



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)}, \text{ девятый член равен } x+3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть a — наш профессор. Тогда $\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot a^2 = x+3$

и $(x+3)a^2 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$ т.к. $\sqrt{(25x-9)(x-6)} \geq 0$ и $a^2 \geq 0 \Rightarrow x+3 \geq 0$
 $\Rightarrow x \geq -3$

$\frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0$ $(x-6)^3$ и $x-6$ одного знака $\Rightarrow \frac{25x-9}{x-6} \geq 0$

$\Rightarrow x \leq \frac{25}{9}$ или $x > 6$. При таких ограничениях $(25x-9)(x-6) \geq 0$

$\Rightarrow$ Наше ОДЗ: $x \in [-3; \frac{25}{9}] \cup (6; +\infty)$

$\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot a^2 = x+3 \Rightarrow a^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$

$\Rightarrow \frac{(x+3)^4}{(\sqrt{(25x-9)(x-6)})^3} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$ возведем обе части в квадрат

$\frac{(x+3)^8}{(25x-9)^3(x-6)^3} = \frac{25x-9}{(x-6)^3}$ $(x-6)^3 \neq 0 \Rightarrow$ мы можем сократить

$\Rightarrow (x+3)^8 = (25x-9)^4 \Rightarrow (x+3)^2 = |25x-9|$ если $x \geq \frac{25}{9}$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$

$\Rightarrow x^2 - 19x + 18 = (x-18)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x=1$ или $x=18$ оба значения подходят под ОДЗ.

или $x < \frac{25}{9}$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x$

$\Rightarrow x^2 + 31x = 0$

$x=0$ или $x=-31$ $x=-31$ не подходит под ОДЗ

$\Rightarrow$ Возможные значения $x=0; x=1; x=18$

Ответ: $x=0; x=1; x=18$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 4p \cos^3 x + 12 \cos x$$

$$6 \cos 2x + 10 = 12 \cos^2 x + 4$$

$$\Rightarrow 4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0 \quad \text{пусть } v = \cos x \text{ где } -1 \leq v \leq 1$$

$$\Rightarrow 4p v^3 - 12v^2 + 12v - 4 = 0 \quad \text{на 4 можно сократить}$$

$$p v^3 - 3v^2 + 3v - 1 = 0 \quad \text{Заметим что } v \neq 0 \text{ т.к. тогда } p v^3 - 3v^2 + 3v - 1 = -1 \neq 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{3v^2 - 3v + 1}{v^3} \quad \text{Посмотрим какие значения будет принимать } p \text{ если } -1 \leq v \leq 1, v \neq 0$$

Заметим что

$3v^2 - 3v + 1$ параболы с ветвями вверх у которой нет корней т.к. $D = 9 - 12 = -3 < 0$. $\Rightarrow$ Значение $3v^2 - 3v + 1 > 0$ при любом v . Вершина этой параболы будет в точке $v = 0,5$. Если $v < 0$ то если $v \downarrow$ то $3v^2 - 3v + 1 \uparrow$ а $v^3 \downarrow$

$$\Rightarrow \frac{3v^2 - 3v + 1}{v^3} \nearrow \Rightarrow \text{минимальное значение } p \text{ будет } -\infty \text{ т.к. если } v \text{ очень близко к } 0, \text{ то } \frac{3v^2 - 3v + 1}{v^3} \text{ стремится к } -\infty$$

а максимальное отриц. значение p будет при $v = -1$ $p = -7$

$$\Rightarrow \text{при } -1 \leq v < 0 \quad p \in (-\infty; -7] \quad (\text{р. возраст. } \downarrow \text{ убыв.})$$

$$\text{Если } v > 0$$

$$\text{при } 0 < v \leq 0,5 \quad 3v^2 - 3v + 1 \downarrow \quad v^3 \uparrow \Rightarrow \frac{3v^2 - 3v + 1}{v^3} \downarrow$$

$$\text{а при } 0,5 < v \leq 1 \quad 3v^2 - 3v + 1 \uparrow \quad v^3 \uparrow \text{ но } 3v^2 - 3v + 1 \text{ будет расти медленнее чем } v^3 \Rightarrow \frac{3v^2 - 3v + 1}{v^3} \downarrow$$

$\Rightarrow$ максимальное значение p $+\infty$ при $v \rightarrow 0$ а миним. попом.

$$p \text{ будет при } v = 1 \quad p = 1$$

$$\Rightarrow \text{при } -1 \leq v \leq 1 \quad v \neq 0 \quad p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

Это и будут значения p при которых есть хотя бы одно решение

Решая уравнение $p v^3 - 3v^2 + 3v - 1 = 0$ мы получили значение p в $\cos x = v \Rightarrow x = \arccos v + 2\pi k$. При чем $-1 \leq v \leq 1$ что

будет v подходящее под ограничения будет только 1, т.к.

