



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}$, тринадцатый член равен $5 - x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x - 35)(x + 1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

21.

Пусть геом. прогрессия будет вида: $b_n = q^{n-1} \cdot b_1$, тогда из условия

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^{12} = 5-x & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} & (3) \end{cases}$$

$$(b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8)$$

ОДЗ: $x \in (-\infty; -1) \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$

При $x < -1$: Подставим (1) в (3) $\frac{\sqrt{35-13x} \cdot q^8}{\sqrt{(x+1)^3} \cdot (-x+1)} = \sqrt{35-13x} \cdot \sqrt{-x-1}$

$$\begin{cases} x \geq \frac{35}{13} & \text{т.к. } x < -1, \text{ то такое невозможно} \\ q^8 = (-x-1)^2 \end{cases}$$

$$x < -1 \Rightarrow q^4 = -x-1 \Rightarrow q^{12} = (-x-1)^3$$

$$b_1^2 \cdot q^{12} = \frac{35-13x}{(-x-1)^3} = b_1^2 \cdot (-x-1)^3$$

(т.к. $b_1 \geq 0$, то $b_1 \neq 0$) $b_1^2 \neq \frac{\sqrt{35-13x}}{(-x-1)^3} \Rightarrow$ подставим все в (2)

$$\Rightarrow \sqrt{35-13x} = 5-x$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3+7}{2} = 2 & \text{т.к. } x < -1, \text{ то такое невозможно} \\ x = \frac{-3-7}{2} = -5 \end{cases}$$

$$x = \frac{-3-7}{2} = -5$$

При $x \geq \frac{35}{13}$: Подставим (1) в (3): $\begin{cases} x \geq \frac{35}{13} \Rightarrow b_1 = 0 \text{ или } b_{15} = 0 \\ q^8 = (x+1)^2 \end{cases}$

$$x \geq \frac{35}{13} : q^4 = x+1 \Rightarrow q^{12} = (x+1)^3 \Rightarrow b_1^2 = \frac{13x-35}{(x+1)^3} \Rightarrow b_1 \neq \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3}$$

Подставим в (2): $\sqrt{13x-35} = 5-x$

$$x^2 - 23x + 60 = 0 \quad D = 529 - 240 = 289 = 17^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{23+17}{2} = 20 \\ x = \frac{23-17}{2} = 3 \end{cases}$$

$$3 > \frac{35}{13}; 20 > \frac{35}{13}$$

Ответ: -5; 3; 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

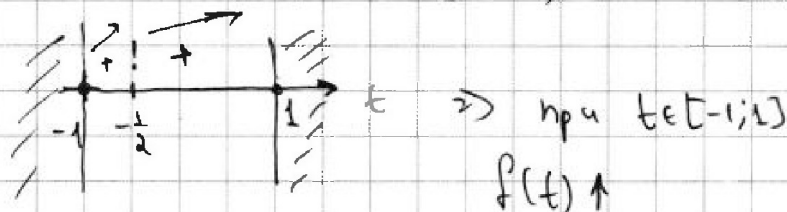
$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x; \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Пусть $t = \cos x$, $(t \in [-1; 1])$, тогда введём функцию

$$f(t) = 4t^3 - 3t + 3(2t^2 - 1) + 6t = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12\left(t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) = 12\left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$



Видно, значит, максимум $f(t)$ будет либо в $t = -1$, либо в $t = 1$, либо в $t = -\frac{1}{2}$.

$t = -1$, либо при $t = -\frac{1}{2}$, либо при $t = 1$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

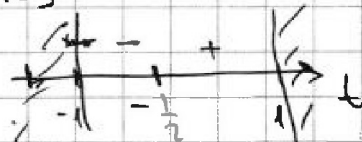
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{8} + \frac{6}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10 \Rightarrow f(t) \in [-4; 10]$$

(При том, что $f(t) = -4$ и $f(t) = 10$ достигается при $t \in [-1; 1]$)

Значит, $p \in [-4; 10]$ (т.к. по условию уравн. имеет хотя бы 1 корень). Ответ: $p \in [-4; 10]$

$$f''(t) = 24t + 12 = 24\left(t + \frac{1}{2}\right)$$



при $t \in [-1; -\frac{1}{2}]$: $f(t)$ выпукла вверх

при $t \in [-\frac{1}{2}; 1]$: $f(t)$ выпукла вниз

Значит, график функции $f(t)$ примерно будет выглядеть следующим образом:



