



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

^{N1}
Пусть первый член прогрессии - b , а знаменатель q , $b, q \neq 0$

$$\begin{cases} b_4 = bq^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} & (1) \\ b_{10} = bq^9 = x+4 & (2) \\ b_{12} = bq^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} & (3) \end{cases}$$

$bq > 0, \frac{15x+6}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \end{cases}$

(3) : (1) : $q^8 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)^4}{15x+6}} \Leftrightarrow q^8 = \sqrt{(x-3)^4} \Leftrightarrow q = \pm \sqrt[4]{x-3}$

~~(1) $bq^3 = \pm b \sqrt[4]{x-3}^3$ Если $q = \sqrt[4]{x-3}$~~

(1) : $bq^3 = b \sqrt[4]{x-3}^3 = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^3}{(x-3)^3}} \Leftrightarrow b = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{(x-3)^5}}$

(2) : $bq^9 = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{(x-3)^5}} \cdot \sqrt[4]{x-3}^9 = \sqrt{15x+6} = x+4$

Если $q = -\sqrt[4]{x-3}$

(1) : $bq^3 = -b \sqrt[4]{x-3}^3 = -\sqrt[4]{\frac{(15x+6)^3}{(x-3)^3}} \Leftrightarrow b = -\sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{(x-3)^5}}$

(2) : $bq^9 = -\sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{(x-3)^5}} \cdot (-\sqrt[4]{x-3}^9) = \sqrt{15x+6} = x+4$

$\sqrt{15x+6} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 15x+6 = x^2+8x+16 \\ x+4 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < -\frac{2}{5} \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5} > x \geq -4 \\ x^2+23x+22=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5} > x \geq -4 \\ (x-1)(x-22)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1 \\ x=22 \end{cases} \Rightarrow x = \emptyset$

$\begin{cases} x > 3 \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-2)(x-5)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 3 \\ x=2 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow x = 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = 5$$

$$b = \sqrt[4]{\frac{81^2}{29}}$$

$$q = \sqrt[4]{2}$$

Пример ком. процесса и x

Ответ: при $x = 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$12 - 2t = 4t^2 + 36 - 24t \Rightarrow 4t^2 - 22t + 24 = 0$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 8 \cdot 12 = 121 - 96 = 25 = 5^2$$

$$t = \frac{11+5}{4} = 4$$

$$t = \frac{11-5}{4} = 1.5$$

Обратная замена:

$$\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4$$

$$\sqrt{(x+7)(5-x)} = 2.25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 35 - 2x + x^2 = 16 \\ 140 - 8x + 4x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 20 \\ 4x^2 - 8x + 4 = 135 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 20 \\ 4x^2 - 8x + 4 = 135 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 20 \\ 4x^2 - 8x + 4 = 135 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = (2\sqrt{5})^2 \\ 4(x-1)^2 = (3\sqrt{15})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \pm 2\sqrt{5} \\ x = -1 \pm \frac{3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

б) Во время решения был переход к следствию, мы возвели в квадрат, не проверив, что обе части ~~не~~ одного знака, а также потеряли огранич. на корень:

$$5 \geq x \geq -7$$

$$(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}) \cdot (2\sqrt{x+7}(5-x) - 6) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x}) \cdot (\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x}) \cdot (2\sqrt{x+7}(5-x) - 6) \geq 0$$

$$x+7 - 5+x = 2x+2$$

$$5 \geq -1 + 2\sqrt{5} \geq -7 \Rightarrow 6 \geq 2\sqrt{5} \geq -6 \Rightarrow 3 \geq \sqrt{5} \text{ - не подходит}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} - 1 \geq 5 \text{ - корень не подходит}$$

корень подходит

$$-1 - 2\sqrt{5} \geq -7 \Rightarrow 6 \geq 2\sqrt{5} \Rightarrow 3 \geq \sqrt{5} \text{ - корень подходит}$$

$$-1 + \frac{3\sqrt{15}}{2} \leq 5 \Rightarrow 3\sqrt{15} \leq 12 \sqrt{\frac{15}{3}} \text{ - корень подходит}$$

$$-1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} \geq -7 \Rightarrow 6 \geq \frac{3\sqrt{15}}{2} \Rightarrow 12 \geq 3\sqrt{15} \text{ - корень подходит}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) Рассмотрим второе ур-ние системы

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$225-z^2 \geq 0 \Leftrightarrow 225 \geq z^2 \Leftrightarrow 15 \geq z \geq -15 \Leftrightarrow \sqrt{225-z^2} \leq 15$$

$$1) y > 35: \begin{cases} y-20+2y-70 = \sqrt{225-z^2} \leq 15 \\ 3y-90 \leq 15 \Rightarrow 3y \leq 105 \Rightarrow y \leq 35 \end{cases} \Rightarrow y = \emptyset$$

$$2) y < 20: \begin{cases} 20-y+40-2y = \sqrt{225-z^2} \leq 15 \\ 90-3y \leq 15 \Rightarrow 45 \leq 3y \Rightarrow y \geq 15 \end{cases} \Rightarrow y = \emptyset$$

$$3) 35 \geq y \geq 20: \begin{cases} -20-y+2y-70 = \sqrt{225-z^2} \leq 15 \\ y-50 \leq 15 \\ y-20-2y+40 = \sqrt{225-z^2} \leq 15 \\ -y+50 \leq 15 \Rightarrow 35 \leq y \end{cases} \Rightarrow y = 35$$

Решение y системы может быть только при $y = 35$.

$$|35-20| + 2|35-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$15+0 = \sqrt{225-z^2} \Leftrightarrow 225 = 225-z^2 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$\begin{cases} y = 35 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 35 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+4)(5-x)} \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+4)(5-x)}, \quad 5 \geq x \geq -4$$

$$\text{Пусть } a = \sqrt{x+4}; b = \sqrt{5-x}:$$

$$\begin{cases} a-b+6 = 2ab \\ a^2+b^2 = x+4+5-x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = b(2a+1) \\ a^2+b^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a-b &= b(2a+1) \\ a^2+b^2 &= 9 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{(x+4)(5-x)} - 6$$

