



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \quad (1)$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad (2)$$

Рассмотрим левую часть ур-ня (2). При $y \leq 20$ она равна $90-3y$, то есть убывает при $y \leq 20$. При $20 \leq y \leq 35$ она равна $50-y$, то есть убывает при $20 < y < 35$. При $35 \leq y$ она равна $3y-90$, то есть возрастает при $y > 35$, причём непрерывна при $y \in \mathbb{R}$ (т.к. модуль непрерывен).

Значит, поскольку она кусочно-линейная и непрерывная, то её минимум достигается на месте ~~возрастания~~ убывания на возрастании, т.е. в $y=35$, и равен $|35-20| + 2 \cdot 0 = 15$. Поскольку $\sqrt{225-z^2} \leq 225$, то $\sqrt{225-z^2} \leq 15$,

причём равенство — в $z=0$. Итак, $|y-20| + 2|y-35| \geq 15 \geq \sqrt{225-z^2}$, значит, (равенство) $\Leftrightarrow (y=35, z=0)$. Перепишем (1), подставив это в y, z .

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$\Leftrightarrow a - b + 6 = 2ab, \text{ где } a = \sqrt{x+7}, b = \sqrt{5-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab - a + b - 6 = 0 \\ a^2 + b^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u - v = 6 \\ v^2 + 2u = 12 \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} u = ab \\ v = a - b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{v+6}{2} \\ v+6 = 2u = 12-v^2 \end{cases} \Leftrightarrow v^2 + v - 6 = 0 \Leftrightarrow v \in \{2, -3\} \Leftrightarrow u \in \{4, \frac{3}{2}\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Искомые значения, $v = ab = \sqrt{35 - 2x - x^2} \in \{4, \frac{3}{2}\}$, при $-7 \leq x \leq 5$.

$$\begin{cases} 35 - 2x - x^2 = 16 \\ 35 - 2x - x^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 20 \\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 36 - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \cdot 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \sqrt{20} - 1, -1 - \sqrt{20}, -1 - \frac{3}{2}\sqrt{15}, \frac{3}{2}\sqrt{15} - 1 \right\}, \text{ при } x \in$$

эти решения подходят, т.к. $\sqrt{20} < 6$ и $\frac{3}{2}\sqrt{15} < 6$.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} z=0 \\ y=35 \end{cases}, x \in \left\{ \begin{array}{ll} -1 \pm \sqrt{20} & -1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{15} \\ -1 - \sqrt{20} & -1 - \frac{3}{2}\sqrt{15} \end{array} \right\}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = \\ &= c(2c^2 - 1) - 2(1 - c^2)c = 4c^3 - 3c, \text{ где } c = \cos x. \quad [1,1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p &= \cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = 4c^3 - 3c + 6c - 6c^2 + 3 \\ &= 4c^3 - 6c^2 + 3c + 3. \\ &= 4\left(c^3 - 3 \cdot \frac{1}{2}c^2 + 3 \cdot \frac{1}{4}c - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} + 3. \\ &= 4 \cdot \left(c - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Вспомогательная $f(c) = 4 \cdot \left(c - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{7}{2}$ строго возрастает (как кубическая строго возрастающая функция), $\Rightarrow$ при этом непрерывна, $\Rightarrow$ принимает на $[-1, 1]$ все значения от $f(-1) = -10$ до $f(1) = 4$, и только их.

Следовательно, ~~тогда~~ у исходного уравнения есть решение тогда и только тогда, когда $p \in [-10, 4]$, при этом в таком случае $\cos x = \frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p - 7/2}{4}} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt[3]{2p - 7}\right)$, но есть $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt[3]{2p - 7}\right)\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $p \in [-10, 4], x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt[3]{2p - 7}\right)\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \not\equiv 3 \\ (a - c)(b - c) = p^2 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad \text{т.к. } p - \text{простое.}$$

где $p - \text{простое. (примен } p^2 : d \Leftrightarrow d \in \{1, \pm p, \pm p^2\})$

$a > b \Rightarrow a - c > b - c$ (в частности, $a - c \neq b - c$, т.е. не $\begin{cases} a - c = \pm p \\ b - c = \pm p \end{cases}$)

Значит, $\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \\ a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases}$ В обоих случаях $a - b = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Если $p \neq 3$, то $p \not\equiv 3$ (иначе p не простое), значит, $\begin{cases} p \equiv 1 \pmod{3} \\ p \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$.

