



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть b_1 - первый член этой прогрессии, а q - её знаменатель. $b_1, q \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$b_n = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \quad b_{10} = x+4, \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^4} = b_1 \cdot q^{11}$$

~~$(15x+6)(x-3) \geq 0$~~ ~~$x > 3$~~ ~~$x < -2$~~ ~~$x > 3$~~ ~~$x < -2$~~ ~~$x > 3$~~ ~~$x < -2$~~ ~~$x > 3$~~

$(15x+6)(x-3) \geq 0$ $\begin{matrix} + & - & + \\ -2 & 3 & 3 \end{matrix}$

$x > 3: \frac{b_{12}}{b_1} = q^8 = \sqrt{(x-3)^4} \quad q = \sqrt[4]{x-3}$

$b_{10} = b_1 \cdot q^6 = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(x-3)^3} = \sqrt{15x+6} \quad x+4 = \sqrt{15x+6}$

$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9 \quad x = \frac{7 \pm 3}{2} = 2, 5$

но $x = 2$ не подходит, так $x > 3$ значит, $x = 5$.

$x \leq -2: \frac{b_{12}}{b_1} = q^8 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \cdot \sqrt{\frac{(x-3)^3}{(15x+6)}} = \sqrt{(x-3)^4} \quad q = \sqrt[4]{3-x}$

$b_{10} = b_1 \cdot q^6 = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(3-x)^3} = \sqrt{-(15x+6)} \quad x+4 = \sqrt{-(15x+6)}$

$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 = -15x - 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 23x + 22 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1; -22 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad x = -1$

Ответ: $x = -1; 5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-1 + 4\sqrt{2} > -1 \quad -1 + 4\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \text{ т.к. } 4\sqrt{2}-1 > 4 > \frac{5}{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$$

Получается, $x = -1 + 4\sqrt{2}$ не подходит.

$$-1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} > -1 - \frac{7}{2} > -5 > -7, \quad -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{-3\sqrt{5}-2}{2} < \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}$$

Получается, $x = -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$ подходит.

$$-1 + \frac{3}{2}\sqrt{5} > -1 \quad \frac{3}{2}\sqrt{5} - 1 = \frac{3\sqrt{5}-2}{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \quad 3\sqrt{5} > 3\sqrt{3} + 1$$

$$45 > 27 + 6\sqrt{3} - 2 \quad 18 > 6\sqrt{3} \quad 3 > \sqrt{3} \Rightarrow \frac{3\sqrt{5}-2}{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \text{ и}$$

значит $x = -1 + \frac{3}{2}\sqrt{5}$ не подходит.

Со всеми подходящими корнями вернёмся в систему и найдём:

$$\begin{cases} x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} \\ y = 35 \\ z = 0 \end{cases}$$

~~Ответ: $x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$~~

Ответ: $x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}, y = 35, z = 0.$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

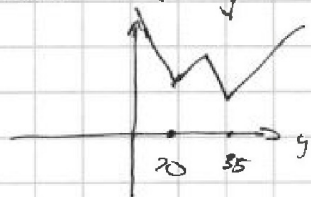
СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} & (I) \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} & (II) \end{cases}$$

Рассмотрим II: Правая часть имеет обычный график корня по z , принадлежит промежутку $[0; 15]$ на $[-15; 15]$. При $[-15; 0]$ возрастает, в -15 минимум, мин. знач. равно 0, в 0 максимум, макс. знач. равно 15. На $[0; 15]$ убывает, в 15 максимум, макс. знач. равно 0. Левая часть гр-я имеет график по y , минимумы в W :



В точках 20 и 35 достигается минимум, если y из мин. промежутка, при нем график

уже принадлежит миним. знач. $y=20$: $2|20-35| = 30$, $y=35$:

$|35-20| = 15$. $\Rightarrow$ при $y=35$ мин. знач., и это 15. Заметим,

что ~~для~~ левая часть гр-я имеет максимальное значение,

достигаемое в одной точке, равное максимуму значе-

ния правой части, достигаемому в одной точке, а значит

y уравнения есть только соответствующее решение:

$y=35$, $z=0$. Вернемся в систему.

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} \\ y=35, z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+7)} \\ y=35, z=0 \end{cases}$$

Пусть $a = \sqrt{x+7}$, $b = \sqrt{5-x}$. $a, b \in \mathbb{R}$ $a \geq 0, b \geq 0$. Имеем $a^2 + b^2 = 12$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~4x - 6 + 6 = 2 + 6~~ Выведем из системы, чтобы решить 1-е уравнение.

