



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

111

$$b_{10} = b \cdot q^9, \text{ где } b - \text{нач. член } q - \text{прогрессия}$$

$$b_{12} = b \cdot q^{11}; \quad b_{12} = b_{10} \cdot q^2 = 2 - x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^2$$

$$b_{18} = b \cdot q^{17}; \quad b_{18} = b_{10} \cdot q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^8$$

$$\begin{cases} 2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^2 \\ \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ (3x+2) \neq 0 \end{cases}$$

мен. или

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ (3x+2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -\frac{34}{25} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

мен. или

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ (3x+2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -\frac{34}{25} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -\frac{34}{25} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -\frac{34}{25} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -\frac{34}{25} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -\frac{34}{25} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(2-x)^2}{(25x+34)(3x+2)} = \frac{1}{(3x+2)} \quad A) \quad 3x+2 > 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{4-4x+x^2-25x-34}{(25x+34)(3x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2-29x-30}{(25x+34)(3x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{(x-30)(x+1)}{(25x+34)(3x+2)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=30 \rightarrow x \leq 2, \text{ не подходит} \\ x=-1 \rightarrow 3x+2 < 0, \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$B) \quad 3x+2 < 0 \rightarrow \frac{4-4x+x^2+25x+34}{(25x+34)(3x+2)} = 0 \rightarrow \frac{x^2+21x+38}{(25x+34)(3x+2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+19)(x+2)}{(25x+34)(3x+2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-19 \\ x=-2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

подставим $x = -19$

$$b_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-19) + 34)(3 \cdot (-19) + 2)} \quad b_{12} = 21 \quad b_{18} = \sqrt{\frac{25(-19) + 34}{(3 \cdot (-19) + 2)^3}}$$

$$b_{10} = \sqrt{45 \cdot 19^2 - 19 \cdot (50 + 102) + 68} \quad b_{12} = 21 \quad b_{18} = \sqrt{\frac{-441}{(-55)^3}}$$

$$b_{10} = \sqrt{19(19 \cdot 45 - 152) + 68} \quad b_{12} = 21 \quad b_{18} = \frac{21}{55 \cdot 55}$$

$$b_{10} = \sqrt{(-441) \cdot (-55)} = 21\sqrt{55}$$

$$b_{12} = b_{10} \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{\sqrt{55}} \quad b_{18} = b_{12} \cdot q^6 = b_{12} \cdot (q^2)^3 = \frac{21}{55 \cdot 55}$$

$x = -19$ подходит

подставим $x = -2$

$$b_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-2) + 34)(3 \cdot (-2) + 2)} \quad b_{12} = 4 \quad b_{18} = \sqrt{\frac{25(-2) + 34}{(3 \cdot (-2) + 2)^3}}$$

$$b_{10} = \sqrt{(-16) \cdot (-2)} \quad b_{12} = 4 \quad b_{18} = \sqrt{\frac{-16}{(-2)^3}}$$

$$b_{10} = 4\sqrt{2} \quad b_{12} = 4 \quad b_{18} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$$

$$b_{12} = b_{10} \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad b_{18} = b_{12} \cdot q^6 = b_{12} \cdot (q^2)^3 = \frac{4}{2\sqrt{2}}$$

$x = -2$ подходит

Ответ: $x = \{-2; -19\}$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 25 \\ \hline 225 \\ 25 \\ \hline 100 \\ \times 19 \\ \hline 57 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 45 \\ \hline 180 \\ 675 \\ \hline 1425 \\ - 152 \\ \hline 2643 \\ \times 19 \\ \hline 2454 \\ 243 \\ \hline 5084 \\ 68 \\ \hline 52555 \\ - 25 \\ \hline 295 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1050 \\ 1050 \end{array}$$

~~$$400 - 4 \cdot 38^2 = 4 \cdot [18,58] \rightarrow y \downarrow$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y \geq 18 \\ y \leq -2 \end{cases} \\ (3y-34)^2 + z^2 = 400 \Rightarrow 400 - (3y-34)^2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (0-34+34)(20+34-34) \geq 0 \\ (54-34)(34-14) \geq 0 \end{cases}$$

или или

$$\begin{cases} -2 < y < 18 \\ (y-38)^2 + z^2 = 400 \Rightarrow 400 - (y-38)^2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (20-y+38)(20+y-38) \geq 0 \\ (58-y)(y-18) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y \geq 18 \\ y \leq -2 \end{cases} \\ \frac{14}{3} \leq y \leq 18 \\ -2 < y < 18 \\ 18 \leq y \leq 58 \end{cases} \Rightarrow y = 18$$