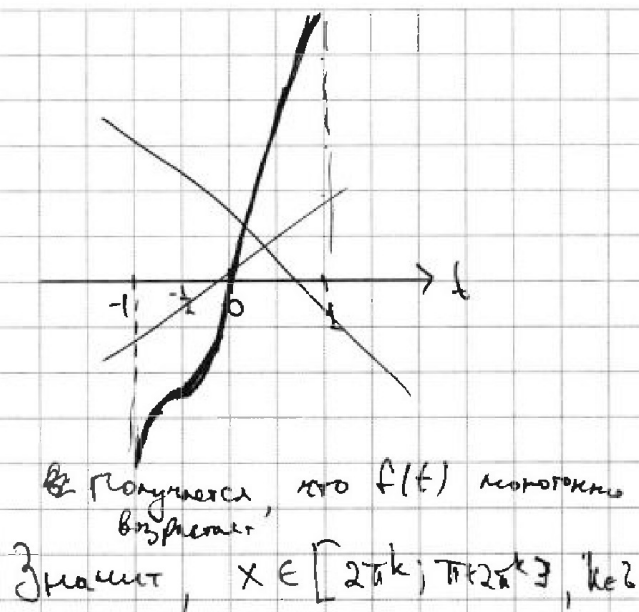
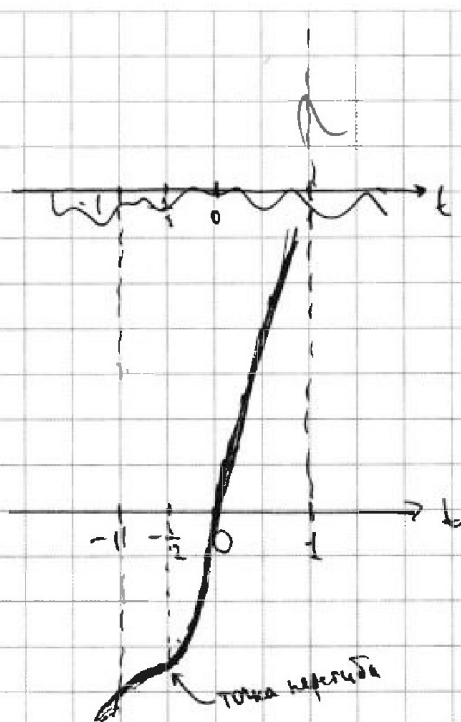
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



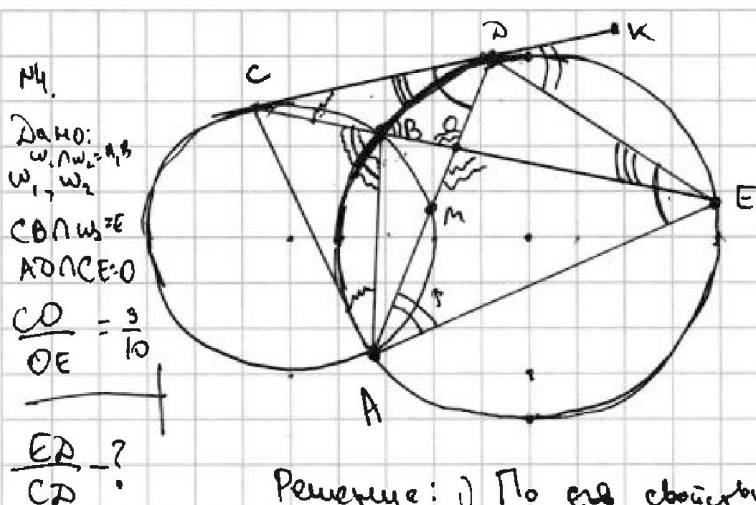
Ответ: $x \in [2\pi k; \pi(2k+1)]$, $k \in \mathbb{Z}$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение: 1) По свойству угла между хордой и касательной:

$$\angle CDA = \angle AED$$

$$\angle DAE = \angle EDK \quad (\text{т.к. } E \in (CD))$$

$$\angle DEB = \angle CDB$$

$$\angle CAB = \angle DCB$$

$$2) \angle BOA = \angle ADE \quad (\text{вертик.}); \quad \begin{cases} \angle COB = \angle DEB \\ \angle CDO = \angle DEA \end{cases} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BDO = \angle CDO - \angle CDB = \angle DEA - \angle DEB = \angle AEO \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AOB \sim BOD \quad (\text{по 2 углам}) \Rightarrow \angle OBO = \angle DAE$$