мы доказали что при $v < 0$ $p < 0$ и функция строго возрастает,

а при $p > 0$ $v > 0$ и функция строго убывает $\Rightarrow$ двух подходящих значений v не может быть

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

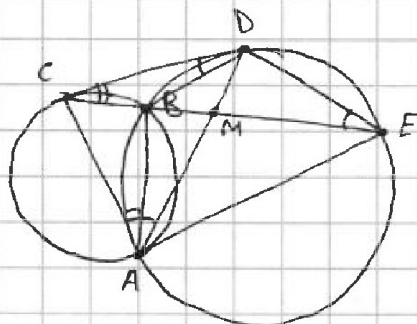


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



14.

Пл. к. ABDE - вписанн. $\Rightarrow \angle BAD = \angle BED = \alpha$

CD - касат.

$\Rightarrow \angle CDB = \angle BAD = \alpha \quad \angle CAB = \angle DCB = \beta$

$\Rightarrow \angle CAM = \alpha + \beta$

$\angle DBE$ - вписанн. в $\triangle CBD \Rightarrow \angle DBE = \angle BCD + \angle BDC = \alpha + \beta$

ABDE - вписанн. $\Rightarrow \angle DBE = \angle DAE = \alpha + \beta$

$\Rightarrow \angle DAE = \angle CAM \Rightarrow AM$ - бисс. в $\triangle CAE$

$$\Rightarrow \frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$

$\angle DEB = \angle BDC$ и $\angle BCD$ - общий

$\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle CDE$ по двум углам $\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB}$

По теореме синусов для $\triangle CDE$
По т. син. $\triangle ABM$ $\frac{BM}{\sin \alpha} = \frac{AM}{\sin \angle ABM}$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

По т. син. $\triangle ABC$ $\frac{BC}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$

$\sin \angle ABM = \sin \angle ABC$ т.к. $\angle ABM + \angle ABC = 180$

$$\Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AM}{BM} = \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB}$$

$$\frac{AC}{AE} = 0,4 \Rightarrow AC = 0,4 AE$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AM}{BM} = 2,5 \left(\frac{BC}{AE} \cdot \frac{AM}{BM} \right)$$

ABDE - впис. $\Rightarrow \triangle AME \sim \triangle BMD$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{BM}{BD}$$

$$\Rightarrow 2,5 \left(\frac{BC}{AE} \cdot \frac{AM}{BM} \right) = 2,5 \frac{BC}{BD}$$

$$\Rightarrow 2,5 \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \left(\frac{BD}{BC} \right)^2 = 2,5 \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \sqrt{2,5} = \frac{ED}{CD}$$

Ответ: $\sqrt{2,5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS.

В одной четверти кол-во клеток равно $50 \cdot 200 = 10000$

$$\Rightarrow N_4 = C_{10000}^2$$

Заметим что каждый такой способ или подсчитали по одному разу в каждой кол-во N_1, N_2, N_3 . т.е. всего 3 раза

$\Rightarrow$ Общее кол-во раскрасок будет равно $N_1 + N_2 + N_3 - 2N_4 =$

$$= 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

если $c \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 2 \pmod 3 \quad b-c \equiv 1 \pmod 3 \quad (a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3$ не подходит
если $c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 1 \pmod 3 \quad b-c \equiv 0 \pmod 3 \quad (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$ подходит

$\Rightarrow$ либо $a \equiv 0 \pmod 3 \quad b \equiv 2 \pmod 3 \quad c \equiv 0 \pmod 3$ либо $a \equiv 0 \pmod 3 \quad b \equiv 2 \pmod 3 \quad c \equiv 2 \pmod 3$

1) $a \equiv 0 \pmod 3 \quad b \equiv 2 \pmod 3 \quad c \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) : 3 \Rightarrow p^2 : 3 \Rightarrow p = 3$
 $p^2 = 9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) = 9 \quad a-c \equiv 0 \pmod 3 \quad b-c \equiv 2 \pmod 3$ единственный случай
когда так может быть если $a-c = -9 \quad b-c = -1$

