



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- 1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

- 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

- 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

- 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- 6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

1) b_n - геом. прогрессия b_1 - первый элемент; $b_1 \neq 0$ (т.к. тогда $x = -\frac{2}{5}(4+1) \Rightarrow b_1 \neq 0$)

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \quad b_{10} = x+4 \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$b_4 = b_1 q^3$$

$$b_{10} = b_1 q^9$$

$$b_{12} = b_1 q^{11}$$

$$\frac{b_{10}}{b_4} = q^6 \Rightarrow q^2 = \sqrt[3]{\frac{b_{10}}{b_4}} \quad \frac{b_{12}}{b_{10}} = q^2 \Rightarrow \frac{b_{12}}{b_{10}} = \sqrt[3]{\frac{b_{10}}{b_4}} \Rightarrow \left(\frac{b_{12}}{b_{10}}\right)^3 = \frac{b_{10}}{b_4}$$

$$\Rightarrow (b_{10})^4 = b_{12}^3 b_4 \quad (\text{элементы геом. прогрессии и экв. членами})$$

$$2) (x+4)^4 = (\sqrt{(15x+6)(x-3)})^3 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$(x+4)^4 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)} \cdot \frac{1}{|x-3|} \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)(x-3) \sqrt{(15x+6)(x-3)} \cdot \frac{1}{|x-3|} \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

если $x > 3$:

$$(x+4)^4 = (15x+6) \sqrt{(15x+6)(x-3)} \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$(x+4)^4 = (15x+6) \sqrt{(15x+6)^2 \frac{(x-3)}{(x-3)^3}} \Rightarrow (x+4)^4 = (15x+6) \sqrt{15x+6}$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)^2 \Rightarrow ((x+4)^2 - 15x - 6)((x+4)^2 + 15x + 6) = 0$$

$$(x+4)^2 = 15x + 6$$

$$x^2 + 8x + 16 = 15x + 6$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = 2 \quad (\text{не подходит } x > 3)$$

$$x = 5$$

$$(x+4)^2 = -15x - 6$$

$$x^2 + 8x + 16 = -15x - 6$$

$$x^2 + 23x + 22 = 0$$

$$x = -1 \quad (\text{не подходит } x > 3)$$

$$x = -22$$

Проверим $x = 5$:

$$b_4 = \sqrt{\frac{15 \cdot 5 + 6}{2^3}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}; \quad b_{10} = 9; \quad b_{12} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}$$

$$\frac{b_{12}}{b_{10}} = q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{9\sqrt{2}}{9} = \sqrt{2} \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{2}. \quad \text{Если } q = \sqrt[4]{2}: \quad b_1 = \frac{b_4}{q^3} = \frac{9}{(\sqrt[4]{2})^3} = \frac{9}{\sqrt[4]{8}}$$

$$b_{10} = b_1 \cdot q^9 = \frac{9}{\sqrt[4]{8}} \cdot (\sqrt[4]{2})^9 = \frac{9 \cdot \sqrt[4]{2^9}}{\sqrt[4]{2^6}} = \frac{9 \cdot \sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^6}} = \frac{9 \cdot \sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{64}} = \frac{9 \cdot \sqrt[4]{8}}{2\sqrt[4]{4}} = \frac{9}{2\sqrt[4]{2}} = \frac{9}{\sqrt[4]{8}}$$

$$b_{12} = b_{10} \cdot q^2 = \frac{9}{\sqrt[4]{8}} \cdot \sqrt{2} = 9\sqrt{2} - \text{н.с.}$$

Значит при $x = 5$, такая прогрессия существует

3) Если $x \leq -\frac{2}{5}$:

$$(x+4)^4 = -(15x+6) \sqrt{(15x+6)(x-3)} \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$(x+4)^4 = -(15x+6) \sqrt{(15x+6)^2} = (x+4)^4 = -(15x+6) \sqrt{15x+6}$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)^2 \Rightarrow \text{чл. 4) 1) нулика корни:}$$

$$x = 2 \quad (\text{не подходит } x \leq -\frac{2}{5})$$

$$x = 5 \quad (\text{не подходит } x \leq -\frac{2}{5})$$

$$x = -1$$

$$x = -22$$

$$\Rightarrow \text{проверим } x = -1: \quad b_4 = \sqrt{\frac{15(-1)+6}{(-4)^3}} = \frac{3}{8}; \quad b_{10} = (-1)+4 = 3$$

