



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть θ — величина угла θ , тогда

$$\begin{cases} \cos \theta = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \sqrt{(5x+6)(x-3)} \end{cases}$$

или $\cos \theta$ не зависит

$$\begin{cases} \theta^2 = \sqrt{x-3} \\ \theta^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \leq -\frac{6}{15} \\ x > 3 \end{cases}$$

$x=5$ — решение
ОДЗ:

Ответ: $x=5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x - 6 \cos^2 x + 3 + 6 \cos x = p$$

$$2 \cos^3 x - \cos x + 2 \cos^3 x - 2 \cos x - 6 \cos^2 x + 6 \cos x + 3 = p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

сведем по формуле

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

$$(2^{\frac{2}{3}} \cos x)^3 + 3 \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cos^2 x \cdot (-2^{-\frac{1}{3}}) + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cos x \cdot (-2^{-\frac{2}{3}}) - 2 + 2 + 3 = p$$

$$(2^{\frac{2}{3}} \cos x - 2^{-\frac{1}{3}})^3 = p - 5$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-2^{\frac{2}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} \cos x \leq 2^{\frac{2}{3}}$$

$$-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} \cos x - 2^{-\frac{1}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$(-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})^3 \leq p - 5 \leq (2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$p \in \left[(-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})^3 + 5, (2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})^3 + 5 \right] \quad \text{или } p \text{ равно } p$$

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{p-5} + 2^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}, \Rightarrow x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{p-5} + 2^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

↑ решение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

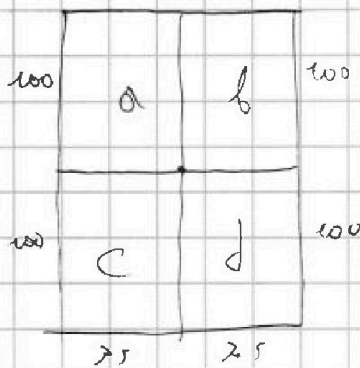
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача: В прямоугольнике со сторонами, равными 100, вписан квадрат.

Вопрос: Сколько существует способов выбрать 4 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата?



Вопрос: 1 точка, лежащая на стороне, может быть выбрана 1 из 3 способов (середина, концы сторон).

1) если угловые

2) ср. лев. тор.

3) ср. лев. верш.

4) во всех

Вопрос: можно ли выбрать 4 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата?

1) Если выбрать 4 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата, то можно выбрать 4 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата.

уже определены 4 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата.

из всех $2 \cdot 30000$ ч.м. можно выбрать C_{30000}^4

Вопрос: а) в четв. а. 4 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата.

$C_{7500}^4 \cdot 3$ — количество способов выбрать 4 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата.

б) в четв. а. 3 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата.

2. $C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 \cdot 2$ — количество способов выбрать 3 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата.

б) в четв. а. 3 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата.

$C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 \cdot 2$

2 в четв. а. 2 в четв. б.

$C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 \cdot 2 - C_{7500}^2$

каждый

Ответ: $3 \cdot C_{7500}^4 + 4 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 + 2 \cdot C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 + 56242499 \cdot C_{7500}^2$

количество способов выбрать 4 точки, лежащие на сторонах квадрата, так, чтобы они были вершинами нового квадрата.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

p - простое число

a, b, c - целые.

но у с.

$$(a-c) \cdot (b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \rightarrow a=b \text{ (так как } a>b \text{)}$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \rightarrow a-b=1-p^2, 1-p^2 < 0, \text{ т.к. } p \geq 2$$

(строим: $a < b$ строг. у с.)

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

$$1) p^2 = 3m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow p=3$$

$$\begin{cases} a-b=p^2-1 \\ a-b=3k+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=3k+1 \\ a-b=3k+2, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2) p^2 = 3k+2 \text{ так как } p \text{ не дел.}$$

$$p^2-2=3k$$

$$1) \begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=820 \end{cases}$$

$$b^2+b=812$$

$$b = \frac{-1 \pm 57}{2}$$

$$b = \frac{56}{2} = 28$$

$$\begin{cases} b=28, a=36, c=27 \\ b=-29, a=-21, c=-30 \end{cases}$$

$$b=-29, a=-21, c=-30$$

Answers: (36; 28; 27)

(-21; -29; -30)