- как реш

$$y = 18 \Rightarrow z = \sqrt{400 - 18^2} = \sqrt{(20-18)(20+18)} = \sqrt{2 \cdot 38} = \sqrt{76}$$

$$\Rightarrow 20 = \sqrt{400 - z^2} \Rightarrow z = 0$$

поиск в 1-е ун $y = 18; z = 0$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{20-3x-x^2} \Rightarrow -6 \leq x \leq 3$$

как отн. $-5 \leq x \leq 2$ левая часть мон. возр.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 \geq 8 - 8$$

макс правая часть при $x = -\frac{3}{2} \rightarrow \sqrt{4 \cdot \frac{9}{4} + \frac{9}{2} \cdot 4 + 20} =$

$$= \sqrt{9 + 18 + 20} = \sqrt{47}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{20-3x-x^2} \Rightarrow x+6+3-x+4 = 2\sqrt{20-3x-x^2}$$

$$x+6+3-x = 2\sqrt{20-3x-x^2} \Rightarrow -4x^2 - 18x + 40 + 49 = 28\sqrt{20-3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{x+3-x} \quad \text{ОДЗ: } -6 \leq x \leq 3, \text{ как}$$

этом отн. лев. часть мон. возр., $\sqrt{x+6} \uparrow$; $-\sqrt{3-x} \uparrow$; прав. часть

достиг макс при $x = -\frac{3}{2}$; при этом значение выражения равно 9

||



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 &= 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} \quad \text{при } y=18; z=0 \\ \sqrt{x+6} + 4 &= 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} + \sqrt{3-x} \Rightarrow \sqrt{x+6} + 4 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} + \sqrt{3-x} \\ &= 4(18-3x-x^2) + 3-x + 6 - 2\sqrt{x+6} - 2x\sqrt{x+6} \quad \text{заменим} \\ 4x^2 + 12x + 55 - 42 - 3 &= \sqrt{x+6}(-2x-8) \quad \text{---} \\ 4x^2 + 14x - 20 &= -2\sqrt{x+6}(x+4) \quad t = x+9 \\ \sqrt{t+4} - \sqrt{t+9} + 4 &= 2\sqrt{t+4}\sqrt{t+9} \\ \sqrt{t} - \sqrt{t+9} + 4 &= 2\sqrt{t}\sqrt{t+9} \\ t + t + 9 + 49 - 10\sqrt{t} - 14\sqrt{t+9} &= 2\sqrt{t}\sqrt{t+9} \\ 2t + 51 - 13\sqrt{t} - 13\sqrt{t+9} &= 4t(t+9) \\ 4t(t+9) - 2t - 51 + 13\sqrt{t} + 13\sqrt{t+9} &= 0 \\ -4t^2 - 34t + 51 - 13\sqrt{t} - 13\sqrt{t+9} &= 0 \end{aligned}$$

$x = -\frac{3}{2}$ единств и подл, т.к при $-\frac{3}{2}$ $2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x}$ достл. максимум, а $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4$ на отрезке $-6 \leq x \leq 3$ монотонно возраст.

$$x = -\frac{3}{2}; y = 18; z = 0$$

Ответ: $\{(-\frac{3}{2}; 18; 0)\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

43

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) = \cos x (2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 x - 2) =$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$p \cdot 4 \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 ; \text{ если данное уравнение имеет хотя бы 1 реал. корень, то мы имеем}$$

$$(\cos x + 1)^3 + (p-1) \cos^3 x = 0 ; \text{ пусть } t^3 = (p-1), \text{ тогда}$$

$$(\cos x + 1)^3 + t^3 \cos^3 x = 0 \Rightarrow (\cos x + 1 + t \cos x) \cdot (\cos^2 x + 2 \cos x +$$

$$t + 1 + t^2 \cos^2 x - t \cos^2 x - t \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x(t+1) = -1 & - \text{имеем реал. при } \left| -\frac{1}{t+1} \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (t^2 - t + 1) \cos^2 x + (2-t) \cos x + 1 = 0 & - \text{имеем реал. при } D \geq 0, \text{ и } D = 0 \rightarrow t^2 - t + 1 = 0 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \rightarrow -4 < 0, \text{ нел.} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+1 \geq 1 \\ t+1 \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 ; \cos x = -\frac{1}{t+1} \\ t \leq -2 ; \cos x = -\frac{1}{t+1} \end{cases}$$