Переход к следствию - проверка корней

$$\begin{aligned} x+4+5-x &= 2\sqrt{(x+4)(5-x)} - 6 \\ 9 &= 4\sqrt{(x+4)(5-x)} - 6 \end{aligned}$$

$$\text{Замечка: } t = \sqrt{(x+4)(5-x)} > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка знака:

$$(\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x})(2\sqrt{(x+4)(5-x)} - 6) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x}) \underbrace{(\sqrt{x+4} + \sqrt{5-x})}_{>0} (2\sqrt{(x+4)(5-x)} - 6) \geq 0$$

$$(2x+2)(2\sqrt{(x+4)(5-x)} - 6) \geq 0$$

$$(x+1)(\sqrt{(x+4)(5-x)} - 3) \geq 0$$

$$\cdot x = -1 + 2\sqrt{5} : (x+2\sqrt{5}+1)(4-3) \geq 0 \text{ - корни подходят}$$

$$\cdot x = -1 - 2\sqrt{5} : (x+2\sqrt{5}+1)(4-3) < 0 \text{ - корни не подходят}$$

$$\cdot x = -1 + \frac{3\sqrt{15}}{2} : (x+1)(1,5-3) < 0 \text{ - корни не подходят}$$

$$\cdot x = -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} : (x+1)(1,5-3) \geq 0 \text{ - корни подходят}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{5} \\ x = -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{5} \\ y = 35 \\ z = 0 \\ x = -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} \\ y = 35 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1+2\sqrt{5}; 35; 0); (-1-\frac{3\sqrt{15}}{2}; 35; 0)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3) = p - 3$$

Замена: $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$

$$\frac{4t^3 - 6t^2 + 3t}{f(t)} = p - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(2t - 1)^2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \Big| \Big| \left[\frac{-1}{-1} \mid \frac{1}{1} \right]$$

$$-4 - 6 - 3 = f(t) \leq 4 - 6 + 3$$

$$-13 \leq f(t) \leq 1$$

$$p = f(t) + 3 \Leftrightarrow -10 \leq p \leq 4$$

В силу непрерывности $f(t)$ и $\cos x$ при любом p будет решение в x .
из промежутка $[-10; 4]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

не 4, а 5!

двое три

1) Заметим, что если раскраска обладает одной из двух указанных симметрий, то она обладает всеми тремя

2) Кол-во подходящих раскрасок: Кол-во раскрасок с одной осевой симметрией + кол-во раскрасок с другой осевой симметрией + кол-во раскрасок с центральной симметрией - 2 · кол-во раскрасок с тремя симметриями

3) Чтобы получить кол-во раскрасок с осевой симметрией нужно из половины прямоугольника выбрать 4 клетки:

$$C_{15 \cdot 20}^4 + C_{10 \cdot 15}^4$$

4) Чтобы получить раскраску с осевой симметрией

центральной

каждой из осей и из четвертой которая при этом не является четвертой осевой нужно либо выбрать 1 или 2 четверти и тогда взять 4 клетки либо в одной из них взять одну, а в другой три, либо взять по 2 не симметрично:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot C_{15 \cdot 10}^4 + 2 \cdot C_{15 \cdot 10}^1 \cdot C_{15 \cdot 10}^3 + C_{15 \cdot 10}^2 \cdot (C_{15 \cdot 10}^2 - 1) = \\ & \frac{2 \cdot 1500 \cdot 7429 \cdot 4428 \cdot 4428}{4!} + 2 \cdot \frac{1500 \cdot 7429 \cdot 4428 \cdot 4428}{3!} + \frac{1500 \cdot 7429}{2} \cdot \left(\frac{1500 \cdot 7429}{2} - 1 \right) = \\ & = 2 \cdot \frac{1500 \cdot 7429}{2} - 1 = 1500 \cdot 7429 \left(\frac{3849 \cdot 7429}{12 \cdot 62} + \frac{7428 \cdot 1500}{3} + \frac{7500 \cdot 7429}{4} - 2 \right) = \\ & = 1500 \cdot 7429 (4809325 + 25(7428 + 75 \cdot 7429)) = \\ & = 1500 \cdot 7429 (4809325 + 25(76 \cdot 7429 - 1)) = \\ & = 1500 \cdot 7429 (4809325 + 25(76 \cdot 7500 - 77)) = 1500 \cdot 7429 \cdot 4949900 \end{aligned}$$

Ответ: $C_{15 \cdot 20}^4 + C_{10 \cdot 15}^4 + 1500 \cdot 7429 \cdot 4949900$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$1) a + b^2 = 820$$

$$\cdot \text{Если } b \div 3, \text{ то } a \equiv 820 \equiv 2$$

$$\cdot \text{Если } b \nmid 3, \text{ то } b^2 \equiv 1 \Rightarrow a \equiv 819 \equiv 0$$

$$\text{либо } a \div 3, \text{ либо } b \div 3, \text{ а } a = 2m + 2 \Rightarrow \text{условие из задачи}$$

$$2) (a-c)(b-c) = ab - c(a+b) + c^2$$

$$a \in \mathbb{Z}, b = 3k + m$$

$$a \equiv 819$$

$$(a-c)(b-c) = k^2, \text{ и простое, тогда:}$$

$a-c$	$b-c$
1	k^2
-1	$-k^2$
k^2	1
$-k^2$	-1
k	k
$-k$	$-k$

$$\text{Если } a-c = b-c \Rightarrow a = b$$

$$a = 820 - b^2$$

$$820 - b^2 = b$$

$$b^2 - b + 820 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 820 = 1 + 3680 = 3681 = 60.675 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$$

$$a - c \neq b - c$$

$$b^2 < 820 \Rightarrow b < 28.6$$

$$a > b =$$

$$a - c = 1$$

$$820 - b^2 = c + 1$$

$$b^2 = -c + 819$$

$$k^2 = b - c = b^2 + b + 819$$

$$a - c = -1$$

$$820 - b^2 = c - 1$$

$$b^2 = 821 - c$$

$$k^2 = b - c = b^2 - b - 821$$

$$b - c = 1$$

$$c = b - 1$$

$$a - c = k^2$$

$$820 - b^2 + 1 - b = k^2$$

$$821 - b^2 - b = k^2$$

$$|821 - b^2 - b|$$

$$b \leq 28$$

$$b - c = -1$$

$$-c = b - 1$$

$$a - c = k^2$$

$$820 - b^2 - b - 1 = k^2$$

$$819 - b^2 - b = k^2$$

$$|819 - b^2 - b| = k^2, \text{ простое, число}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

переведем



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_1 T^2 = 4^2 + C_1 K^2 = \frac{C_1^2}{4} + C_1 \cdot 4^2 = 25$$

$$K_1 K = C_1 C \text{ т.е. } C_1 K_1 = KC, C_1 K_1 \parallel KC \Rightarrow C_1 C = 4$$