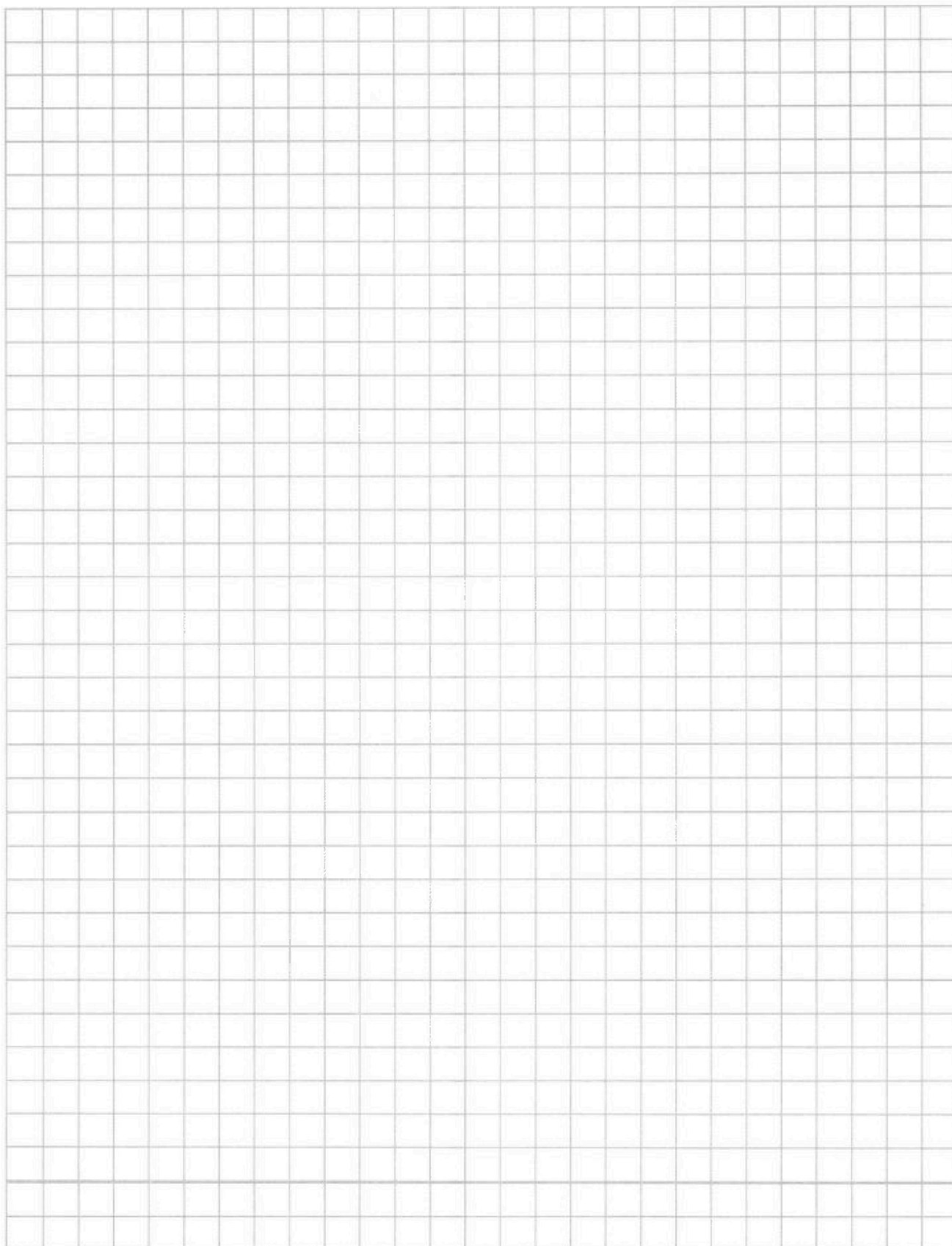


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cos^3 x - 6 \cos^2 x - \cos x + 3 + 4 \cos x + 2 \cos^2 x = p$$

$$2 \cos^3 x - 4 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$2 \cos^2 x (\cos x - 2) + 3 \cos (\cos x - 2) = p - 9$$

$$(2 \cos^2 x + 3) (\cos x - 2) = p - 9$$

$$a - b = 3k + r$$

$$a - c = b - c$$

$$a - b = 0$$

$$a - b = 79$$

$$1) \text{ либо } a - c = 1 \quad b - c = p^2$$

$$2) \text{ либо } b - c = 1 \quad a - c = p^2$$

$$1) 1 - p^2 = 3k + r \quad \text{невозм}$$

$$2) p^2 - 1 = 3k + r$$

$$p^2 = 3m$$

$$p = 3$$

$$p^2 = 3k + 2 = 3m - 1$$

$$a - c = 3k + 2$$

$$a - b = 3k - 1$$

$$\begin{cases} a - c = 2 \\ b - c = 1 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$$

$$b - c = 1$$

$$C^3 \cdot 3^8$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x + 5 \cos x - 3 \cos^2 x + 3 = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x + 6 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 = p$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -7$$