$\Rightarrow b-a = 8 \quad b = a+8$

$\Rightarrow a^2 + a + 8 = 710 \quad a^2 + a - 702 = (a+27)(a-26) = 0 \quad a \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow a = -27 \quad b = -19 \quad c = -18$

2) $a \equiv 0 \pmod 3 \quad b \equiv 2 \pmod 3 \quad c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) : 3 \Rightarrow p^2 : 3 \Rightarrow p = 3$
 $p^2 = 9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) = 9 \quad a-c \equiv 1 \pmod 3 \quad b-c \equiv 0 \pmod 3$ единственный случай
когда так может быть если $a-c = 1 \quad b-c = 9$

$\Rightarrow b-a = 8 \quad b = a+8$

$\Rightarrow a^2 + a + 8 = 710 \quad a^2 + a - 702 = (a+27)(a-26) = 0 \quad a \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a = -27$

$b = -19 \quad c = -28$

Итак нашли все возможные тройки

Ответ: $(26; 34; 25); (26; 34; 35); (-27; -19; -18); (-27; -19; -28)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

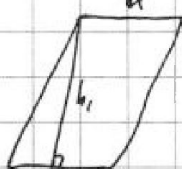
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

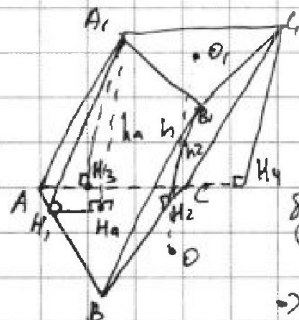
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7.

Боковые стороны будут параллелограмми. Площадь параллелограмма будет $h_1 \cdot a$. $\Rightarrow$ Выс. в двух параллелограммах равны $3/a$, а в другом $2/a$.



Пусть с.о.о. в паралл. ABB_1A_1 и ACC_1A_1 высот равны $3/a$, а в паралл. BCC_1B_1 высота равна $2/a$. Пусть h_a высота из точки A_1 на осн. ABC , аналогично определяются h_b и h_c . $h_a = h_b = h_c$.



Заметим что т.к. $A_1H_1 \perp AB$, то по теореме 3-х перпенд. проекция A_1H_1 на плоскость ABC будет перпендикулярна $AB \Rightarrow H_1H_2 \perp AB$ и $H_1H_2 \perp A_1H_2$ т.к. $A_1H_2 \perp$ плоскости ABC .

$$\Rightarrow h_a^2 = A_1H_1^2 - H_1H_2^2 \quad \text{Аналогично получим что}$$

$$h_a^2 = H_2A_1^2 - H_2H_3^2 \quad A_1H_1 = A_1H_3 \Rightarrow H_2H_3 = H_1H_2 = \sqrt{9 - h_a^2}$$

$$\Rightarrow \text{Площа } H_2 \text{ лежит на бисс. } \angle BAC \Rightarrow \angle H_2AC = \angle H_2AB = 30$$

$$\Rightarrow A_1H_2 = 2 H_2H_3 \quad A_1H_2 \perp A_1H_2 \Rightarrow AA_1^2 = BB_1^2 = CC_1^2 = 4 H_2H_3^2 + h_a^2 =$$

$$= 9 + 4 H_2H_3^2$$

Пусть h высота из центра $\triangle ABC$ на основание ABC ($h \perp O_1O_2$)

Тогда $h_a = h_b = h_c = h$ $\Leftarrow$ Тогда $A_1H_2 \perp O_1O_2$ - прямоуго. $\Rightarrow A_1O_1 \parallel H_2O_2$ и $A_1O_1 = H_2O_2$ $A_1H_2 \parallel A_1O_1 \Rightarrow$ точки A_1, H_2, O_1 лежат на одной прямой

Найдем сторону a .



$$S_{ABC} = \frac{a \sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow h_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow h_2 = \sqrt{3}$$

Площадь всей фигуры будет равен $h \cdot S_{ABC} = h$

Заметим что $H_2H_3 = H_3H_4$ и $H_2H_3 \parallel H_3H_4$ $H_3H_4 \perp H_2H_4$
 $\Rightarrow H_2H_3H_4H_3$ - прямоуго. $\Rightarrow H_2H_3 = H_3H_4 = A_1C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$



