)  $\Rightarrow$

$\angle ADC = \angle AED = \beta$

$\Rightarrow \angle CAD = \angle DAE = \angle$ ,  $\frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}$

$AD^2 = AC \cdot AE$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Т.ч.  $\angle CAF = \angle FAE \Rightarrow AF$  - биссектриса  $\angle CAE \Rightarrow$  по т.т.  $\frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$

Также  $AC = 3x$   $AE = 10x \Rightarrow AD = \sqrt{AC \cdot AE} = x\sqrt{30}$

$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{30}x}{3x} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$

Ответ:  $\frac{ED}{CD} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

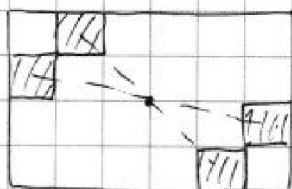
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Сначала посчитаем по угловым приближениям для разных симметрий.

1) Центральная симметрия. Помогает все найти определяется  $\left(\frac{8}{2}\right) 4$  клетками, расположенными в одной из половин  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow C_{25000}^4 = C_{25000}^4$



Как показано на рисунке при расположении половин клеток другая половина уже определена симметрией.

2) Аналогичная ситуация при симметрии средней линии  
 4 клетки в половине определяют весь рисунок  $\Rightarrow 2 \cdot C_{25000}^4$

3) Теперь найдем пересечение этих множеств:

а) Если есть и центральная и 1-ой из средних линий (симметрия), то есть и симметрия 2-ой средней линии.

Доказываемая тем, что центр. симметрия - это комбинация

2-ух симметрий средней линии  $\Rightarrow$  при наличии одной есть и другая

б) Аналогично, если есть симметрия 2-ух средних линий, то есть и центральная.

Нужно это применить общей симметрии. Общая симметрия



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

определяется  $\left(\frac{8}{4}\right)$  2-мя элементами в четверти прямоугольника  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C_{12500}^2$$

По ф-ле для множеств  $A, B, C$   $(|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$

$$+ |A \cap B \cap C|)$$
 получаем:  $C_{25000}^4 + 2 C_{25000}^4 - C_{25000}^2 - C_{12500}^2 - C_{12500}^2 +$

$$C_{12500}^2 = 3 C_{25000}^4 - 2 C_{12500}^2 = 3 \cdot \frac{25000!}{24996! \cdot 4!} - 2 \cdot \frac{12500!}{2! \cdot 12498!}$$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot \frac{25000!}{24996! \cdot 4!} - 2 \cdot \frac{12500!}{2! \cdot 12498!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  ;  $a > b$  ;  $(a-b) \nmid 3$  ;  $(a-c)(b-c) = p^2$  ;  $a+b^2=560$

Если  $(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$  есть 6 вариантов:

1)  $a-c = 1$   $b-c = p^2 \Rightarrow a-b = 1-p^2 < 0$  ,  $a < b$  - противоречие

2)  $a-c = p$   $b-c = p \Rightarrow a-b = 0 : 3$  - противоречие

3)  $a-c = p^2$   $b-c = 1 \Rightarrow a-b = p^2-1 = (p-1)(p+1)$

Если  $p \neq 3$  , то  $p \equiv 1 \pmod 3$  или  $p \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow$  всегда  $(p-1)$  или  $(p+1) : 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow p=3 \Rightarrow a-c=9$  и  $b-c=1$

$a = 560 - b^2 \Rightarrow c = a-9 = 551 - b^2 \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$

$(b+24)(b-23)=0 \Rightarrow b = -24; 23$

a)  $b=23 \Rightarrow c=22$   $a = 560 - 23^2 = 560 - 529 = 31$

$31 > 23 \Rightarrow (31; 23; 22)$

б)  $b=-24 \Rightarrow c=-25$   $a = 560 - 24^2 = 560 - 576 = -16$

$-16 > -24 \Rightarrow (-16; -24; -25)$

4)  $a-c = -p^2$   $b-c = -1 \Rightarrow a-b = 1-p^2 < 0$  ,  $a < b$  - противоречие

5)  $a-c = -p$   $b-c = -p \Rightarrow a-b = 0 : 3$  - противоречие

6)  $a-c = -1$   $b-c = -p^2 = -9 \Rightarrow c = a+1 = 561 - b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 + b - 561 = -9 \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0 \Rightarrow b = 23; -24$

a)  $b=23 \Rightarrow c=32$   $a = c-1 = 31$  ,  $31 > 23 \Rightarrow (31; 23; 32)$