$$-15 \leq z \leq 19$$

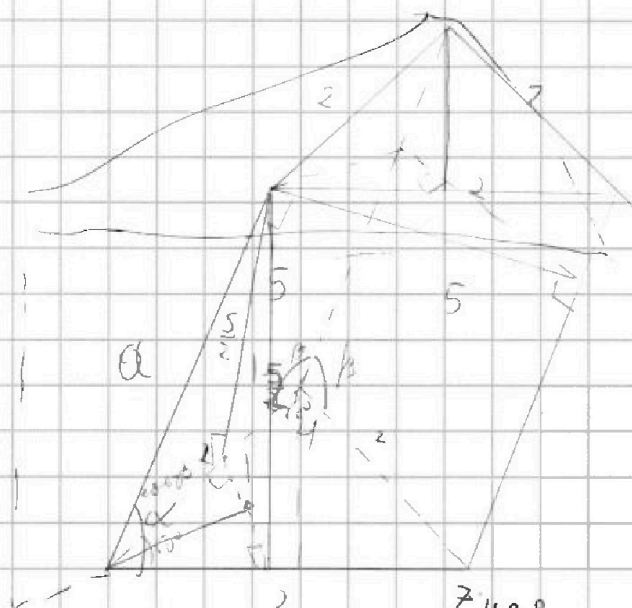
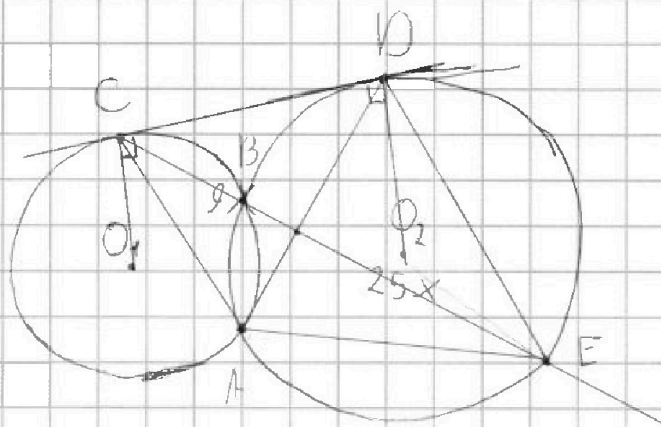


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

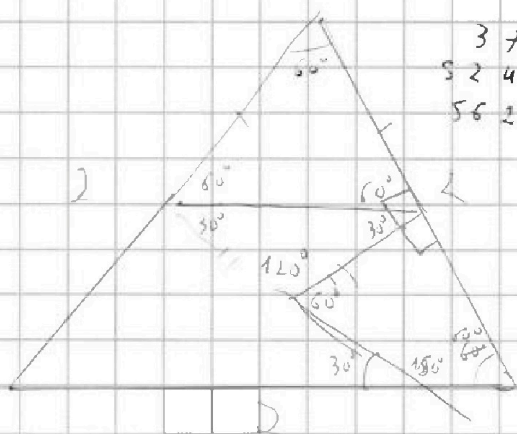
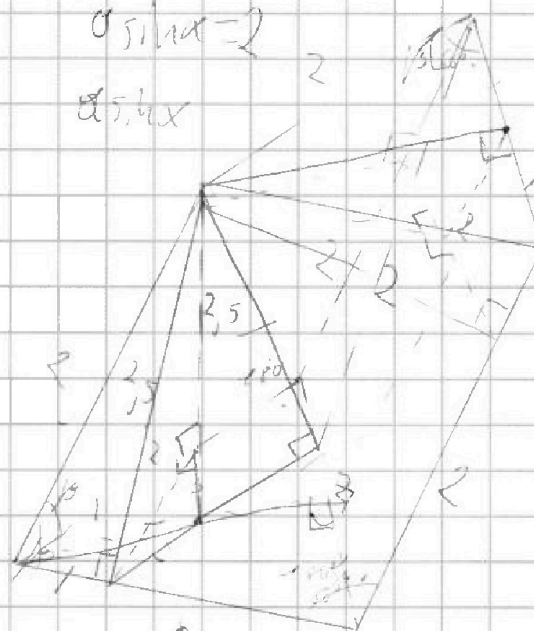
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sigma \sin \alpha = 2$$
$$\alpha 5,4x$$



$$\begin{array}{r} 7499 \\ 2500 \\ 37495 \\ 52493 \\ 56242500 \end{array}$$

$$\frac{2500!}{7499!} - 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b_1 q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \\ b_1 q^9 = x+4 \\ b_1 q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \end{cases}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{(15x+6) \cdot (x-3)^4}{(15x+6)}} = (x-3)^2$$

$$q = \pm (x-3)^{\frac{1}{4}}$$

$$\pm b_1 \cdot (x-3)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{15x+6} \cdot (x-3)^{-\frac{1}{4}}$$

$$b_1 = \sqrt{15x+6} \cdot (x-3)^{-\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{15x+6} \cdot (x-3)^{-1}$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{15x+6}(x-3)}{x+4} = \sqrt{(x-3)^3}$$

$$15x+6 = (x+4)^2$$

$$15x+6 = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = 5 \text{ или } x = 2$$

$$x = 2 \text{ — не подходит}$$

$$x = 5$$

$$\cos(2x) \cos x - \sin 2x \sin x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = 0$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x + 6 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cdot (\cos x - 3) - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) + 6 \cos x = 0$$

$$-2 \cos x (-2 - \cos^2 x)$$