$$3) \text{ Пусть } \angle DAE = \angle EDK = \beta; \quad \angle AEO = \angle COA = \alpha$$

$$4) \text{ Пусть } AD \cap \omega_1 = M$$

$$5) \angle CDA = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup CM) = \alpha \quad (\text{как угол между кас. и сек.})$$

$$\frac{1}{2} \cup AC = \angle ABC = 180^\circ - \angle ABE \quad (\text{впис. и опир. на } \cup AC)$$

$$\angle ABE = \angle ADE = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \frac{1}{2} \cup AC = \alpha + \beta$$

$$\alpha + \beta - \frac{1}{2} \cup CM = \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \cup CM = \beta$$

$$\angle CAM = \frac{1}{2} \cup CM = \beta \quad (\text{впис. и опир. на } \cup CM) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD - \text{бисс. } \angle CAB \Rightarrow \text{по св-ву бисс.: } \frac{CO}{OE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10} \Rightarrow AC = \frac{3}{10} AE$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle ADE$:

$$1) \angle CAD = \beta = \angle DAE$$

$$2) \angle CDA = \alpha = \angle DEA$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \text{ (по 2 углам)} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

$$\Rightarrow AD^2 = AC \cdot AE = \frac{3}{10} AE^2$$

$$AD = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot AE$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot AE} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{10}{3}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Рассмотрим, сколько способов можно закрасить 8 клеток, так чтобы закрашенное множество было симметрично относительно горизонтальной "средней линии". Т.к. выполняется симметрия, то нам достаточно выбрать 4 клетки в одной половине, а вторая будет определена ~~как~~ единственным образом. Значит, всего способов в таком случае $C_{100:250}^4 = C_{25000}^4$

Теперь рассмотрим закрашенное множество, которое симметрично относительно вертикальной "ср. линии". Вследствии симметрии нам нужно просто выбрать из половины ~~или~~ 4 клетки, т.е. всего способов $= C_{200:125}^4 = C_{25000}^4$. Получится способов с симм. $= C_{25000}^4$. Но мы посчитали два раза случаи, когда клетки одновременно симм. относительно двух прямых $\Rightarrow$ нужно вычесть кол-во способов с симметрией относительно центра

Тогда нам нужно выбрать 2 клетки из $\frac{1}{4}$ всех клеток прямоугольника (из-за центральной симметрии), т.е. кол-во способов выбрать эти 2 клетки $= C_{125:100}^2 = C_{12500}^2$. Значит, способов получить закрашенное мн., удовл. условию задачи $= 2 \cdot C_{25000}^4 - C_{12500}^2$

Ответ: $2 \cdot C_{25000}^4 - C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№.

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a+b^2 = 560 \end{cases}, \text{ где } p - \text{простое число}$$

Т.к. p - простое число и $(a-c)(b-c) = p^2$, то

$$\begin{cases} \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} & \begin{cases} a = p^2 + b - 1 \\ c = b - 1 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} & \begin{cases} c = a - 1 \\ b = p^2 + a - 1 \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} & \begin{cases} a-c = b-c \\ a-c = p \end{cases} & \Rightarrow a = b - \text{противоречие условию } (a > b) \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} a = p^2 + b - 1 \\ c = b - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 + b - 1 + b^2 = 560 \\ (p^2 - 1) \not\equiv 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-1) \not\equiv 3 \\ (p+1) \not\equiv 3 \end{cases} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}$$

Т.к. p - простое и $p \equiv 0 \pmod{3}$, то $p = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$$

По т. Виета найдем корни $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 24, b = -24 \\ x_2 = -23, b = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -16 \\ c = -25 \\ b = -24 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 31 \\ c = 22 \\ b = 23 \end{cases}$

(2): $b = p^2 + a - 1$; Т.к. p - простое, то $p \geq 1 \Rightarrow p^2 \geq 1 \Rightarrow p^2 > 0 \Rightarrow b > a$
противоречие условию.