б)  $b=-24 \Rightarrow c=-15$   $a = c-1 = -16$  ,  $-16 > -24 \Rightarrow (-16; -24; -15)$

Ответ:  $(31; 23; 22)$   $(-16; -24; -25)$   $(31; 23; 32)$   $(-16; -24; -15)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



1)  $C_{25.000}^4$

2) field dimensions grid lines.

a)  $|A \cup B \cup C| = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$   
 $= A + B + C - 2 \text{ overlaps}$

a)  $C_{25.000}^4$

b)  $C_{25.000}^4$

other:  $C_{115.100}^2$

$12 + x - x^2 = 9$

$x^2 + x - 3 = 0$

$3C_{25.000}^4 - 2C_{115.100}^2$

46

Other way

on  $200 - 250 = 50000$  meters

4 meters

1)  $C_{50.000}^4 = \frac{50.000 \cdot 49.999 \cdot 49.998 \cdot 49.997}{24}$

field

$C_{50.000}^4$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$

Other way

$x+3 + 4-x - 2\sqrt{5} = 44 - 20\sqrt{5} + 25$

$4t^2 - 18t + 25 = 17$

$4t^2 - 18t + 18 = 0$

$576 + a = 560 \quad 2t^2 - 9t + 9 = 0$

$a = -16 \quad a-b = 8 \quad D = 81 - 72 = 9$

$b = -24$

$(-16-c)(-24-c) = p^2 \quad t = \frac{9 \pm 3}{4} =$

$(16+c)(24+c) = p^2 \quad = \frac{16}{4} =$

$= 3$

t=

$ab - ac - bc + c^2 = p$   
 $ab - c(a+b) = p^2 - c^2$

$0 = 1 + 2240 = 2241 \approx (47, \dots)^2$

$\frac{19}{49} (50-1)^2 = 2500 - 100 + 1 =$

$(50-2)^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304$

=>

6)  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}$

1)  $a > b$  2)  $(a-b) \times 3$

3)  $(a-c)(b-c) = p^2$

$a+b^2 = 560$

$560 - b^2 > b$

$b^2 + b - 560 < 0$

$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2240}}{2} =$

$= -24, \dots, 23, \dots$

$\Rightarrow b \in \{-24, \dots, 23\}$

|     |   |
|-----|---|
| 560 | 2 |
| 280 | 2 |
| 140 | 2 |
| 70  | 2 |
| 35  | 5 |
| 7   | 7 |
| 1   |   |





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

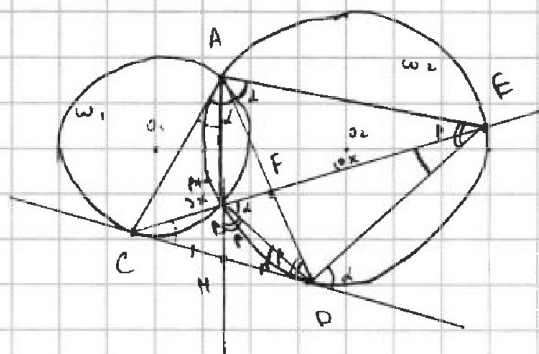
СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④  $\omega_1 \cap \omega_2 = \{A, B\}$   $CD$

Найти:  $\frac{ED}{CD}$ , если

$$\frac{CF}{FE} = \frac{3}{10} \quad \frac{CF}{CE} = \frac{3}{13}$$



$$\angle ACE = \angle ADE - \angle AEB =$$

$$=$$

$$\angle AFE = \angle ADE + \angle BED$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$CD^2 = (CF - FB) \cdot CE$$

$$BF \cdot FE = AF \cdot FD$$

$$BF \cdot FE = AF \cdot FD$$

$$DF \cdot$$

$$\frac{DF}{FA} \cdot \frac{AB}{BM} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$MB \cdot MA = CM^2$$

$$\frac{DF}{FA} \cdot \frac{AB}{BM} = 2$$

$$BM = \frac{CM^2}{MA}$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{CB}{BF} \cdot \frac{AF}{AD} = 1$$

$$\angle FCD = 2 - 1$$

$$\angle ACM = 180^\circ - 2 - \beta = \angle ADE$$

$$\triangle ADC \sim \triangle ADE$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{3}{10} \Rightarrow AE = 10y$$

$$AC = 3y$$

$$AD^2 = AE \cdot AC$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{y\sqrt{30}}{3y} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$AD = y\sqrt{30}$$