В обоих случаях $a - b = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) \not\equiv 3$, что противоречит условию.

Значит, $p = 3$, и $a - b = p^2 - 1 = 8 \Rightarrow a = b + 8$.

Тогда $a + b^2 = 820 \Leftrightarrow 0 = b^2 + b + 8 - 820 = b^2 + b - 812 = (b - 28)(b + 29)$

$\Rightarrow b \in \{28, -29\} \Rightarrow a = b + 8 \in \{36, -21\}$. Значит, тогда

~~$\begin{cases} 36 - c = 9 \\ -21 - c = 9 \end{cases}$~~ $\begin{cases} 36 - c = 9 \Rightarrow c = 27 \\ -21 - c = 9 \Rightarrow c = -30 \end{cases}$

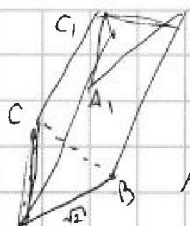
Ответ: $(a, b, c) \in \{(36, 28, 27), (-21, -29, -30)\}$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Сосчитаем все метрические величины в $\sqrt{2}$ раз и введем декартовы координаты.

$A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$. Пусть $\overline{AA_1} = \vec{r} = (x, y, z)$.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - пирамида, $AB=2$, $\triangle ABC$ - п/к;
 $S(CA_1B_1B) = 5$, $S(AA_1C_1C) = 5$, $S(AA_1B_1B) = 4$.
 Найти $h = d(ABC, A_1B_1C_1)$.

Используя условие на площади получаем, что

$$\begin{cases} \frac{5}{2} = |\vec{r} \times \vec{a}| = |\vec{CC}_1 \times \vec{CB}|, \\ \frac{5}{2} = |\vec{r} \times \vec{b}| = |\vec{AA}_1 \times \vec{AC}|, \\ \frac{4}{2} = |\vec{r} \times \vec{c}| = |\vec{BB}_1 \times \vec{AB}|, \end{cases}$$

где "x" - векторное произведение.

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}^2 = (y+z)^2 + x^2 + x^2 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}^2 = y^2 + (x+z)^2 + y^2 \\ \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}^2 = z^2 + z^2 + (x+y)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y-2z) = 0.$$

либо $x=y$, тогда $\begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^2 = (x+z)^2 + 2x^2 \\ 4 = 2z^2 + 4x^2 \end{cases} \Rightarrow z^2 = 2 - 2x^2$

Но это невозможно, т.к. тогда пирамида троякая (высота параллельна высоте AA_1).

либо $z = \frac{x+y}{2}$, тогда $\begin{cases} 4 = 2z^2 + (x+y)^2 = \frac{3}{2}(x+y)^2 \\ \frac{25}{4} = (y+z)^2 + 2x^2 \\ \frac{25}{4} = (x+z)^2 + 2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25/4 = 3(x^2 + y^2) + \frac{3}{2}(x+y)^2 \\ 25/4 = (x+z)^2 + 2y^2 \end{cases}$

Значит $(x^2 + y^2) = \frac{25}{12}$. Тогда $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{17}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{7}{2}$

"Расставим" обратно и получим, что $h = d(ABC, A_1B_1C_1) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{2} = 1$.