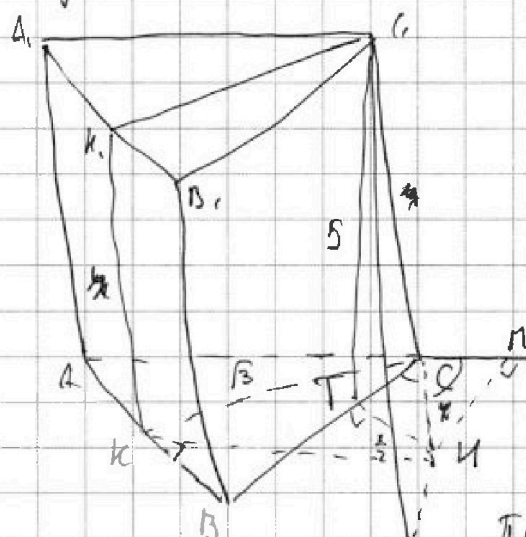
$$B_2 C_1 K: C_1 C^2 = C_1 K^2 + KC^2 = 16$$

$$\frac{3}{4} C_1 K^2 = -9 \text{ — противоречие } \Rightarrow$$

$\Rightarrow K$ и K_1 между AC и CB .

В силу симметрии нам ~~это~~ не важно ~~за~~ ~~фрагмент~~ между AC и продолжением BC или наоборот.

Пусть K лежит между BC и продолжением AC .



$$\text{Аналогично } C_1 T = C_1 M = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow TK = MK \Rightarrow K \in \text{биссектрисе } \angle TCM$$

$$KK_1 \perp C(ABD): KK_1 \perp AB$$

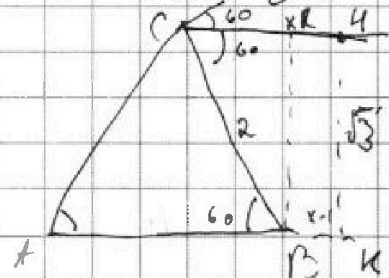
$$KK_1 \perp C(ABD): KK_1 \perp AB$$

$$\text{Пусть } CK = x =$$

$$\Rightarrow TK = x/2; \angle CKK_1 = 90^\circ \text{ (биссектриса прямого угла)}$$

$$KK_1^2 = 3 + x^2, C_1 T^2 = C_1 K^2 + \frac{x^2}{4} = 25$$

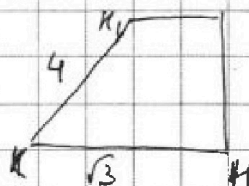
$$\angle CAB = 60^\circ \Rightarrow B(ABC):$$



$$CK = CB \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow CK = BK = x - 1$$

$$BK = CK = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$B(KK_1, C, 4):$$



$$16 = C_1 K^2 + (KK_1 - K_1 T)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

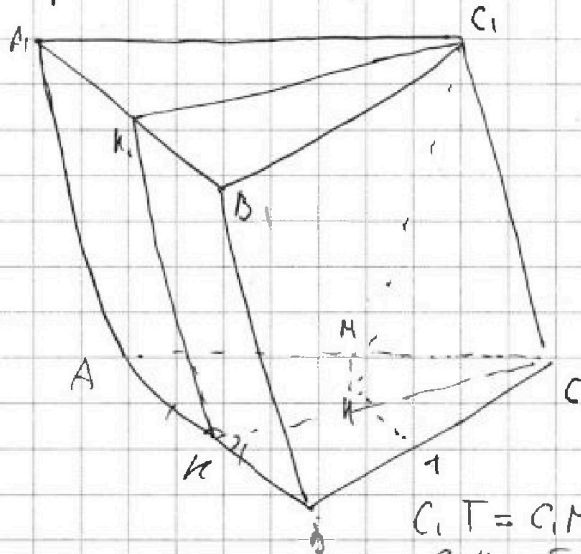
СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ - данная призма, $ABC \parallel A_1B_1C_1$; $S_{ABCA_1} = 4$;
 $S_{BCCA_1} = S_{ACCA_1} = 5$

Рассмотрим высоту призмы, опущенную из вершины C_1 : $C_1K \perp ABC$



Пусть H лежит между AC и BC .
Проведем $h(ABC)$: $HM \perp AC$ и $HT \perp BC$. По т.о 3^й перпенд.

$C_1M \perp AC$ и $C_1T \perp BC$

$$S_{BCCA_1} = AC \cdot C_1M = 5 \Rightarrow$$

(Площадь = осн. · высота)

$$\Rightarrow C_1M = 5 : 2 = 2.5$$

$$S_{ACCA_1} = BC \cdot C_1T \Rightarrow C_1T = 2.5$$

$$C_1T = C_1M$$

C_1K - общ.

$$C_1K \perp (ABC) \Rightarrow \angle C_1KT = 90^\circ = \angle C_1KM \Rightarrow \Delta C_1KM = \Delta C_1KT \Rightarrow MK = MT$$

$$MK = MT$$

$HM \perp AC$
 $HT \perp BC$ $\Rightarrow H$ - точка, которой принадлежит бисс-са $\angle ACB$. Пусть $SK, K \in AB$;
 SK - бисс-са $\angle ACB$: $K \in SK$

~~Случай 1: K лежит за точкой C~~

Заметим, что $AC = BC$
 SK - бисс-са $\Rightarrow SK \perp AB$

В (A, B, C_1) проведем $C_1K \parallel SK \Rightarrow C_1K \perp AB$
 $C_1K \perp AB$ т.к. $SK \perp AB$ и $C_1K \parallel SK$

$$\Rightarrow KH \perp AB \Rightarrow KH \cdot AB = S_{\Delta ABC} = 4 \Rightarrow KH = 2$$

~~Случай 1: K лежит за точкой C~~

$$\text{В } \Delta C_1KT: KT = C_1K \cdot \sin 90^\circ: MT = \frac{C_1K}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D(ABC): \cancel{4x^2 + 4} + (x-1)^2 + 2(x-1) \cdot \cancel{4} \quad KC^2 = x^2 + 3$$