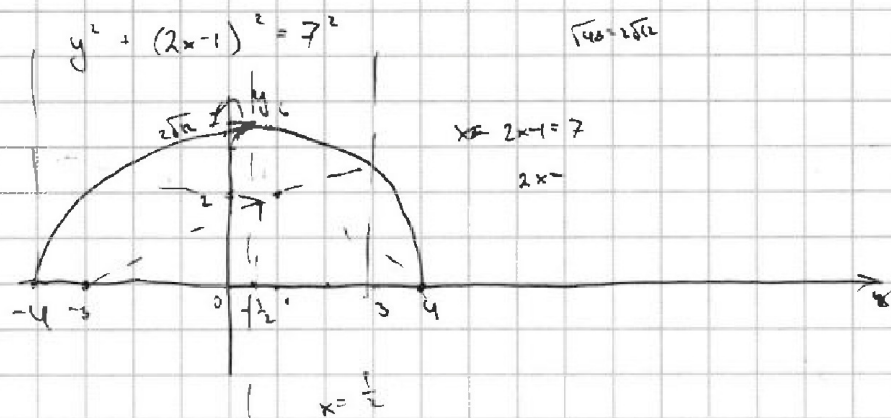


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$-\frac{1}{4} + \frac{7}{4} + 12$$

$$12,25$$

$$3,5$$

$$3,5$$

$$175$$

$$105$$

$$12,25$$

$$-x^2 + x + 12 = 25$$



$$x^2 - x + 13 = 0$$

$$D = 1$$

$$2 - \sqrt{3} + 5 = 7 - \sqrt{3}$$

$$2 \sqrt{-1+1+12} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{5-2+5} = 2 \sqrt{-4+2+12} = 2 \sqrt{14}$$

$$\sqrt{6+4} = 2 \sqrt{-8+3+12} = 2 \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$2 - \sqrt{3} + 5 = 7 - \sqrt{3} \quad 4\sqrt{3} \quad \sqrt{4,5} - \sqrt{3,5} + 5 =$$

$$7 - \sqrt{3} \vee 4\sqrt{3}$$

$$7 \vee 5\sqrt{3}$$

$$7 < 5\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x \quad (x+3)(21-8x+16x^2)$$

$$16x^4 + 4x^2 + 576 - 16x^3 - 192x^2 + 96 = 121x - 38x^2 + 16x^3 + 363 - 264x + 48x^2$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 14 \\ \hline 96 \\ 280 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$f(t, p) = 4(t^3 + 3pt^2) + 6(t^2 + 2pt) + 3(t + pt) - 3 =$$

$$= 4t^3 + 12pt^2 + 6t^2 + 12pt + 3t + 3pt - 3 = p + 2p$$

$$2p = 12pt^2 + 12pt + 3t$$

$$\frac{dp}{dt} = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2$$

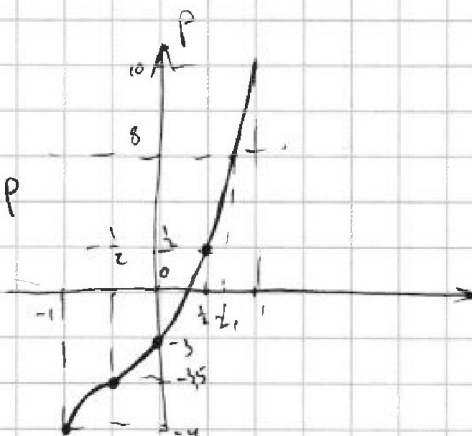
$$dp = 3(2t+1)^2 dt$$

$$t = \frac{p}{3(2t+1)^2}$$

$$3t(2t+1)^2 = p$$

| p   | t   |
|-----|-----|
| -3  | 0   |
| 0,5 | 1/2 |

$$p = 3,5$$



$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$(t - t_1) \left( \dots \frac{-3-p}{t_1} \right) = 0$$

$$t = t_1$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p \quad \begin{array}{l} t-x \\ 4t^2 + t^2(4x+6) + x(4x+6) + 3 \end{array}$$

$$4t^2x + 6t^2 + 3t$$

$$- t^2(4x+6) + 3t$$

$$- t^2(4x+6) - t x(4x+6)$$

$$- t(x(4x+6) + 3) - 3 - p$$

$$- x(x(4x+6) + 3)$$

$$-3 - p + x(x(4x+6) + 3) = 0$$

$$-3 - p = -x^2 \quad 3 + p = x^2(4x+6) + 3x$$

$$4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 = p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③  $\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$

$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$

$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$

$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

$\cos x = t \in [-1; 1]$

$1 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2 + 3\left(1 - \frac{(3x)^2}{2}\right) + 6\left(1 - \frac{(3x)^2}{2}\right) = 0$

$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$

$1 - 4,5x^2 + 3 - 6x^2 + 6 - 3x^2 = -\frac{1}{2}$

$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

1) при  $p = -3$   $t = 0$

1)  $t(4t^2 + 6t + 3) = 0$

$D_t = 9 - 12 < 0 \Rightarrow t = 0$  единств. корень.