$$4 + t^2 - 4t - 4t^2 + 4t - 4 \geq 0 \quad -3t^2 \geq 0 \rightarrow t = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq 1 \rightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ p \leq -4 \rightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{p-1} = 0 - \text{при } 2 \text{ реал. } \cos x = -1, \text{ но это не подходит } \sqrt[3]{p-1} \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \leq -4 \\ p \geq 0 \end{cases} ; \quad x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt[p]{p-1}+1} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\begin{cases} p \leq -4 \\ p \geq 0 \end{cases} ; \quad x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt[p]{p-1}+1} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

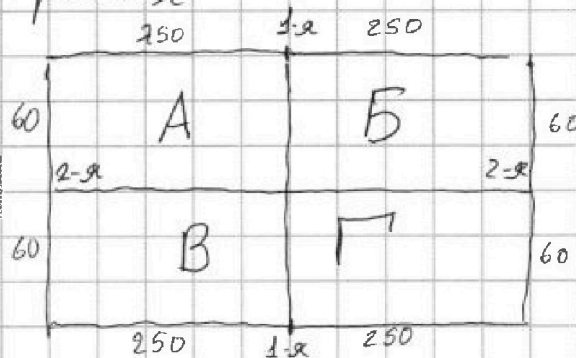
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

разобьем прямоугольник на 4 равных
частьях АБВГ

без ср. линий. назовем
ср. линии между АВ и ВГ
1-й, а ср. линии между
АБ и ВГ 2-й



симметрия относительно центра по

4 точки в ВГ однозначно задают 4 точки в АВ
(меньше 4-х точек в ВГ и больше 4-х не может быть, т.к. иначе
в АВ либо > 4 -х т. либо < 4 -х точек)

симметрия относительно 1-й ср. линии. 4 точки в АВ
однозначно задают 4 точки в ВГ, а наоборот
для 2-й ср. линии

если одновременно выполняются 2
симметрии, то по 2-м точкам в прями.

А однозначно задаются остальные точки

(если центр ^{ср. линий} совпадает с центром симм., тогда В и Б по
симм. относительно ср. линии; если ср. линия не
А $\rightarrow$ В $\rightarrow$ ВГ), точек в прями 1 однозначно, иначе

если $2n$, тогда точек n , но в Г точек n , $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ в ВБ $2n \Rightarrow$ всего $4n$ точек)

если выполняются все 3 симметрии, то
по одной точке в А однозн. зададутся 4 других,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

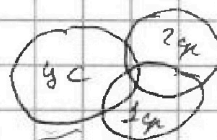
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при чем 1 из заданных машин будет в прием А $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ вар. 3 или $C_{\frac{1}{2}}$

Суммарное число вариантов



$$\sum_{40} = \sum_{1,2} + \sum_{1,3} + \sum_{2,3} - \sum_{1,2,3} - \sum_{1,2,3} - \sum_{1,2,3} + \sum_{1,2,3}$$

$$= C_4^{250 \cdot 60} + C_4^{500 \cdot 60} + C_4^{500 \cdot 60} - C_2^{250 \cdot 60} - C_2^{250 \cdot 60} - C_2^{250 \cdot 60} + \frac{C_2^{250 \cdot 60}}{2} =$$

$$= 3 \frac{(500 \cdot 60)!}{(500 \cdot 60 - 4)! \cdot 4!} - 3 \frac{250 \cdot 60!}{(250 \cdot 60 - 2)! \cdot 2!} + \frac{250 \cdot 60}{2} =$$

$$= 3 \frac{(500 \cdot 60)(500 \cdot 60 - 1)(500 \cdot 60 - 2)(500 \cdot 60 - 3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{250 \cdot 60(250 \cdot 60 - 1)}{2}$$

$$= 3 \frac{30000!}{29996! \cdot 4!} - 3 \frac{15000!}{14998! \cdot 2!} + 4500$$

Ответ: $\frac{3 \cdot 30000!}{29996! \cdot 4!} - \frac{3 \cdot 15000!}{14998! \cdot 2!} + 4500$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W6

$$a < b \quad b-a \neq 3 \quad (a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{нечет. число}$$