Ответ: $h = \sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть эта геом. прогрессия - $(a \cdot q^{n-1})_{n \geq 1}$. Перепишем условие:

$$\begin{cases} a \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} & (\Rightarrow x \neq 3). \quad (\text{Если } a=0 \vee q=0, \text{ то } x=-4 \wedge aq^3 \neq 0 \Rightarrow aq \neq 0) \\ a \cdot q^9 = \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot (x+4) \\ a \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \end{cases}$$

Тогда $q^8 = \frac{a \cdot q^{11}}{a \cdot q^3} = \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2 \Rightarrow q^4 = |x-3|$

Значит, $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)} = (aq^3)(aq^{11})q^4 = a^2q^{18} = (x+4)^2$

$$\Leftrightarrow |15x+6| = (x+4)^2$$

$$\begin{cases} x \leq -6/15 = -2/5 \\ x^2 + 23x + 22 = 0 \\ x \geq -2/5 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-1, -22\} \\ x \in \{2, 5\} \end{cases}$$

Сложно видеть, что при всех таких x существуют a и q , удовлетворяющие системе выше. Интересный вопрос - минимальная степень n . Если мы хотим Г.П. то по последовательности $(a \cdot q^{n-1})_{n \geq 1}$, то все x подходят. Если ограничить их до $q > 0$, то $x \in \{-1, 2, 5\}$. Но $\text{sgn}(aq^3) = \text{sgn}(a \cdot q^9) \Rightarrow x \geq -4$. Для $x = -1$ подходят $a = \frac{3}{\sqrt[4]{2}^9}$, $q = \sqrt[4]{2}$.

Для $x = 2$ - не определён aq^3 , так что $x \neq 2$. При $x = 5$ подходит $a = \frac{9}{\sqrt[4]{2}^9}$, $q = \sqrt[4]{2}$. Значит, $x \in \{-1, 5\}$.

Ответ: $x \in \{-1, 5\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разделим этот прямоугольник средним линией на 4 прямоугольника. x, y, z, t
Невидна, для каждого закрашенного м-во с ^{одной из} указанных симметрий в
каждом из 4 меньших прямоугольников по 2 закрашенные клетки.

Пусть A - все закрашенные м-во симметричные отн. большей средней линии,
 B - отн. меньшей средней линии, C - отн. центра.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$, по формуле
включения - исключения. Заметим, что $A \cap B = B \cap C = C \cap A = A \cap B \cap C$, т.к.

композиция любых 2 различных из указанных симметрий порождает
третью (для достаточно убедиться в этом ^{для} одной закрашенной клетки),
применяя ^{тогда} в каждом из 4 меньших прямоугольников будет по 2 ~~закра-~~ закра-
шенные клетки (тогда всё м-во ~~однозначно~~ однозначно восстанавливается
по одному из меньших пр-ков (значит, $|A \cap B \cap C| = \binom{200 \cdot 150 / 4}{2}$), т.к. все
возможны)

~~Решение~~ Закрашенное множество из A однозначно восстанавливается по
любому м-ву из 4 клеток ниже средней линии, B - по м-ву 4
клеток левее ср. линии, C - по любому м-ву 4 клеток ниже средней
линии. Значит, $|A| = |B| = |C| = \binom{200 \cdot 150 / 2}{4}$

Ответ: $3 \cdot \binom{15000}{4} - 2 \cdot \binom{7500}{2} = 3 \cdot \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{24} - 2 \cdot \frac{7500 \cdot 7499}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