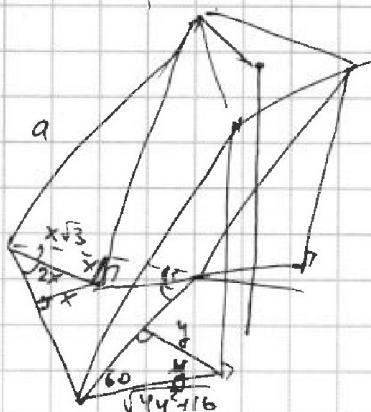
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9}{4}$$



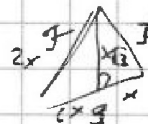
$$a^2 - 4x^2 = h_a^2 = 9 - x^2 = 5 - y^2$$

$$a^2 = 9 + 3x^2 = 4 + 3y^2$$

$$x^2 = y^2$$

$$y^2 = a^2 - h_a^2 = 4x^2 = 4y^2 + 16$$

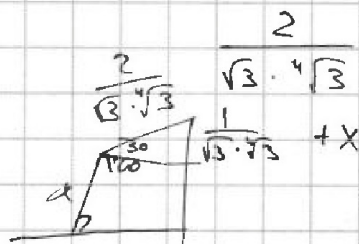
$$3y^2 + 16 + 4 = 20 + 3y^2 = 9 + 3x^2$$



$$x^2 \sqrt{3} = 1$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[4]{3} \cdot \frac{2}{3}$$



$$x^2 = y^2 + 4$$

$$x^2 = 4x^2 + 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$12 \cos^2 x + 4$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = (\cos 2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$$

$$2 \sin^2 x \cos x$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$3 - 3 \cos^2 x$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^3 x + 4$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^3 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$\cos x = b \quad -1 \leq b \leq 1$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^3 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$4(p \cos^3 x - 1) - 12 \cos x (\cos x - 1) = 0$$

$$4pb^3 - 12b^2 + 12b - 4 = 0$$

$$pb^3 - 3b^2 + 3b - p = 0$$

$$(pb^3 - 1) - 3b(b-1) = 0 \quad p=1 \quad p < 1 \quad 3b(b-1) + 1$$

$$(b-1)(b^2 - 2b + 1) = (b-1)^3 = 0 \quad b=1 \quad \cos x = 1$$

$$0 < 0,5$$

$$(pb^3 - 1) \leq p-1 \quad 3b(b-1) \geq -6$$

$$\frac{0,75 - 1,5 + 1}{0,125} = \frac{0,25}{0,125} = 2$$

$$3b^2 - 3b + 1$$

$$0 = pb^3 - 1 - 3b(b-1) \leq p+5$$

$$p \leq 5$$

$$3b^2 - 3b + 1$$

$$3b^2 - 3b + 1$$

$$pb^3 - 1 \geq -p-1 \quad 3b(b-1) \leq 0$$

$$-1 \leq p \leq 5$$

$$0,5$$

$$-p-1 \leq 0$$

$$p \geq -1$$

$$\frac{3}{b} - \frac{3}{b^2} + \frac{1}{b^3}$$

$$3b^2$$

$$3(b+ab)^2 - 3(b+ab) - 1 \quad b^3 - 3b^2 + 3b - 1$$

$$-1$$

$$(b+ab)^3$$

$$p = \frac{3b^2 + 3b + 1}{b^3} \geq 1 \quad b \neq 0$$

$$p \geq 1$$

$$3b^2 - 3b + 1 + 3ab^2 + 3ab - 3ab$$

$$3ab^2 - 3ab$$

$$3b^2 - 3b + 1$$

$$-7$$

$$b^3 + 3ab^2 + 3ab - 1 \geq b^3$$

$$-1$$

$$b^3 - 3b^2 + 3b - 1 \leq 0$$

$$(b-1)^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} + 2a = x+3 \quad x+3 + 6a = \sqrt{25x-9}$$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot a^2 = x+3 \quad (x+3)a^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$a = \sqrt{\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}} \quad \frac{(x+3)^3 (x+3)}{(25x-9)(x-6)\sqrt{(25x-9)(x-6)}} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$(x+3) \quad (25x-9)(x-6) \geq 0 \quad \frac{+}{25/9} \quad \frac{-}{6}$$