$$a^2 + b = 1000$$

если $(a-c)(b-c) = p^2 \rightarrow$

$$\begin{cases} a = 1+c \\ b = p^2+c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = p^2+c \\ b = 1+c \end{cases} \Rightarrow \text{невозм. } p^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b \neq 1000$$

$$\begin{cases} a = p+c \\ b = p+c \end{cases} \Rightarrow \text{невозм. } x < a < b$$

$$\Rightarrow a = 1+c, b = p^2+c$$

$$b-a = p^2-1 = (p-1)(p+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) \neq 3 \Rightarrow \begin{cases} p-1 \not\equiv 0 \pmod{3} \\ p+1 \not\equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \not\equiv 1 \pmod{3} \\ p \not\equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}; \text{ единств. простое число } \equiv 0 \pmod{3} - 3 \text{ или } 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1+c \\ b = 9+c \end{cases} \Rightarrow a^2 + b = 1000 \Leftrightarrow c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 1000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 + 3c - 990 = 0 \quad c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 990}}{2} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{4011}}{2} = \frac{-3 \pm 63}{2} \Rightarrow \begin{cases} c = 30 \\ c = -33 \end{cases}$$

$$c = 30 \rightarrow a = 31, b = 39, c = 30 \rightarrow a = 31, b = 39$$

$$\text{проверим } (31; 39; 30) \rightarrow a < b, b-a = 8; 1 \cdot 9 = 9 = 3^2;$$

$$31^2 + 39 = 961 + 39 = 1000$$

$$\text{проверим } (-32; -24; -33) \rightarrow a < b; b-a = 8; 1 \cdot 9 = 9 = 3^2;$$

$$32^2 - 24 = 1024 - 24 = 1000$$

$$\text{Ответ: } \{(31, 39, 30); (-32, -24, -33)\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(400 - 3y + 34)(20 + 3y - 34) \geq 0$$
$$(54 - 3y)(3y - 14) \geq 0 \quad D = 49 + 80 = 129$$

$$\sqrt{x+4.5} - \sqrt{4.5-x} + 4 = 2\sqrt{4.5-x}\sqrt{4.5+x} =$$
$$-3 \quad \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{3-x}\sqrt{x+6} \quad -\frac{4}{8} \quad -\frac{13}{8}$$

$$u = 2u \quad u - v + 4 = 2uv$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

$$4 = 2uv + u + v \quad 4t^2 + 34t +$$

$$4 = u(2v+1)$$

$$\frac{4-v}{2v-1} = u$$

$$\sqrt{x+6} + 4 = \sqrt{3-x}(\sqrt{x+6} + 2)$$

$$x+6+4g+14\sqrt{x+6} = 3-x(x+6+2\sqrt{x+6}+1)$$

$$x+6+4g+$$

$$\frac{4-v}{2v-1}$$

$$\frac{4 - \sqrt{3-x}}{2\sqrt{3-x}-1} = \sqrt{x+6}$$

$$x+6 = \frac{4g-3+x-14\sqrt{3-x}}{4 \cdot 12 - 4x + 1 - 4\sqrt{3-x}}$$

$$-\frac{5}{2}$$

$$\frac{12-5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{6+x}{2} = \frac{12+x}{2}$$

$$\sqrt{\frac{11}{2}} - 4 = \sqrt{\frac{44}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} =$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{15}{2}} + 4 = -\frac{9}{2}$$

$$\sqrt{15} - \sqrt{15} + 4 = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 4 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+6+3-x-2z+49-2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x-2z}+4\sqrt{x+6}-4\sqrt{3-x-2z}=4y-4x-4x^2+4z \\ y^2+4y+4+4y^2-4\cdot 18\cdot 2y+4\cdot 18^2=400-z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+12x-6z-4y+58-2\sqrt{3x-x^2-2zx+18-6x-12z}+4\sqrt{x+6}-4\sqrt{3-x-2z}=0 \\ 5y^2-4\cdot 35y+4+(6\cdot 18-20)(2\cdot 18+20)+z^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+12x-6z-4y+58-2\sqrt{-x^2-3x-2zx-12z+18}+4\sqrt{x+6}-4\sqrt{3-x-2z}=0 \\ 5y^2-4\cdot 5\cdot 4y+z^2+900=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 4 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ 5(y-14)^2 + z^2 = -900 \end{cases}$$

400+3y 4-4·18·2 x 36 4 144 x 14 36 980 224 456

(20-3y+34) 3 102/302 -140 5(y^2-4·8·2·14y+180)

(20+3y-34) 9/34 456·9

(y-14)/(54-3y) 204/3 456 y...