$$\text{проверим прогрессия: } q = \sqrt{2}; \quad b_1 = \frac{3}{8\sqrt{2}}; \quad b_4 = \frac{3}{16\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2})^3 = \frac{3}{8}; \quad b_{10} = \frac{3}{16\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2})^9 = 3; \quad b_{12} = \frac{3}{16\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2})^{11} = 6$$

$$\text{проверим } x = -22: \quad b_4 = \sqrt{\frac{15(-22)+6}{(-25)^3}} = \frac{18}{125}; \quad b_{10} = -18; \quad b_{12} = 18 \cdot 5$$

$$\text{т.к. } b_{12} = b_{10} \cdot q^2 \Rightarrow b_{10} > 0, \text{ т.к. } b_{12} > 0 \Rightarrow -22 \text{ не подходит}$$

Об: -1; 5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

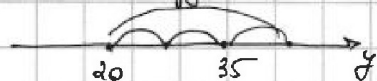
Задача 2

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2}$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

① Рассм. $|y-20| + |y-35|$

Пусть есть коор. ось: Заметим, что $|y-20|$ расстояние от точки y до 20
 а $|y-35|$ расстояние от точки y до 35



Плюс заметим, что $|y-20| + |y-35| \geq 35-20$ — расстояние между точками 20 и 35
 $|y-20| + |y-35| \geq 15$

② Рассм $0 \leq \sqrt{225-z^2} \leq 15$, т.к. $225-z^2 \geq 0$
 $-15 \leq z \leq 15$

③ Значит лев. часть:

$$\underbrace{|y-20| + |y-35|}_{\geq 15} + \underbrace{|y-35|}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{225-z^2}}_{\leq 15}$$

смы добавляем к $|y-20| + |y-35|$

Такое возможно, если

$$|y-20| + |y-35| \cdot 2 = 15$$

примем заметим что к $|y-20| + |y-35|$ мы добавляем некоторый неотриц. число: $|y-20| + |y-35| + |y-35| = 15$

Значит $|y-35| = 0 \Rightarrow y = 35$

Также проверяем $y = 35$ (не подходит: $|70-20| + (70-35) \cdot 2 > 15$)
 Также проверяем $y = 35$ ($|35-20| + |35-35| \cdot 2 = 15$ — верно)

$$\boxed{z=0} \quad \left(\text{из уравнения } \begin{cases} \sqrt{225-z^2} = 15 \\ 225-z^2 = 225 \\ z^2 = 0 \end{cases} \right)$$

④ Рассм. (1) уравнения системы:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2}$$

$$\text{т.к. } y=35; z=0: \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = a; \sqrt{5-x} = b \\ a-b+6 = 2a \\ a^2+b^2 = 12 \end{cases}$$

$$\text{Сложим уравнения: } a^2+b^2-2ab+a-b+6 = 12$$

$$\text{Пусть } a-b=t: \quad (a-b)^2 + (a-b) = 6 = 0$$

$$t^2+t-6=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-3 \\ t=2 \end{cases}$$

⑤ если $a-b=-3$: $\begin{cases} a-b=-3 \\ a^2+b^2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b-3 \\ a^2+b^2=12 \end{cases}$

$$(b-3)^2+b^2=12; \quad 2b^2-6b+9=12 \quad 2b^2-6b-3=0 \quad b = \frac{6 \pm \sqrt{36+24}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

$$b > 0 \Rightarrow b = \frac{3+\sqrt{15}}{2}; \quad a = \frac{\sqrt{15}-3}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = \frac{\sqrt{15}-3}{2} \\ \sqrt{5-x} = \frac{3+\sqrt{15}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+7 = \frac{15+9-6\sqrt{15}}{4} \\ 5-x = \frac{9+15+6\sqrt{15}}{4} \end{cases}$$

$$x = \frac{15+9-6\sqrt{15}}{4} - 7 = \frac{24-28-6\sqrt{15}}{4} = \frac{-2-3\sqrt{15}}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 5 \\ 36-(x+1)^2 \geq 0 \\ x \geq -7 \quad (x+1) \leq 36 \\ x \leq 5 \\ -6 \leq x+1 \leq 6 \\ x \geq -7 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (продолжение)