Пусть $(C, H): y:$

$$25 = y^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$16 = y^2 + (\sqrt{3} - (x-1) - (x-1) - 4)^2 \quad (x^2 + 3)$$

$$2 + (\sqrt{3} - (x-1) - (x-1) - 4)^2 = \frac{x^2}{4}$$

$$\begin{cases} 25 = y^2 + \frac{x^2}{4} \\ 16 = x^2 + y^2 + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$16 = y^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{x^2 + 3})^2$$

$$2 - \frac{x^2}{4} = 3 + x^2 + 3 - 2\sqrt{3x^2 + 9}$$

$$3 - \frac{x^2}{4} = x^2 - 2\sqrt{3x^2 + 9}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 9} = \frac{3x^2}{4} - 3 = 3\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{3x^2 + 9} = \frac{3x^2}{16} - \frac{x^2}{2} + 1 \quad | \cdot 16 \cdot 9$$

$$64(3x^2 + 9) = 9x^4 - 72x^2 + 16$$

$$9x^4 - 264x^2 - 575 = 0$$

$$x^2 = \frac{264 \pm \sqrt{2434}}{18} = \frac{44 \pm \sqrt{2434}}{3}$$

$$CH - y = \sqrt{25 - \left(\frac{44 \pm \sqrt{2434}}{12}\right)^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 = 4^2(5-x)(x+4) - 22 \sqrt{(x+4)(5-x)} \rightarrow 39$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 12 \cdot 2 = 25 = 5^2$$

$$t = \frac{11 \pm 5}{4} = 4$$

$$t = \frac{11 - 5}{4} = 1,5$$

$$(x+4)(5-x) = 16$$

$$(x+4)(5-x) = 2,25$$

$$35 - 2x - x^2 = 16$$

$$140 - 8x - 4y^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 35 - 15 = 20 \\ 4x^2 + 8x + 4 = 140 - 9 + 4 = 135 \end{cases}$$

$$4x^2 + 8x + 4 = 140 - 9 + 4 = 135$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 3(2 \cos^2 x - 1) + p$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$4t^3 + 3t = 6t^2 - 3 + p$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ -29 \\ \hline 261 \\ -58 \\ \hline 841 \end{array}$$

$$a+b^2=820$$

$$a > b > c \quad 28 \geq 6 \geq 3$$

$$c > a > b$$

$$6^2 \approx 1$$

$$a:3$$

$$b:3$$

$$a = 820 - b^2 = 820 - 2$$

$$a = 3k + 1, b = 3m$$

$$a = 34, b = 3m + 1, 2$$

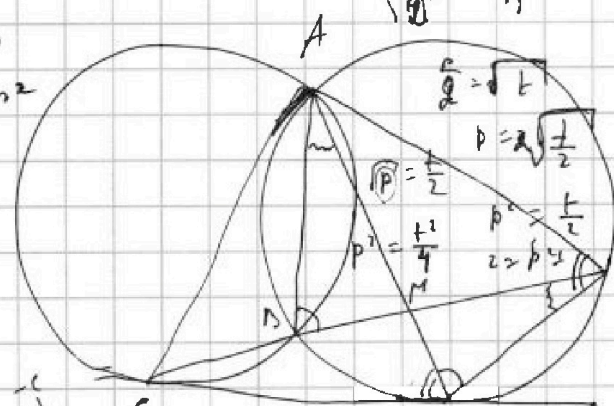
$$a:3 : b:3 = 820 - 3k : 3$$

$$a:3 \rightarrow b:3 \rightarrow 6^2 = 820 - 3k : 3$$

b	b^2	820 - b^2 = a
0	0	820
1	1	819
2	4	816
3	9	811
4	16	804
5	25	795
6	36	784
7	49	771
8	64	756
9	81	739
10	100	720

$$b = 3m$$

$$a = 820 - 9m^2$$



$$(820 - 9m^2)(3m - c) = k^2$$

$$\begin{array}{r} k^2 \\ -k^2 \\ \hline 1 \\ -1 \\ \hline -k^2 \\ -1 \end{array}$$

$$820 - 9m^2 = 3m - c$$

$$820 + c = 9m^2 + 3m = b^2 + 6$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 820 \cdot c}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3280c}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

1) $C_{75 \cdot 200}^4 + C_{100 \cdot 150}^4$ — по осевой симметрии

2) $2 \cdot C_{75 \cdot 100}^4 + 2 \cdot C_{75 \cdot 100}^3 = C_{75 \cdot 100}^3 + C_{75 \cdot 100}^2 (C_{75 \cdot 100}^2 - 1)$

$= 2500 + 482 \cdot 484200$ — ответ

Степень: $C_{75 \cdot 200}^4 + C_{100 \cdot 150}^4 = 2500 + 482 \cdot$

$= 484200$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

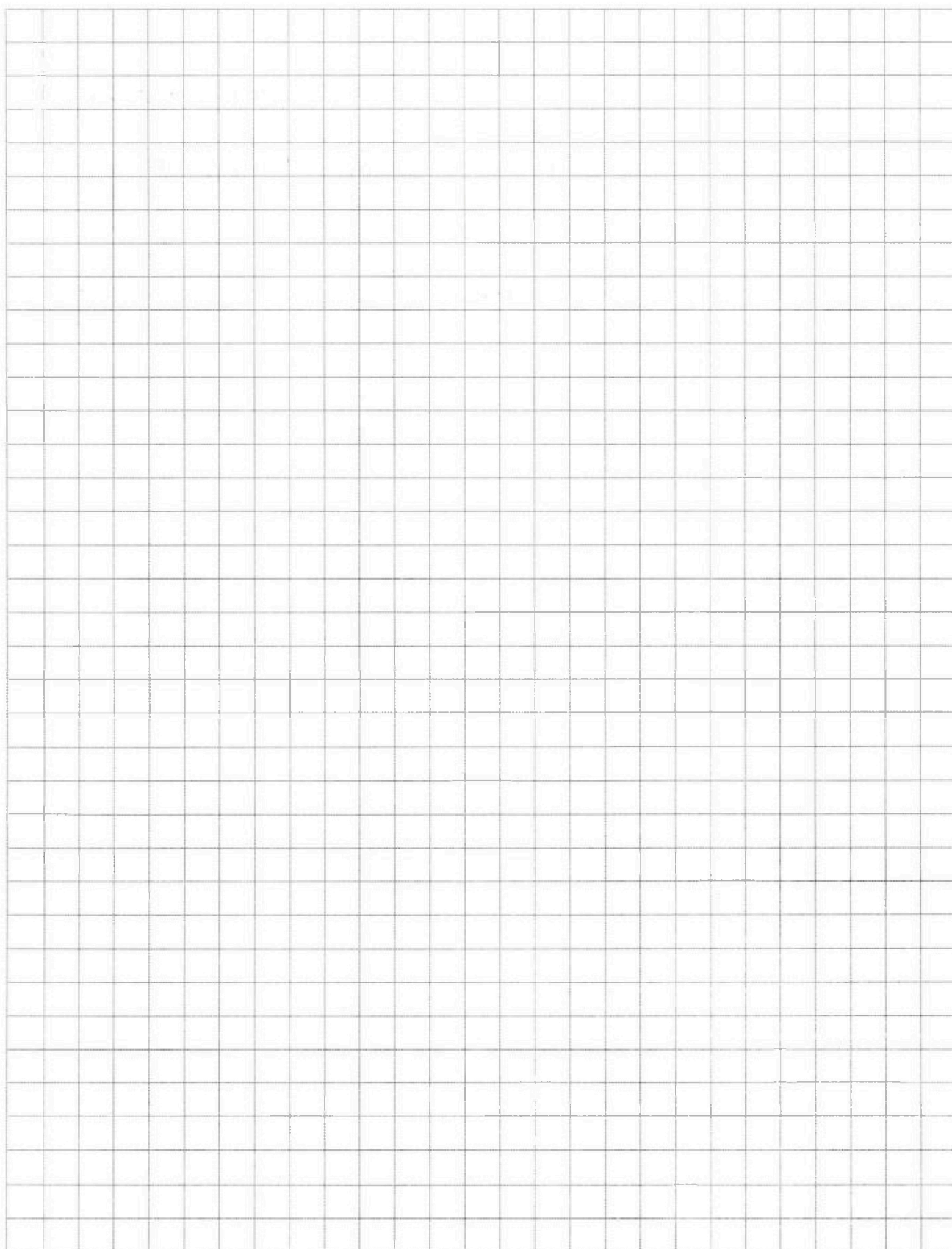
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