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+2)}$$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$x \in [-2; 5]$ всегда в этом диапазоне

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} = 2(\sqrt{(5-x)(x+2)} - 3)$$

$$\sqrt{x+2} \geq \sqrt{5-x} \quad x+2 \geq 5-x \quad 2x \geq -2 \quad x \geq -1 \quad \Rightarrow \sqrt{x+2} < \sqrt{5-x} \text{ при } x < -1$$

$$\sqrt{(5-x)(x+2)} \geq 3 \quad -x^2 - 2x + 10 \geq 9 \quad x^2 + 2x - 1 \leq 0 \quad D_1 = 1 + 4 = 5$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -\frac{3\sqrt{5}-1}{2} \quad \frac{3\sqrt{5}-1}{2} \end{array} x$$

$$x \in \left[-\frac{3\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3\sqrt{5}-1}{2}\right]$$

$$x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

Получается, что либо $x \in [-2; -\frac{3\sqrt{5}-1}{2}]$, либо $x \in [-1; \frac{3\sqrt{5}-1}{2}]$

$$\text{При } x \in [-2; -\frac{3\sqrt{5}-1}{2}] \cup [-1; \frac{3\sqrt{5}-1}{2}]: 12 - 2\sqrt{(x+2)(5-x)} = 4(5-x)(x+2) + 36 -$$

$$- 9 = 3 \cdot \sqrt{(x+2)(5-x)}. \quad \text{Положим } t = \sqrt{(x+2)(5-x)}, t \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

$$4t^2 - 22t + 24 = 0 \quad D_2 = 121 - 96 = 25 \quad t = \frac{11 \pm 5}{4} = 4; \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)(5-x)} = 4 \\ \sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 31 = 0 \\ x^2 + 2x - \frac{131}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 31 = 0 \\ 4x^2 + 8x - 131 = 0 \end{cases}$$

$$D_1 = 1 + 31 = 32$$

$$D_2 = 16 + 131 = 147$$

$$= 32 = (4\sqrt{2})^2$$

$$= 147 = (6\sqrt{5})^2$$

$$x = \frac{-1 \pm 4\sqrt{2}}{1} = -1 \pm 4\sqrt{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 6\sqrt{5}}{4} = -1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Получившиеся корни функции попадают в $[-2; -\frac{3\sqrt{5}-1}{2}] \cup [-1; \frac{3\sqrt{5}-1}{2}]$.

$$-1 - 4\sqrt{2} < -2 \quad -4\sqrt{2} < -6 \quad -\sqrt{32} > -\sqrt{36} \quad -1 - 4\sqrt{2} < -\frac{3\sqrt{5}-1}{2}, \text{ т.к.}$$

$$-1 - 4\sqrt{2} < -6 < -\frac{6-1}{2} < -\frac{3\sqrt{5}-1}{2}. \quad \text{Получается, } x = -1 - 4\sqrt{2} \text{ подходит.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1/3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

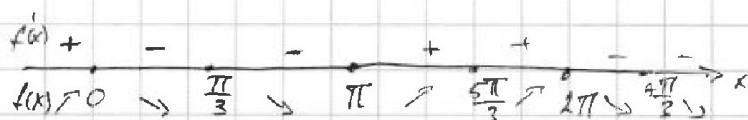
$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 - p = 0 \quad p = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3$$

$$\text{Пусть } f(x) = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3$$

$$f'(x) = 12 \cos^2 x \cdot (-\sin x) + 3(-\sin x) - 12 \cos x \cdot (-\sin x) = -3 \sin x = -3 \sin x (2 \cos x - 1)^2$$

$$f'(x) = 0 \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Получается, $f(x)$, хотя и не строго, но монотонно, убывает на $[2\pi k; 2\pi k + \pi]$ и возрастает на $[2\pi k + \pi; 2\pi(k+1)]$, а $2\pi k$ и $\pi + 2\pi k$ — это точки максимума и минимума, $k \in \mathbb{Z}$. И так как $p = f(x)$, то чтобы было хотя бы одно решение, $f(\pi) \leq p \leq f(0)$

$$-4 - 6 - 3 + 3 \leq p \leq 4 + 3 - 6 + 3 \quad -10 \leq p \leq 4. \quad \text{Значит, всегда}$$