Ответ: $(-16; -24; -25); (31; 23; 22)$

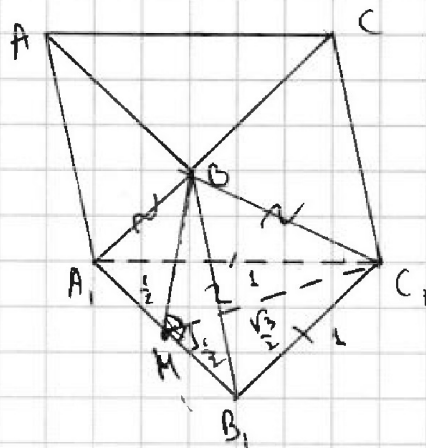


1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.
 Дано:
 $ABCA_1B_1C_1$ - ~~прав.~~ призма
 $\triangle ABC$ - p/c
 $AB=1$
 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1B_1C_1} = 4$
 $S_{\triangle AA_1B_1} = S_{\triangle AA_1C_1} = 3$
 $h = ?$



Рассмотрим тетраэдр $A_1B_1C_1B$.

Т.к. $\triangle ABC$ - p/c и высота упадет
 в т.О (где т.О - точка перес. медиан, высот и бис.),
 то $A_1B_1C_1B$ - правильный тетраэдр $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = BB_1 = BC,$$

Проведем $BH \perp A_1B_1$ $\Rightarrow$ т.Н - сер. A_1B_1 $\Rightarrow$

$C_1H \perp A_1B_1$ (т.к. $\triangle A_1B_1C_1$ - p/c) $\Rightarrow BH \perp (A_1B_1C_1)$

$$BH = 4, C_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{AB \cdot C_1B_1} = 2 \sqrt{AB \cdot C_1B_1} = 2 \sqrt{BH \cdot C_1H} \Rightarrow BH = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}$$

$$h = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$$

Ответ: $\frac{13}{3}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

р1.

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b_{15} = 5-x$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b_{15} = q^{14} \cdot b_7$$

$$\begin{cases} b_7 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} & (1) \\ b_7 \cdot q^{12} = 5-x & (2) \\ b_7 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(13x-35)(x+1)}{(x+1)^3} \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

8
5

$$q^8 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$q^8 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$552 \mid 2$$

$$276 \mid 2$$

$$138 \mid 2$$

$$69 \mid 3$$

$$23 \mid 23$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$57 \mid 1$$

$$np \cdot x \geq \frac{35}{13}$$

$$q^8 \cdot \sqrt{13x-35}$$

$$\frac{23}{x+1}$$

$$\frac{23}{x+1}$$

$$8 \cdot 6$$

$$(x-23)(x+24)(x+1)\sqrt{x+1}$$

$$x = \frac{35}{13}$$

$$519 \cdot 2 = 512$$

$$\Rightarrow$$

$$x = \frac{35}{13}$$

$$x = \frac{35}{13}$$

$$x = \frac{35}{13}$$

$$x = \frac{35}{13}$$

$$x = \frac{35}{13}$$

$$x = \frac{35}{13}$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^4 = x+1$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$a > b$$

$$(a-b)/3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a+b^2 = 560$$

$$a \approx 560 - b^2$$

$$(560 - b^2 - c)(b-c) = p^2$$

$$560b - 560c - b^2c + b^2c^2 = p^2$$

$$x \mid 91$$

$$x \mid 91$$

$$ab - bc - ac + c^2 = p^2$$

$$c^2 - c(a+b) + ab - p^2 = 0$$

$$D = a^2 + b^2 - 4ab - 4p^2 = (a-b)^2 + 4p^2$$

$$169x^3 - 91x^2 + 35x + 169x^2 - 91x + 35 = x^4 + 2x^2(25-5x) + 625 - 225x$$

$$-250x + 625$$

$$x^4 - 179x^2 - 3x^2 - 194x + 520 \geq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

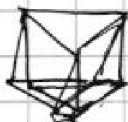
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



п2. (2):

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = 12 \end{cases}$$

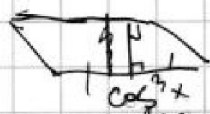


$$\begin{cases} y = -1 \\ -4y + 35 = \sqrt{169 - z^2} \\ -1 \leq y \leq 12 \\ -2y + 37 = \sqrt{169 - z^2} \\ y = 12 \\ 4y - 35 = \sqrt{169 - z^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ 16y^2 - 280y + 169 = 169 - z^2 \\ -1 \leq y \leq 12 \\ 4y^2 - 140y + 37 = 169 - z^2 \\ y = 12 \\ 16y^2 - 280y + 169 = 169 - z^2 \end{cases}$$

п3.