$t = 1: 4 + 6 + 3 - 3 = 10$

$p = 10 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 4t^3 + 6t^2 + 3t - 13 \\ 4t^3 - 4t^2 \\ \hline 10t^2 + 3t \\ -10t^2 - 10t \\ \hline 13t - 13 \end{array}$$

$t - 1 \overline{) 4t^3 + 6t^2 + 3t - 13}$

$$\begin{array}{r} 4t^3 + 6t^2 + 3t - 13 \\ 4t^3 + 4t^2 \\ \hline 2t^2 + 3t \\ -2t^2 + 2t \\ \hline t + 1 \end{array}$$

$\Rightarrow t = 1: -4 + 6 - 3 - 3 = -4$

$(t - 1)(4t^2 + 10t + 13) \Rightarrow t = 1$  единств. корень

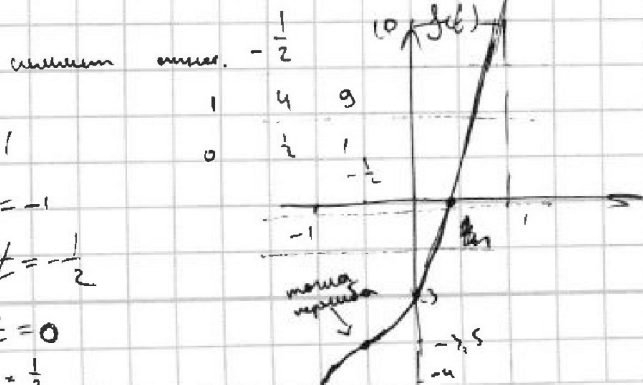
$D_t = 25 - 20 > 0$

$\frac{4}{-8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 = -0,5 + 1,5 - 1,5 - 3 = -3,5$

$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p = 0$

$2t^2(2t + 3) + 3t - 3 = 0$

$(t - t_1)d(t) = p \Rightarrow t - t_1 = \frac{p}{d(t)} \quad t_1 = t - \frac{p}{d(t)}$



$p = 10 \quad t = 1$   
 $p = -4 \quad t = -1$   
 $p = -3,5 \quad t = -\frac{1}{2}$   
 $p = -3 \quad t = 0$   
 $p = 0,5 \quad t = \frac{1}{2}$

наиб. корень 1.

$t = \frac{1}{2}: \frac{4}{8} + \frac{6}{4} + \frac{3}{2} - 3 = 0,5 + 1,5 + 1,5 - 3 = 0,5 \quad p = 0,5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②  $\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2}$

$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-2^2} = \sqrt{(13-z)(13+z)}$

$x \geq -3$   
 $z \in [-13; 13]$   
 $4-x-2 \geq 0$

$y = 12, z = 0 \Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12}$

$x \geq -3$   
 $x \leq 4$   
 $-x^2+x+12 \geq 0$   
 $x^2-x-12 \leq 0$   
 $(x-4)(x+3)$

$y = 2\sqrt{12+x-x^2}$

$y^2 = 48 + 4x - 4x^2$

$(2xy - x + y - 5) = 0$

$y^2 + (2x-1)^2 = 7^2$

$(ax+b)(cy+d) = acxy + bcy + dax + bd$

$bd = -5$   
 $ac = 2$   
 $bc = 1$   
 $da = -1$

$x+3 + 4-x - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 4(-x^2+x+12) + 25 - 20\sqrt{-x^2+x+12}$

$7 - 2\sqrt{f} = -4x^2 + 4x + 73 - 20\sqrt{f}$

$18\sqrt{f} = -4x^2 + 4x + 66$

$9\sqrt{f} = -2x^2 + 2x + 33$

$D = 4 - 1 + 33 = 34$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$

$\sqrt{3} - \sqrt{4} + 5 = 2\sqrt{2}$