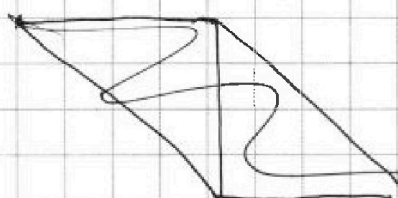
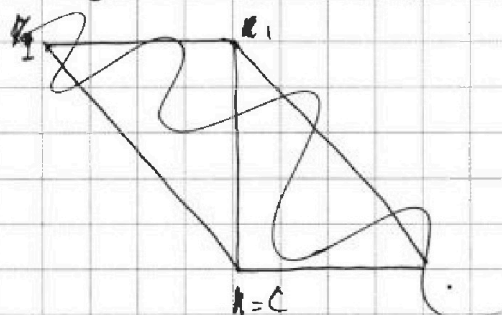
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

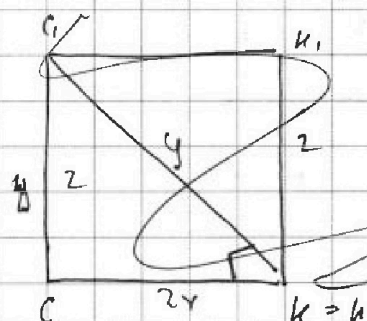
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Случай 4: $k = k$



$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 43 \\ \hline 139 \\ \times 172 \\ \hline 859 \\ + 575 \\ \hline 2434 \end{array}$$



$$y = y^2 + 2x^2$$

$$\begin{array}{r} b^2 + b \\ - \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$a - c = k^2$$

$$b - c = k^2, \quad c = b - 1$$

$$a = k^2 + c$$

$$k^2 + c + b^2 = 820$$

$$k^2 + b - 1 + b^2 = 820$$

$$k^2 = 820 - b - b^2$$

$$-2 - 21$$

$$821$$

$$b = 3$$

$$b = 3$$

$$a = 3$$

$$b^2 = 3k + 1 \times$$

$$b = 3k + 2$$

$$b = 34$$

$$\begin{aligned} D &= 264^2 + 4 \cdot 2.575 = \\ &= (132^2 + 2.575) \cdot 4 = \\ &= (432^2 + 575) \cdot 36 = 2434 \cdot 36 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☒

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper:

Top Left: A 3D cube diagram with dimensions 56, 23, 00, 4. Below it, a calculation: $2405 \cdot 5 = 12025$, 1809325 , 4949900 .

Top Center: A vertical addition: 76 , 125 , 380 , 532 , 5408 , 77 , 5623 .

Top Right: A geometric diagram showing a triangle with internal angles marked with arcs and labeled x , y , z . Below it, the formula $x + y + z = 2a$.

Middle Right: A Venn diagram with three overlapping circles labeled x , y , and z . The regions are labeled with numbers: 0, 9, 0, 0.

Bottom Left: A rectangle with dimensions 100 and 75. Below it, a calculation: 3840 , 2499 , 2500 .

Bottom Center: A large calculation: $384900 \cdot 4 = 1539600$, 9622500 , 3850 , 9618650 , 2 , 4809325 .

Bottom Right: A formula: $C^8_{100} + C^8_{75 \cdot 100} + C^8_{75 \cdot 100} \cdot 2 - C^2_{75 \cdot 100} \cdot 2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

b	b ²	-821 + b ² + b	-819 + b ² + b	b ² - b	a	c
0	0			0		
1	1			2		
2	4					
3	9					
4	16					
5	25					
6	36					
7	49					
8	64					
9	81					
10	100					
11	121					
12	144					
13	169					
14	196					
15	225					
16	256					
17	289					
18	324					
19	361					
20	400					
21	441					
22	484					
23	529					
24	576					
25	625					
26	676					
27	729					
28	784					