(y-14/3)(18-y) -140 20-y+32

y ∈ [14/3, 18] 46 20+y-38 (y-18)(58-y)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\cos x + 1 + t \cos x)(\cos^2 x + 2 \cos x + 1 + t \cos^2 x - t \cos^2 x - t \cos x) = 0$$

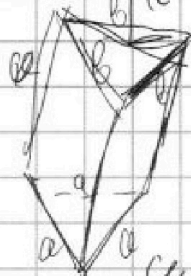
$$\cos x(t+1) = -1$$

$$(t^2 - t + 1)\cos^2 x + (t-t)\cos x + 1 = 0$$

$$\left[\cos x = -\frac{1}{t+1}, \text{ если реш } -1 \leq -\frac{1}{t+1} \leq 1 \right]$$

$$D \geq 0 \Rightarrow 4t^2 - 4t - 4t^2 + 4t - 4 \geq 0$$

$$-3t^2 \geq 0 \text{ только } t=0$$



$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^3 = 4$$

$$a^3 = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{16}{\sqrt{3}}}$$

и 5 разделим на 4

250

250

симметричная от центра
по 4 точки в A и B

одна из точек в B и Г

Симм. отн. центр. линии

одна из точек из AB задает БГ и наоборот из AB задает БГ

случаев, когда по симметрии от центра

что по одному 2-м точкам в B задается

все остальные

$$(a-c)(b-c) - \text{кв. число} = p^2$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \text{ кев } a < b$$

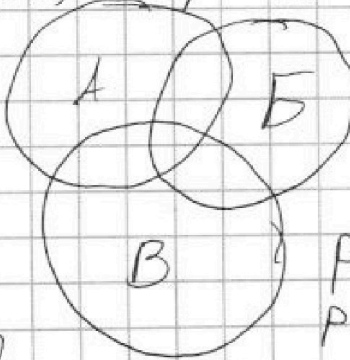
$$\times 500 \quad a-c=p^2 \times 250$$

$$\times 60 \quad b-c=1 \quad 75000$$

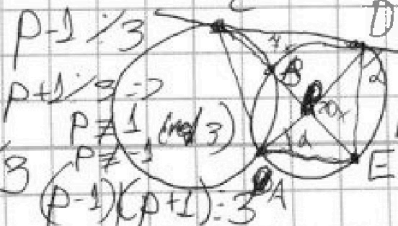
$$30000 \quad a-c=1$$

$$b-c=p$$

$$\begin{cases} a=1+c \\ b=9+c \\ b= \end{cases}$$



$$A+B+C - AB - AC - BC$$



$$b-a = p^2 - 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$(p-1)(p+1) = 3$$

$$b = 9+c$$

$$b = 1+c$$

$$b = p+c$$

$$a = 1+c$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 4 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

$$30000 - 29999 + 29998 - 29994 - 12 \cdot 14999 \cdot 1500$$

$$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$15000 \cdot 14999 (2 \cdot 29999 - 29994)$$

$$4500$$

$$x+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6$$

$$400-z^2 \geq 0 \Rightarrow -20 \leq z \leq 20$$

$$3-x-2z \geq 0 \Rightarrow x \leq 3-2z$$

$$2z \leq 3-x \quad x \geq -6 \Rightarrow 2z \leq 9, z \leq \frac{9}{2}$$

$$4500(29998 - 29999 + 29994 - 1)$$

$$(y+2)^2 + 4(y-18)^2 + 2|y+2||y-18| = 400-z^2$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 3x = (\cos 2x + \cos x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= \cos 2x \cdot \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) =$$

$$= \cos x (2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 x - 2) = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$p \cdot 4 \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$f(\cos x) = p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$f'(\cos x) = 3p \cos^2 x + 6 \cos x + 3 \quad D = 36 -$$

$$D > 0 \rightarrow \text{1 реал. корень, 2 комплекс.}$$

$$D < 0$$

$$= \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 + (p-1) \cos^3 x = 0$$

$$(\cos x + 1)^3 + (p-1) \cos^3 x = 0 \quad \text{пусть } \sqrt[3]{p-1} = t,$$