$$\frac{(x+3)^8}{(25x-9)^3 \cdot (x-6)^3} = \frac{25x-9}{(x-6)^3} \quad (x+3)^8 = (25x-9)^4$$

$$(x+3)^2 = 25x-9$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0 \quad (x-18)(x-1) = 0$$

$$x^2 + 31x = 0$$

$$x=0 \quad x=-31$$

$$\frac{ED}{CD} = ? \quad \frac{CM}{EM} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{\sin \angle)}{\sin \angle)} = \frac{CB}{AC} \cdot \frac{AM}{BM} = \frac{BD}{CB}$$

$$\frac{AM}{\sin \angle)} = \frac{BM}{\sin \angle)} \quad \frac{AC}{\sin \angle)} = \frac{CB}{\sin \angle)}$$

$$\sin \angle)} = \frac{CB \cdot \sin \angle)}{AC} \quad \frac{1}{\sin \angle)} = \frac{AM}{\sin \angle)} \cdot \frac{1}{BM}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{CB} \quad \frac{CB}{AC} \cdot \frac{EM}{DM} = \frac{BD}{CB} = \frac{1}{2,5}$$

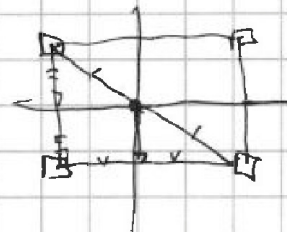
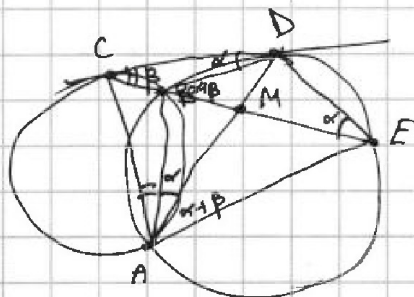
$$\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{CB}{AE} \cdot \frac{EM}{DM} = 2,5 \quad \frac{CB}{DM} \cdot \frac{BD}{DM}$$

$$2,5 \frac{CB}{BD} = \frac{BD}{CB}$$

$$2,5 CB^2 = BD^2 \quad BD = CB \sqrt{2,5}$$

$$2,5 \left(\frac{CB}{AE} \cdot \frac{AM}{BM} \right) = \frac{BM}{BD} = \frac{2,5 CB}{BD} = \frac{BD}{CB}$$





1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 / ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6.

Квадрат целого числа даёт либо остаток 0, либо остаток 1 при делении на 3

$\Rightarrow$ либо $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ либо $a^2 \equiv 0 \pmod 3$. Если $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ тогда $b \equiv 1 \pmod 3$ (т.к. $710 \equiv 2 \pmod 3$ и $a^2 + b = 710$). Т.к. $a^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow$ либо $a \equiv 1 \pmod 3$ либо $a \equiv 2 \pmod 3$ если $a \equiv 1 \pmod 3$ тогда $b - a \equiv 0 \pmod 3$, а такого быть не может $\Rightarrow a \equiv 2 \pmod 3$ $b \equiv 1 \pmod 3$
 если $a^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$ ~~$b \equiv 2 \pmod 3$~~ $a \equiv 0 \pmod 3$ и $b \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow b - a \not\equiv 0 \pmod 3$ подходит.

$\Rightarrow$ либо $a \equiv 2 \pmod 3$ и $b \equiv 1 \pmod 3$ либо $a \equiv 0 \pmod 3$ и $b \equiv 2 \pmod 3$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad \& \quad \Rightarrow \text{либо } (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3 \text{ либо } (a-c)(b-c) \equiv 1 \pmod 3$$

Если $a \equiv 2 \pmod 3$ $b \equiv 1 \pmod 3$. Посмотрим какой остаток при делении на 3 может давать число c. если $c \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 2 \pmod 3$ $b-c \equiv 1 \pmod 3$ тогда $(a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3$ но такого быть не может
 если $c \equiv 1 \pmod 3$ $a-c \equiv 1 \pmod 3$ $b-c \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$ подходит
 если $c \equiv 2 \pmod 3$ $a-c \equiv 0 \pmod 3$ $b-c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$ подходит
 $\Rightarrow$ либо $a \equiv 2 \pmod 3$ $b \equiv 1 \pmod 3$ $c \equiv 1 \pmod 3$ либо $a \equiv 0 \pmod 3$ $b \equiv 2 \pmod 3$ $c \equiv 2 \pmod 3$