для все заданных значений p , при которых уже имеет хотя бы одно решение, и это: $p \in [-10; 4]$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

Значит, что если в прямоугольнике симметрия по одной "средней линии", то в нём есть и симметрия по центру, ~~и по диагонали~~. Это верно, потому что если в прямоугольнике симметрия по одной "средней линии", то прямоугольник можно разрезать на 4 прямоугольника попарно симметричные относительно средней линии, и тогда точке из одного прямоугольника будет соответствовать точка из соседнего, и в свою очередь тоже, а это означает точки на краях с центром и пересечения диагоналей. Как-то так случаев сводятся к какому-то способу выбрать 2 точки в центре ~~каждого~~ прямоугольника, и это будет
$$C_{1500}^2 = \frac{1500 \cdot 1499}{2} = 1123500$$

Остальные как-то случаев для каждого среднего линия это:

$$C_{1500}^4 - C_{750}^2, \text{ А значит всего случаев будет: } 2C_{1500}^4 - C_{750}^2.$$

Для выбора случаев пересечения диагоналей можно тоже разрезать прямоугольник на 4 части для удобства, т.к. точки из одного угла проектируются в одну, всего симметрии относительно центра - это когда для каждой точки найдётся ~~только одна~~ точка с такой же расстоянием до центра, но той же



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

прямой, где лежат другие точки с центр, но не другие
луче. Для центральной симметрии лучей всего будет

C_{15000}^4 . Всего лучей будет: $(2C_{15000}^4 - C_{7500}^2) + C_{15000}^4 - C_{7500}^2 =$

$$= 3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2 = \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{8} - \frac{7500 \cdot 7499}{1}$$

$$\text{Ответ: } 3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2 = \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{8} - 7500 \cdot 7499 \text{ лучей.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть p - простое число, удовлетворяющее заданной задаче:

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \nmid 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad \begin{cases} u > b \\ u \neq b \\ \text{или} \\ \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \\ u + b^2 = 820 \end{cases} \quad \begin{cases} u > b \\ u \neq b \Rightarrow c \pm p^2 \neq c \pm 1 \Rightarrow p^2 \neq 1 \\ \begin{cases} a = p^2 c \\ b = 1 + c \\ u = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \\ u + b^2 = 820 \end{cases}$$

$p: 3$
 $p = 3$, т.к.
простое

$$\begin{cases} a > b \\ a = y + c \\ b = 1 + c \\ u = c - 1 \\ b = c - y \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad \begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ y + c + c^2 + 2c + 1 = 820 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - y \\ c - 1 + c^2 - 2yc + 1 = 820 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ c^2 + 3c - 819 = 0 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - y \\ c^2 - 2c - 742 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$D = 9 + 819 = 57^2$$

$$D = 219 + 2960 = 57^2$$

$$\begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - y \end{cases} \\ c = \frac{17 \pm 57}{2} = -20; 37 \end{cases}$$

Ответ: $(-21; -29; -30)$, $(36; 28; 27)$, $(-21; -29; -20)$, $(36; 28; 37)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

	4	-6	3	3
1	4	-2	1	4
2	4	2	2	4
3	4	-12	13	-10
4	4	-18	3	-
5	4	-3	3/4	-
6	4	-3	7	-1/2
7	4	-4	1	2
8	4	-8	7	-1/2
9	4	-5	2/4	-
10	4	-7	2/4	-

$$k_0 \left(\frac{a}{b} \right)^n + \dots + k_n = 0 \quad (1.1)$$
$$a^n k_n + \dots + k_0 \cdot b^n = 0$$

$$L_{1.5}$$

$$a \neq b$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = p^2 + c \\ a = c + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3299 \div 9 \\ -22 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3299 = 365 \cdot 9$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = p^2 + c \\ b = p^2 + 1 \end{cases}$$
$$a+b = 820 \quad c+9 = c^2 + 2c + 1 = 820$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0 \quad D = 9 + 810 \cdot 4 = 3249 = 57^2 \quad c = \frac{-3 \pm 57}{2} = 27$$

$$(-24; -29; -30), (36; 28; 24)$$

$$\sqrt{225-2^2} \in [0; 15] \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x+20 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 20 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases} \quad p^2 \neq 1 \quad p=3 \quad a=c-1 \quad b=c-9$$