$b^2 + b : 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

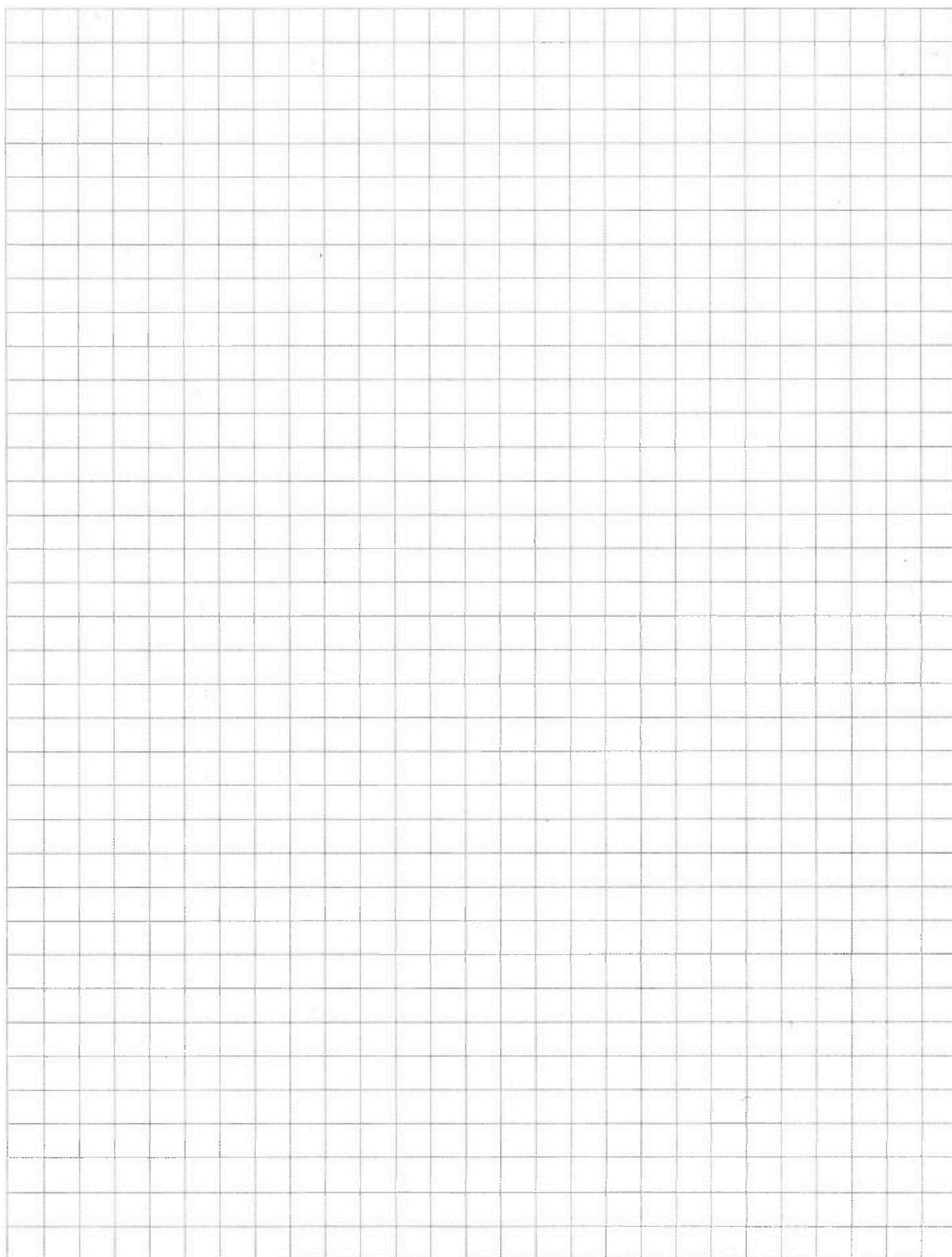
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

5
☒

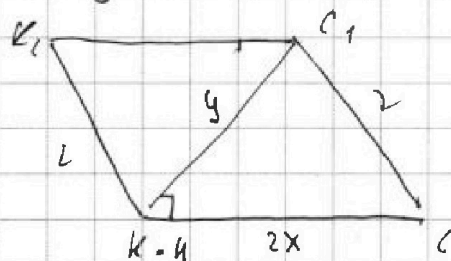
6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

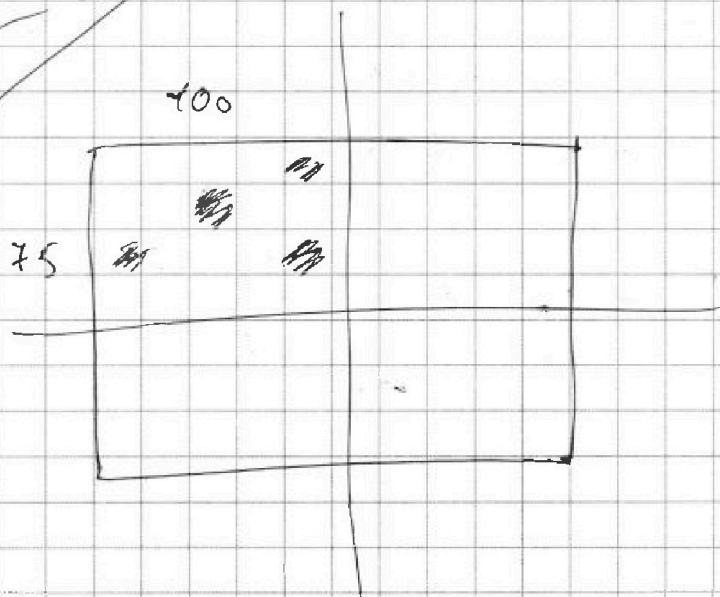
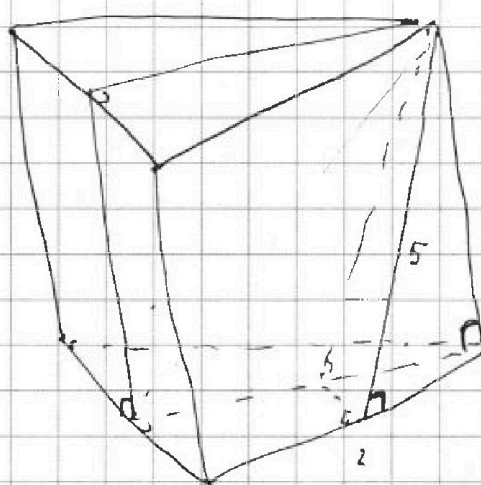
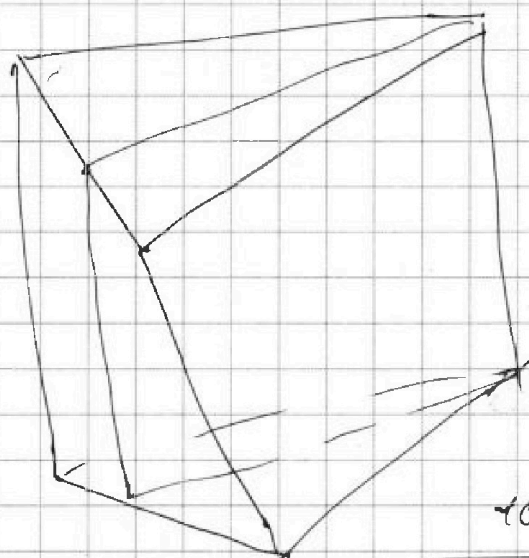
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Случай 4: $k = 1$



$$\begin{aligned} y^2 + 4x^2 &= 2^2 \\ 2,5^2 &= y^2 + x^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3x^2 &= 2^2 - 2,5^2 < 0 \\ &\Rightarrow \text{нет решений} \end{aligned}$$