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$



$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos(x+2x) = \cos(x) \cdot (2\cos^2(x) - 1) - \sin(x) \cdot 2\cos(x)$$

$$= -3\cos x (1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$p = 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3$$

$$2\cos x (4\cos^2 x + 6\cos x + 3) = p$$

$$\begin{aligned} -4 \leq 4\cos^2 x \leq 4 \\ 0 \leq 6\cos x \leq 6 \end{aligned}$$

$$-7 \leq 3\cos x \leq 7$$

$$-7 \leq p \leq 13$$

$$(13-7)(13+7)$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow p = 13$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow p = -1$$

$$f(x) = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3$$

$$\sqrt{x+3}$$

$$f'(x) = 12\cos^2 x \cdot \sin x + 12\cos x \cdot \sin x - 3\sin x = \sin x (12\cos^2 x + 12\cos x + 3)$$

$$= -\sin x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 = -12\sin x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

мин.

$$f(\pi + 2\pi k) = -4 + 6 - 3 = -1$$

max.

$$\frac{13}{2}$$

$$p \in [-1; 13]$$

$$\cos x (4\cos^2 x + 6\cos x + 3) \in [-1; 13]$$

x ∈



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

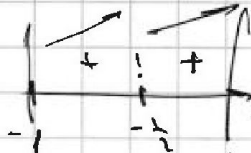
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 \Rightarrow 12(t^2 + t + \frac{1}{4}) = 12(t + \frac{1}{2})^2$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$



$$5 + \sqrt{x+3} = \sqrt{4-x} + 2\sqrt{y-x+2}$$
$$25 + x + 3 + 10\sqrt{x+3} = 4 - x + 2 + 4\sqrt{y-x+2}$$
$$+ 4\sqrt{(4-x)(y-x+2)}$$

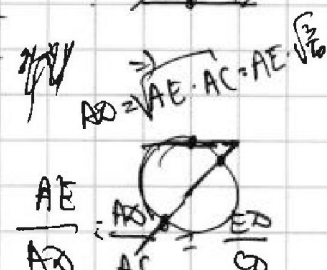
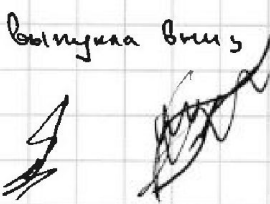
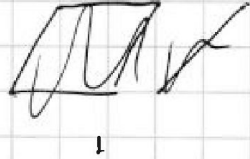
min / max:

$$\begin{cases} f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4 \\ f(-\frac{1}{2}) = 4 - 4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -4 \\ f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10 \end{cases}$$

max : 10 ; min : -4 $\Rightarrow p \in [-4; 10]$

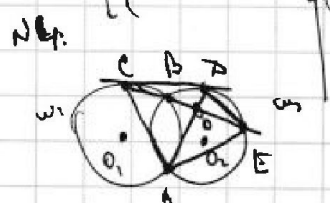
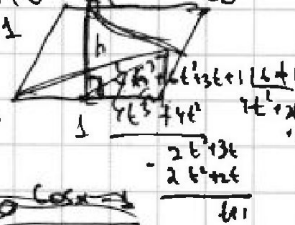
$$f''(t) = 24t + 12$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

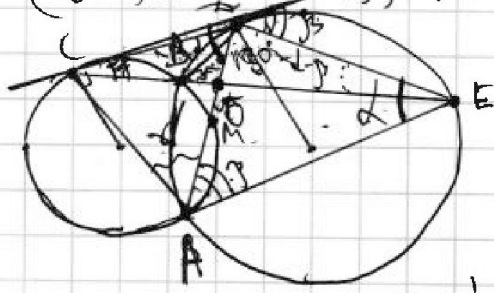


$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \leq 10$$
$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 13 \leq 0$$
$$-4t^3 - 6t^2 - 3t + 13 \geq 0$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 13 \leq 0$$
$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x + 1 \leq 13$$

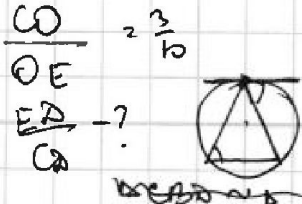


$$(t+1)(4t^2 + 10t + 13) \geq 0$$
$$(t-1)(4t^2 + 10t + 13) \geq 0$$



$$t \geq -1$$
$$t \leq 1$$

$$AOE \sim \Delta$$
$$\angle AOE = 2\alpha + 2\beta$$



$$\frac{AO}{OE} = \frac{BO}{OE} = \frac{DO}{OE}$$