$$(5-x)(x+1) = 5x+5-x^2-x \quad y \geq 35: 3y-55 = \sqrt{225-2^2}$$

$$\begin{cases} y = 35 \\ z = 15 \end{cases}$$

$$(y-20) \times 2(9-55) = 15$$

$$y \geq 35: 3y - 95 = 15 \quad 3y = 110 \quad y = \frac{110}{3} \approx 36.6$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ -95 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{5-x-4c+6} \quad 35-2x-x^2+10 = 15 \quad y = 35$$

$$y < 20: 20-y-2y+10 = 90-3y = 15$$

$$a+b = b(2a+1) \quad 2a+1 = 2b(2a+1) \Rightarrow 11 \quad 30-9 = 5 \quad 30-9 = 5 \quad 30-9 = 5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$b_{11} = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$ $\frac{b_{12}}{b_1} = q^3 = \sqrt{(x-3)^3}$ $q = \sqrt{x-3}$

$b_{10} = b_1 \cdot q^9 = x+9$ $x+9 = q^2 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{x-3} \cdot (15x+6)(x-3)} = q^2 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$

$b_{12} = b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{15x+6} \sqrt{x-3}$ $b_9 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$ $q = \sqrt{x-3}$ $q = \sqrt[4]{\frac{15x+6}{x-3}}$

$b_{10} = x+9 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$ $x^2 = 8x+16 = 15x+6$ $x^2 - 7x - 10 = 0$

$x = \frac{7 \pm 3}{2} = 5$ $2 = 49 - 40 = 9$

$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$

$2 \cos 2x \cos x + 5 \cos x = 3 \cos 2x + p$

$2 \cos x (\cos 2x + 1) = 3 \cos 2x - 3 \cos x + p$

$3 \cos 2x = 3 \cos x$

$6 \cos^2 \frac{x}{2} = 3 \cos \frac{x}{2}$

$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$

$\cos 2x + \cos 2x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$

$\cos 3x = \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$

$4 \cos 3x - 3 \cos x = 3 \cos 2x + p$

$4 \cos^3 x - 3 \cos x = 3 \cos 2x + p$

$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - p = 0$

$\cos x (4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3) + 3 - p = 0$

$\frac{3}{4} \left(\frac{4}{4} - \frac{6}{4} + 3 \right) + 3 - p = 0$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + 3 - p = 0$ $p = \frac{3}{16} + 3 = \frac{25}{16}$

$f(x) = 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x$ $f(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 3 = 4$ $f'(1) = 12 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 3 = 3$

$f'(x) = 12 \cos^2 x \cdot (-\sin x) - 12 \cos x \cdot (-2 \sin x) = -12 \cos x \sin x + 24 \cos x \sin x = 12 \cos x \sin x$

$f'(1) = 12 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$f(x) = -1(4 + 6 + 3) + 3 - p = 0$ $-13 - p = 0$ $p = -13$

$f(1) = 1(4 - 6 + 3) + 3 - p = 4 - p$ $p = 4$

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{4} + 0) = \frac{1}{8}$ $p = 0$ $p = \frac{1}{8} + 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