Случай



$$C_4^{75 \cdot 100} \cdot 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

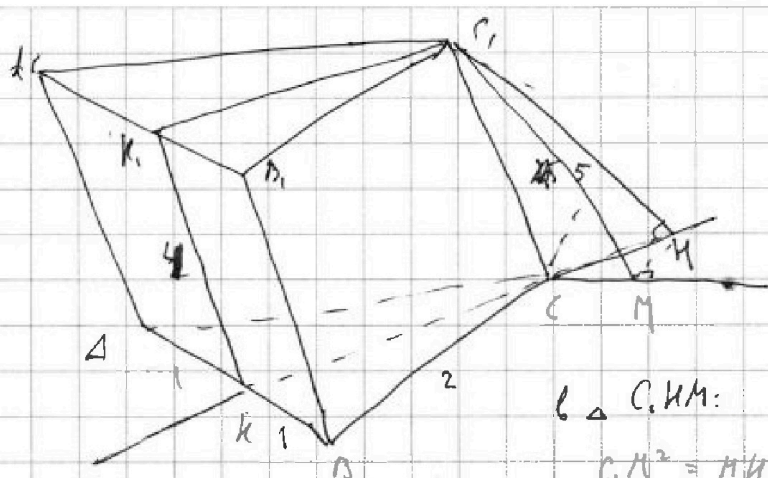
5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CK_1 = CK_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

(вне зависимости от случая)

$$CM = CK \cdot \cos 30^\circ = \frac{CK}{2}$$

$$MK = CK \cdot \sin 30^\circ = \frac{CK}{2}$$

(в $\triangle C_1MK$)

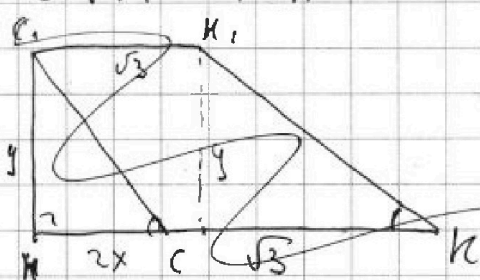
в $\triangle C_1MK$:

$$C_1M^2 = MK^2 + CK^2$$

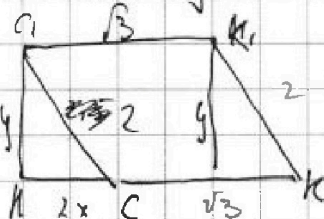
$$5^2 = \frac{CK^2}{4} + CK^2$$

приведем
к общему
от
случая

в (K, K1 и C1):



Пусть $CK_1/2 = x$ (в о. в. с. с. (случаях)): $5^2 = x^2 + y^2$

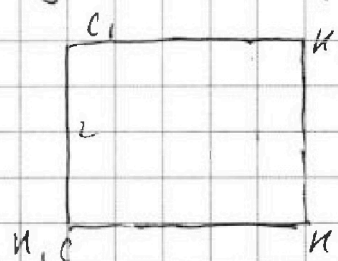


вне зависимости от случая: $K_1C_1 \parallel KC$ $\Rightarrow C_1C = K_1K$, $K_1C_1 = KC$

$$\begin{cases} y^2 + 4x^2 = 4 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 2,5^2 \end{cases}$$

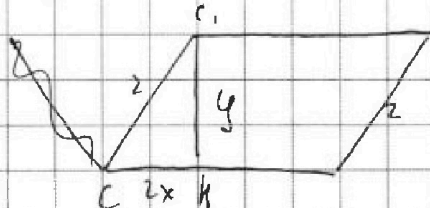
$\Rightarrow 3x^2 = 2^2 - 2,5^2 < 0 \Rightarrow$ нет решений

случай 2: $K = C$: в (K, K1 и C1):



$KC = 0$; $C_1C = C_1K = K_1K = 2$

случай 3: K между C и K1



$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 = 2^2 \\ 2,5^2 = x^2 + y^2 \\ 3x^2 = 2^2 - 2,5^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b, q \quad b q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}; \quad b q^2 = x+4; \quad b q'' = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)}{15x+6}} (x-3)^3 = (x-3)^2 \quad q = \sqrt[4]{x-3}$$

$$b \cdot \sqrt[4]{x-3} = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^3}{(x-3)^8}}$$

$$b = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^3}{1x-31^2}}$$

$$1q = +$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ x \leq -\frac{3}{5} \end{cases}$$

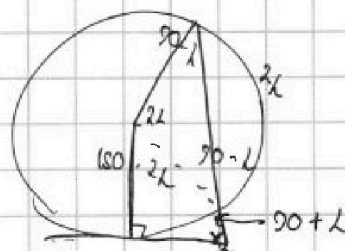
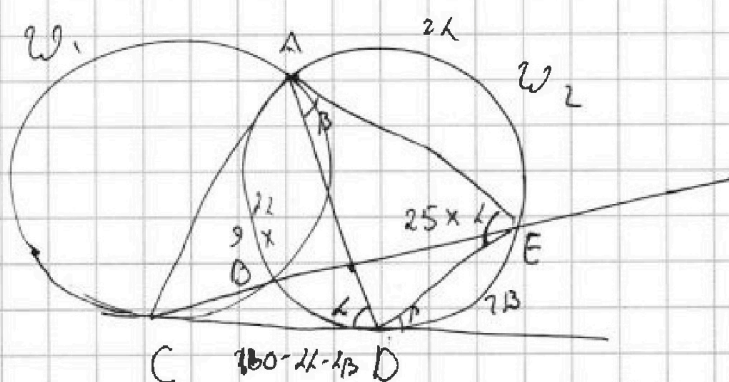
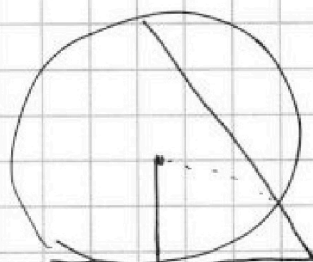
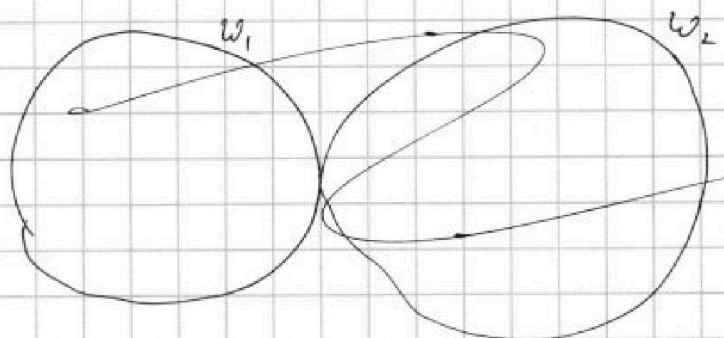
$$\sqrt[4]{\frac{(15x+6)^3}{1x-31^2}} \cdot \sqrt[4]{x-3} = x+4$$

$$\sqrt[4]{(15x+6)^3 \cdot (x-3)^2} = x+4$$

$$15x^2 - 45x + 6x - 18 = y^2 + 8x + 16$$

$$14x^2 - 44x - 34 = 0$$

$$(15x+6)(x-3) = x^2 + 8x + 16$$



$$x = 360 - 180 + 2x - 20 - 1 - 20 = 1$$

$$a = 820 - b^2 > b$$

$$a - b \geq 3$$

$$a > b$$

$$(820 - b^2 - c)(b - c) = 820b - 820c - b^3 + b^2c - bc + c^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