① если $t=2$: $\begin{cases} a-b=2 \\ a^2+b^2=12 \end{cases} \quad a=b+2$

$$(b+2)^2+b^2=12 \Rightarrow b^2+4b+4+b^2=12 \Rightarrow 2b^2+4b-8=0$$

$$b^2+2b-4=0$$

$$b = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$b > 0 \Rightarrow b = -1 + \sqrt{5}; \quad a = -1 + \sqrt{5} + 2 = \sqrt{5} + 1$$

$$\begin{cases} x+z = \sqrt{5}+1 \\ \sqrt{5}-x = -1+\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z = 5+1+2\sqrt{5} \\ 5-x = 5+1-2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$x = 2\sqrt{5} - 1$$

Таким образом, решив систему:

отв.: $\left(-\frac{2-3\sqrt{5}}{2}; 35; 0\right)$ и $(2\sqrt{5}-1; 35; 0)$



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 3(2 \cos^2 x - 1) + p$$

$$4 \cos^3 x - 2 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 4 \cos x + 3 = p$$

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x =$$

$$= \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x =$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

Пусть $t = \cos x$; $-1 \leq t \leq 1$; $p = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$

Построим график в св. коор. $p(t)$!

$$p' = 12t^2 - 12t + 3$$

$$p' = 0: 12t^2 - 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(2t - 1)^2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 3 = 3,5$$

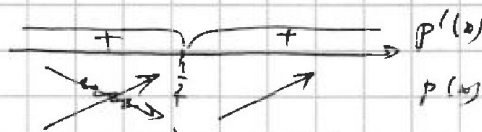
$$p(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

$$p(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

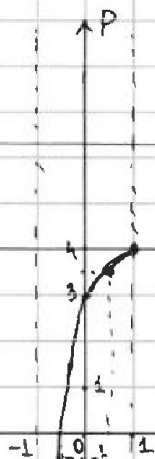
$$p(0) = 3$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 3 = -\frac{1}{2}$$



возрастает на всю промежуток
(знает какое своё значение
и лежит в промежутке от
[-10; 4])



$p = a$, $a > 4$ не имеет

$p = 4$; 1 решение

$p = a$; $-10 < a < 4$; 2 решения

$p = -10$; 1 решение

$p = a$, $a < -10$ не имеет

Таким образом, ур. имеет хотя бы 1 решение при $p \in [-10; 4]$
Отв.: $[-10; 4]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

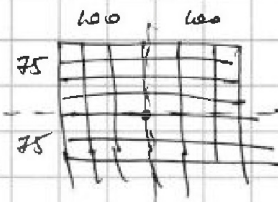
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

1) Заметим, что расстановке 4-х зеркала, клеток даёт 4 обычные расстановки, можно выбрать только 4 зеркала.

Выбор 4 клеток:

$$\frac{(150-100)(150-100-1)(150-100-2)(150-100-3)}{4!}$$



при этом 3 зеркала симметричны $\Rightarrow$ умножить на 3.

2) Заметим, что выполнив симметрию относительно центра мы получим тот же самый выбор клеток (т.е. 2 зеркала, картинки). Значит уже симметричные клетки. Одно из выбранных симметричных зеркала даёт 2 зеркала симметрично, т.е. нужно выбрать несимметричные 4 клетки.

3) Рассм. симметрию относительно центра. Заметим, что выбор 4 клеток из 150-100=50 клеток, мы найдем симметрию. слева, т.е. выбор.

$$\frac{(50-100)(50-100-1)(50-100-2)(50-100-3)}{4!} = \frac{C_{50-100}^4}{4!}$$

4) Рассм. симметрию относительно центра. Заметим, что также выбор 4 клеток из соответствующих половинок, мы найдем симметрию. 4 клетки, при этом никакая клетка не перевернётся в себя.

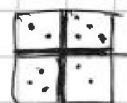


т.е. вариантов для каждой симметрии: $\frac{(50-100)(50-100-1)(50-100-2)(50-100-3)}{4!}$

5) Заметим, что мы посчитали несколько картинок. Обычные варианты или три симметрии.

Каждая картинка симметрична сама по себе, симметрична

Заметим, что если картинки образуют пары 2-х или 3-х симметрии, то они образуют и третьи. Значит таких вариантов получится 3-х.