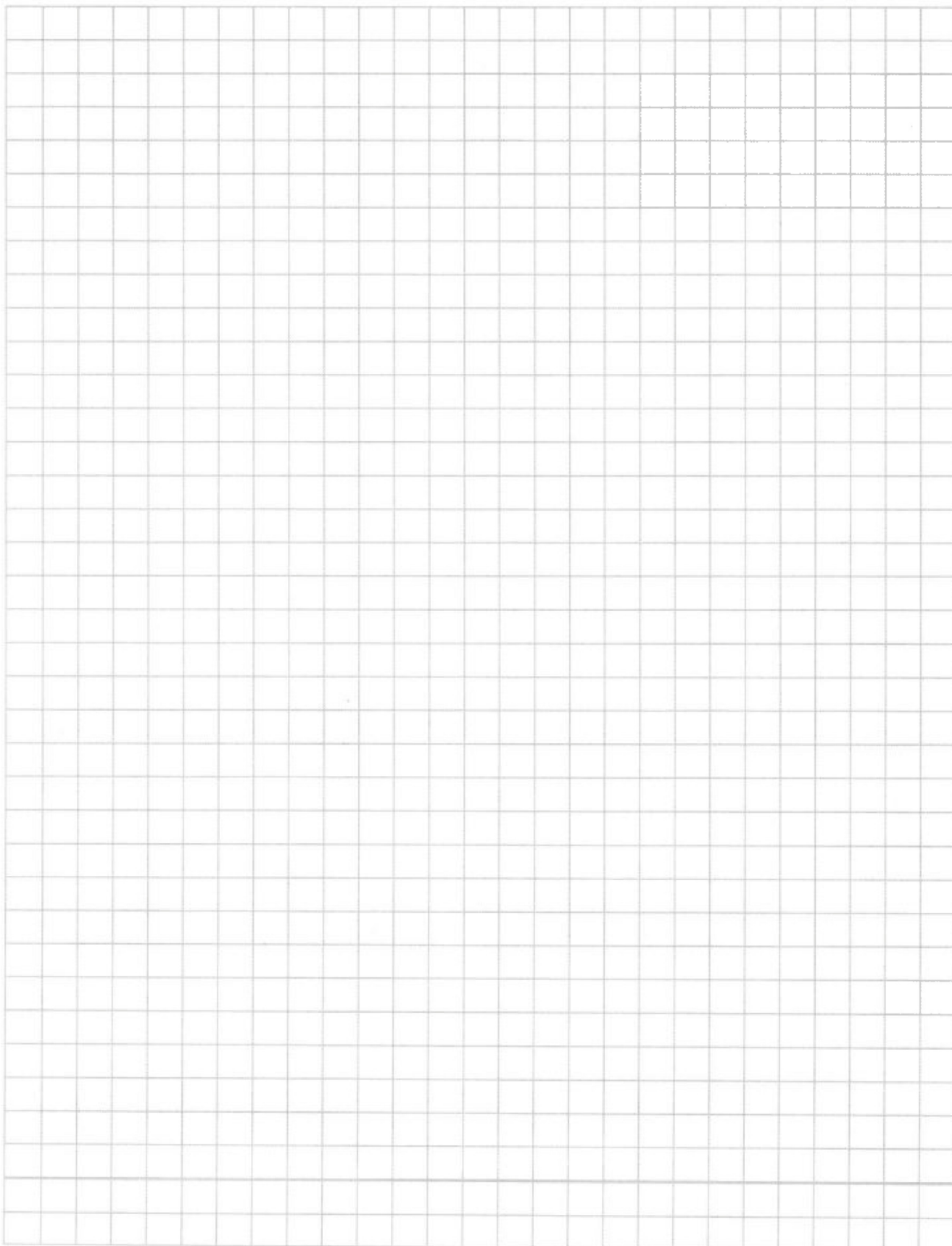
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2 \cdot \frac{2x^2}{x} + x(x+y) + \frac{(x+y)^2}{4} + y^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$X^2 + 8X + 16$$

$$C^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} C^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} C$$

$$C^3 - \frac{3}{2} C^2 + \frac{3}{4} C$$

$$C^3 - \frac{3}{2} C^2 + \frac{3}{4} C - \frac{1}{8}$$

$$C \cdot (4C^3 - 3)$$

$$C \cdot (2C^2 - 1) - 2C(1 - C^2)$$

$$2X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ = 0$$

$$\cos 3X = \cos X \cos 2X - \sin X \sin 2X$$

$$= \cos X (2\cos^2 X - 1) - 2\sin X \cos X$$

$$25/4 = 3X^2 + Z^2 + 2XZ$$

$$2 = Z^2 + 2X^2$$

$$|x-20| + 2|y-35| = \sqrt{225 - z^2}$$

$$z=0, y=35$$

$$2YZ + X^2 = 2XZ + Y^2$$

$$v^2 + 2v = 6$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = \sqrt{35 - 2x - x^2}$$

$$(x+7)(5-x)$$

$$ab - a + b = 6$$

$$a^2 + b^2 = 12 = 4ab - 2(a-b)$$

$$4C^3 - 3C + 6C - 6C^2 + 3 = p$$

$$4C^3 - 6C^2 + 3C + 3 = p, C \in [-1, 1]$$