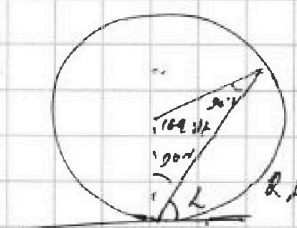
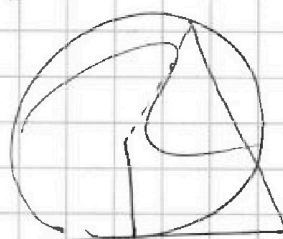
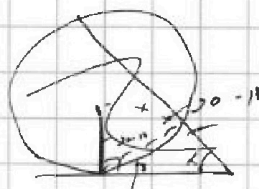
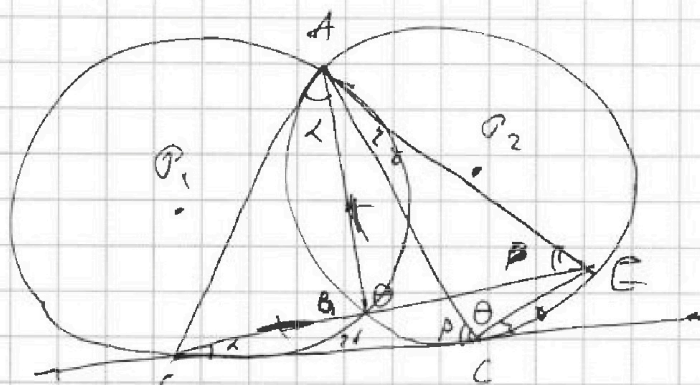
$$\cos 3x - p = 3(2\cos^2 x - 1) + 4\cos x = 6\cos^2 x + 4\cos x - 3$$

$$\cos 3x - p + 3 = 6t^2 + 4t$$

$$D = 36 + 4(\cos 3x + 3 - p) \geq 0$$

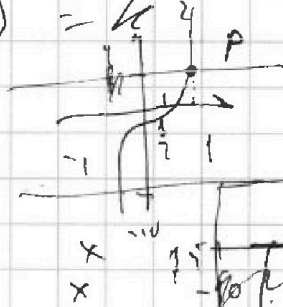
$$9 \geq \cos 3x + 3 - p$$

$$p \geq \cos 3x - 6 \geq -7$$



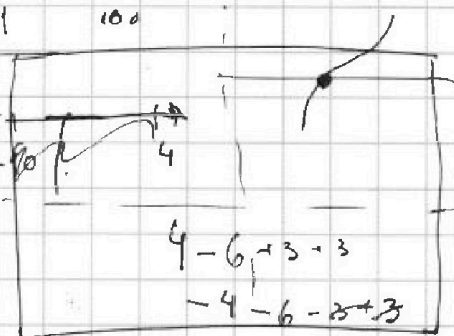
$$(820 - b^2 - c)(b - c) = k^2$$

1	k^2
-1	$-k^2$
k^2	1
$-k^2$	-1
k	$-k$
$-k$	k



$$b = c + 1, c = b - 1$$

$$820 - b^2 - b + 1 = k^2$$



$$\cos 3x + 6\cos x - 3\cos 2x = p$$

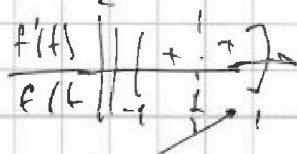
$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$12t^2 - 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(2t - 1)^2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$



$$-10 \leq p \leq 4$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t + 3$$

$$k \cos p + b$$

$$4t^3 = 3t$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
x

2
x

3
x

4
x

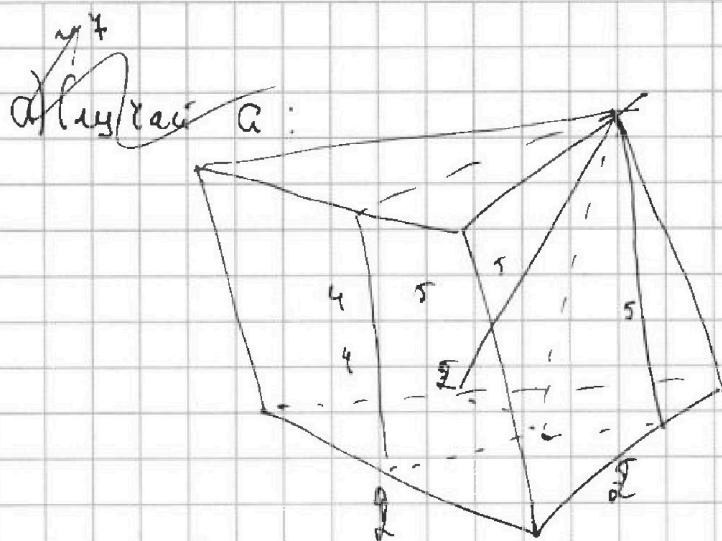
5
x

6
x

7
x

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a:3; b=3k$$

$$b:3; a=3m$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 10 \\ \hline 100 \\ + 10 \\ \hline 110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 460 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 520 \\ + 47 \\ \hline 567 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 29 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 430 \\ + 54 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$484 = 22^2$$

$$820 - b^2 - c = 1$$

$$821 = b^2 + c$$

$$b - c = k^2$$

$$821 = b^2 + b + k^2$$

b	b^2	$820 - b^2$
0	0	820
1	1	819
2	4	816
3	9	811
4	16	804
5	25	795
6	36	784
7	49	771
8	64	
9	81	
10	100	
11	121	
12	144	
13	169	
14	196	
15	225	
16	256	
17	289	
18	324	
19	361	
20	400	
21	441	
22	484	
23	529	
24	576	
25	625	
26	676	
27	729	
28	784	

$$1) \begin{array}{l} 1500 \\ + 1500 \\ \hline 3000 \end{array}$$