Если применить все виды симметрии, то в каждой половине 1/2 картинки, т.е. в каждой по 2 точки. Найдем такое такое вар-тов:

$$\frac{(75-100)(75-100-1)(75-100-2)(75-100-3)}{4!} = \frac{C_{75-100}^4}{4!}$$

6) Также, образуем, все варианты:

$$\begin{aligned} & \frac{(150-100)(150-100-1)(150-100-2)(150-100-3)}{4!} - 2 \cdot \frac{(75-100)(75-100-1)(75-100-2)(75-100-3)}{4!} - \\ & - \frac{3 \cdot 2a(2a-1)(2a-2)(2a-3)}{4!} - \frac{2 \cdot a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!} = \frac{2a(a-1)(6(2a-1)(2a-2)(2a-3) - 2(a-2)(a-3))}{4!} = \\ & = \frac{a(a-1)(12a^2 - 12a + 16 - 2a^2 + 6a - 6)}{4!} = \frac{a(a-1)(10a^2 - 6a + 10)}{4!} \end{aligned}$$

Ответ: $C_{150-100}^4 - 2C_{75-100}^4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

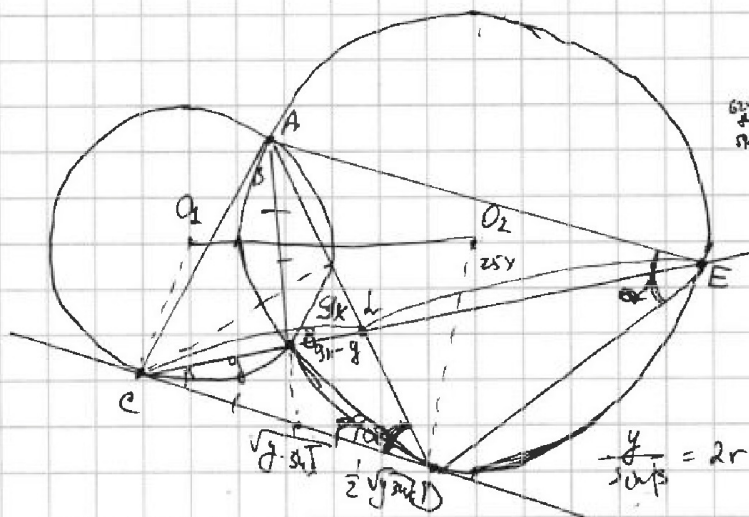
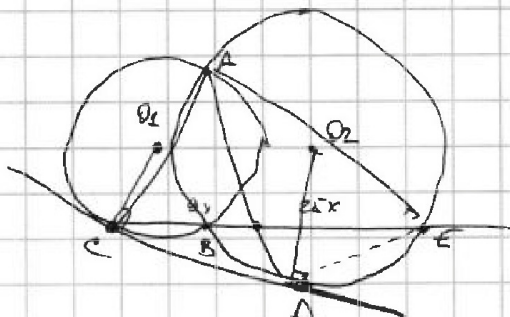
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 127~~ Черновик

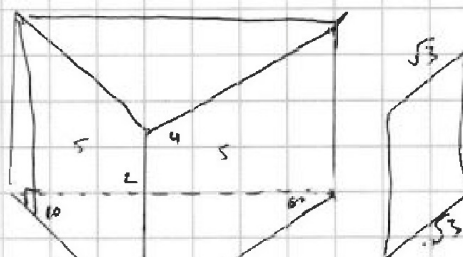
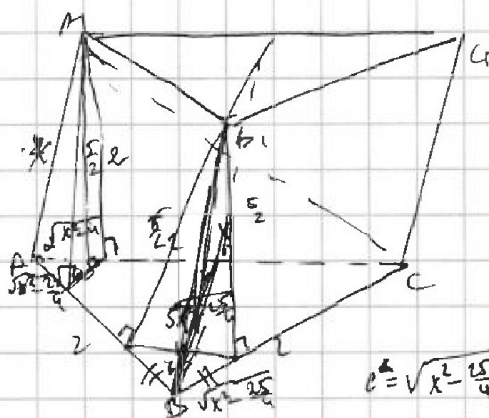
~~Задача 127~~



$$4\omega^2x - 6\omega^2x + 3\omega x + 3 = p$$
$$4t^3 - 6t + 3 = p$$



$$2 \cdot x \cdot \sin \alpha = 4$$
$$2 \cdot x \cdot \sin \beta = 5$$



$$c^2 = \sqrt{x^2 - \frac{25}{4} + x^2 - 4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 4} \sqrt{x^2 - \frac{25}{4}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