1) $a \equiv 2 \pmod 3$ $b \equiv 1 \pmod 3$ $c \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow (a-b)(b-c) \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod 3$ а т.к. p - простое число $\Rightarrow p = 3$ $p^2 = 9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) = 9$ $a-c \equiv 1 \pmod 3$ $b-c \equiv 0 \pmod 3$ единственной парой когда так может быть если $a-c = 1$ $b-c = 9$ (т.к. числа целые)

$$\Rightarrow b - a = 8 \Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow a^2 + a + 8 = 710$$

$$\Rightarrow a^2 + a - 702 = (a + 27)(a - 26) = 0 \quad a \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow a = 26 \quad b = 34 \quad c = 25$$

2) $a \equiv 0 \pmod 3$ $b \equiv 2 \pmod 3$ $c \equiv 2 \pmod 3$ $(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p = 3$ $p^2 = 9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) = 9$ $a-c \equiv 0 \pmod 3$ $b-c \equiv 2 \pmod 3$ единственной парой когда так может быть если $a-c = -9$ $b-c = -1 \Rightarrow b - a = 8$ $b = a + 8$

$$a^2 + a + 8 = 710 \Rightarrow a^2 + a - 702 = (a + 27)(a - 26) = 0 \quad a \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a = 26$$

$$b = 34 \quad c = 35$$

Если $a \equiv 0 \pmod 3$ $b \equiv 2 \pmod 3$. Посмотрим какой остаток при делении на 3 будет давать число c, если $c \equiv 0 \pmod 3$ $a-c \equiv 0 \pmod 3$ $b-c \equiv 2 \pmod 3$

$$\Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3 \text{ подходит}$$



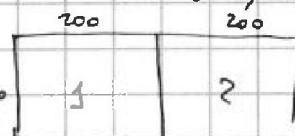
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

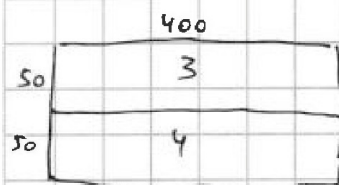
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS.

Найдем кол-во раскрасок симметричных относительно центра.
 Заметим, что по одной точке однозначно определяется вторая симметричная ей. и если первая лежит в 1 половине прямоуго. то вторая будет лежать в 2 и наоборот. $\Rightarrow$ Кол-во раскрасок симметричных относительно центра будет равно кол-ву способов выбрать 4 клетки в 1 половине. в ней кол-во клеток равно $100 \times 200 = 20000$ кол-во способов $N_1 = C_{20000}^4$



Аналогично кол-во раскрасок симметр. отн. верт. средней линии равно кол-ву способов выбрать 4 клетки в 1 половине т.е. $N_2 = C_{20000}^4$

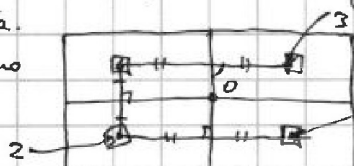


$\Rightarrow N_3 = C_{20000}^4$

Кол-во раскрасок симметр. отн. гор. средней линии равно кол-ву способов выбрать 4 клетки из 3 половинок. в 3 половинке клеток $50 \times 400 = 20000$

Заметим, что если раскраска симметрична относительно любых 2-х способов, то она будет симметрична и относительно 3-его способа.

Докажем это



Пусть например раскраска симметрична относительно фронтальной осей есть клетка 1.

Тогда по ней однозначно восстанавливаются клетки 2, 3 и т.д. А по клетке 2 однозначно восстанавливается клетка 4 симм. еб. Заметим, что в этом случае точки 1 2 3 4 образуют прямоуго. и ср. линии исходного прямоуго. будут ср. линиями в нем. Тогда точка 3 симм. 4 отн. ср. линии и точки 1 и 4, и 2 и 3 симм. относительно 0. $\Rightarrow$ Эти 4 точки симм. отн. центра

Аналогично другие 4 точки будут симм. отн. центра.

Для 2-х других вариантов. доказываем аналогично, что тогда будет симм. отн. центру. Тогда кол-во раскрасок симм. относительно 3-х. будет равно кол-ву способов выбрать 2 клетки в одной четверти прямоуго.