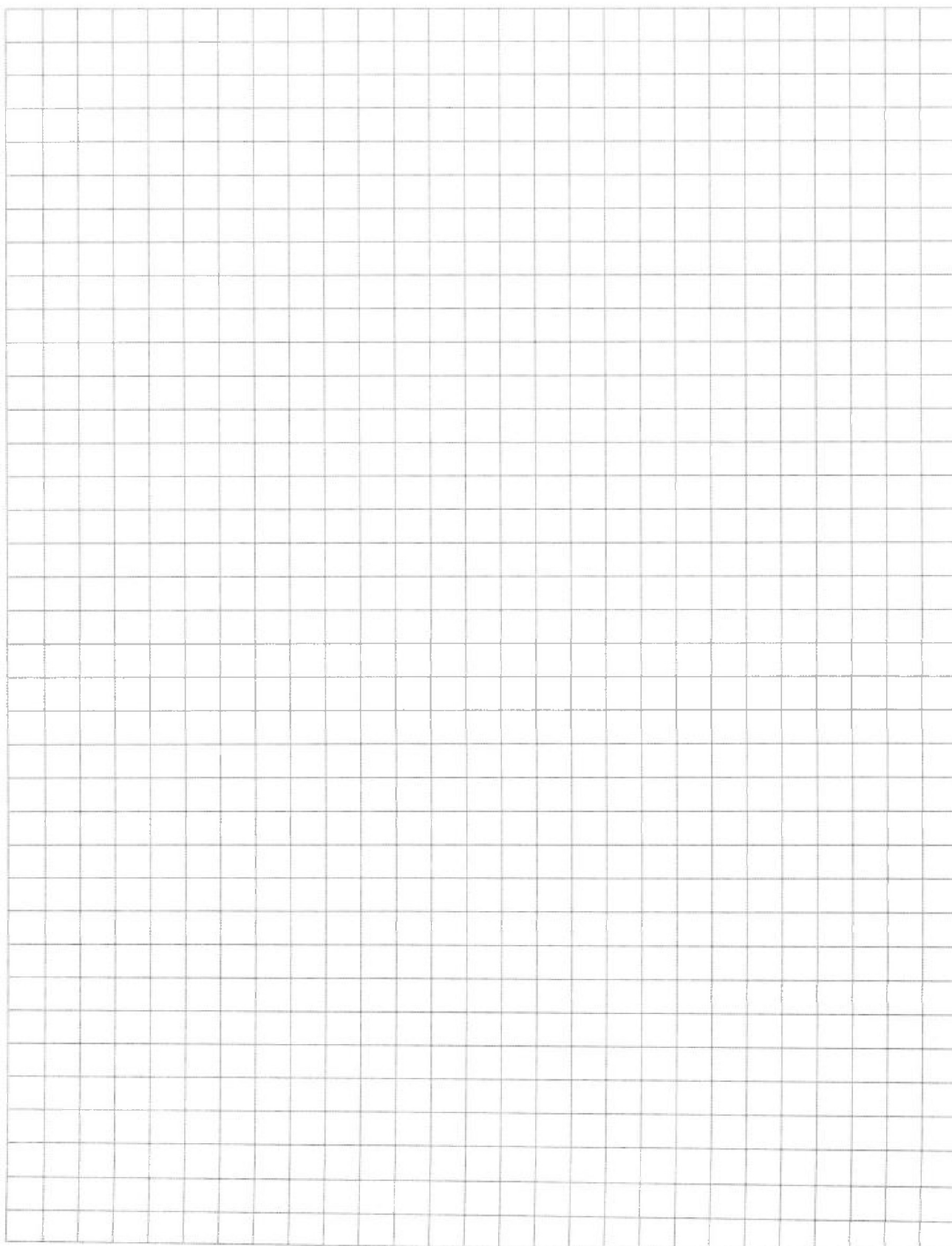
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) ~~Пустое~~ ^{нб} Пусть p - простое число: $(a-c)(b-c) = p^2$

Т.к. $a > b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, p -простое: $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$ Из условий $(a-b)/3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \not\equiv b \Rightarrow p^2 + c \not\equiv 1 + c \Rightarrow p^2 \not\equiv 1 \Rightarrow p \neq 3$, и т.к. p - простое

число, то $p = 3$, а значит: $\begin{cases} a = 9 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$ $a + b^2 = 820$ а значит.

$$9 + c + c^2 + 2c + 1 = 820 \quad c^2 + 3c - 810 = 0 \quad D = 9 + 3240 = 3249 = 57^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27.$$

$a = 36$, $b = 28$, $c = 27$.

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 27 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -30 \end{cases} \text{ не подходит, т.к. } a > b \geq 0$$

2) Пусть $0 > a > b$: Пусть p - простое число, тогда $a < 0$:

$(a-c)(b-c) = p^2$. Т.к. $a > b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, p -простое: $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$

$\begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases}$ $a \not\equiv b \Rightarrow c-1 \not\equiv c-p^2 \Rightarrow p^2 \not\equiv 1 \Rightarrow p \neq 3 \Rightarrow p = 3$, т.к. простое

$$\begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \end{cases} \quad a + b^2 = 820 \quad c-1 + c^2 - 18c + 81 = 820$$

$$c^2 - 17c - 740 = 0 \quad D = 289 + 2960 = 3249 = 57^2 \quad c = \frac{17 \pm 57}{2} =$$

$$= -20; 37.$$

$$\begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -20 \end{cases}$$

$a = -21$, $b = -29$, $c = -20$

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 27 \end{cases} \text{ не подходит, т.к. } 0 > a > b$$