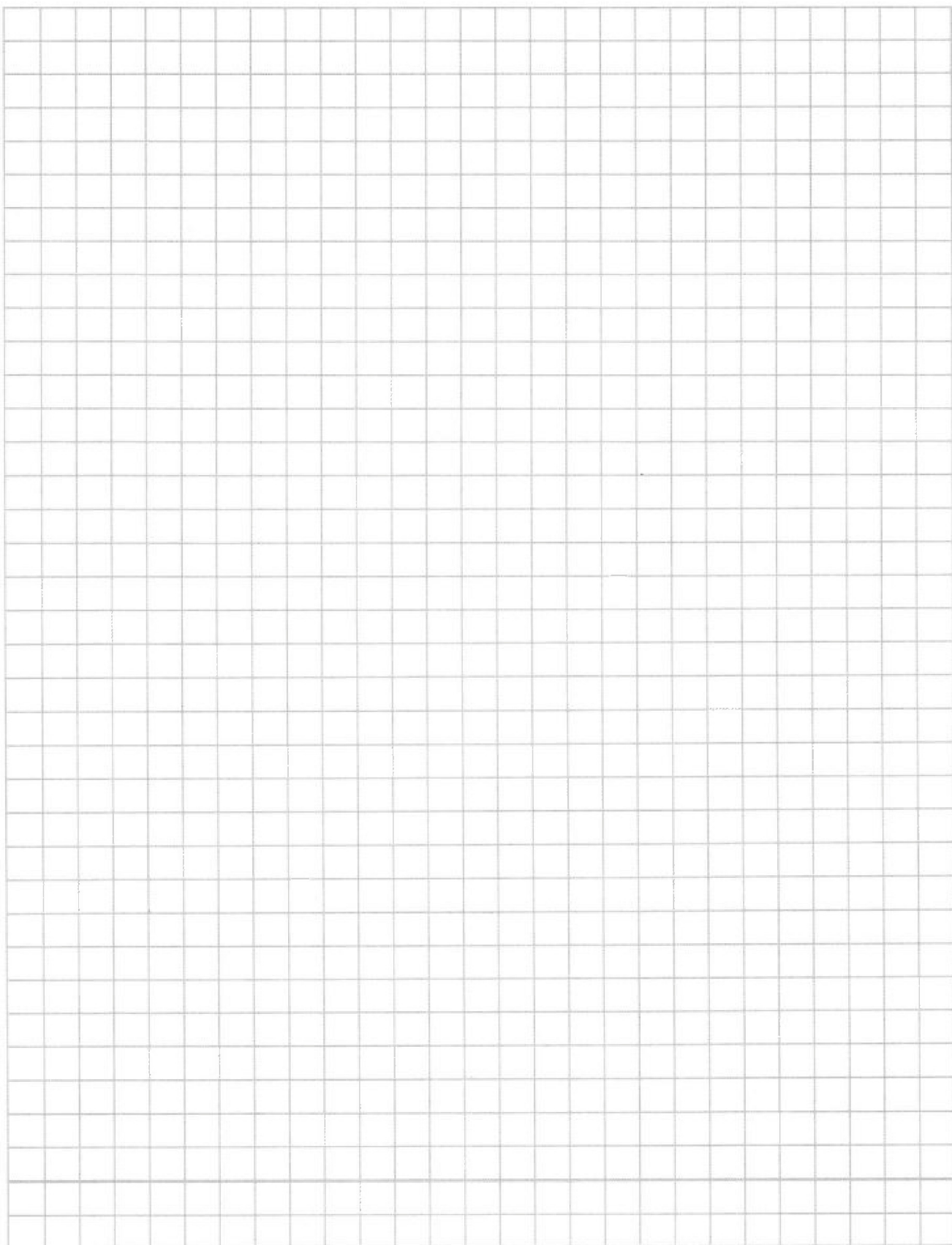
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

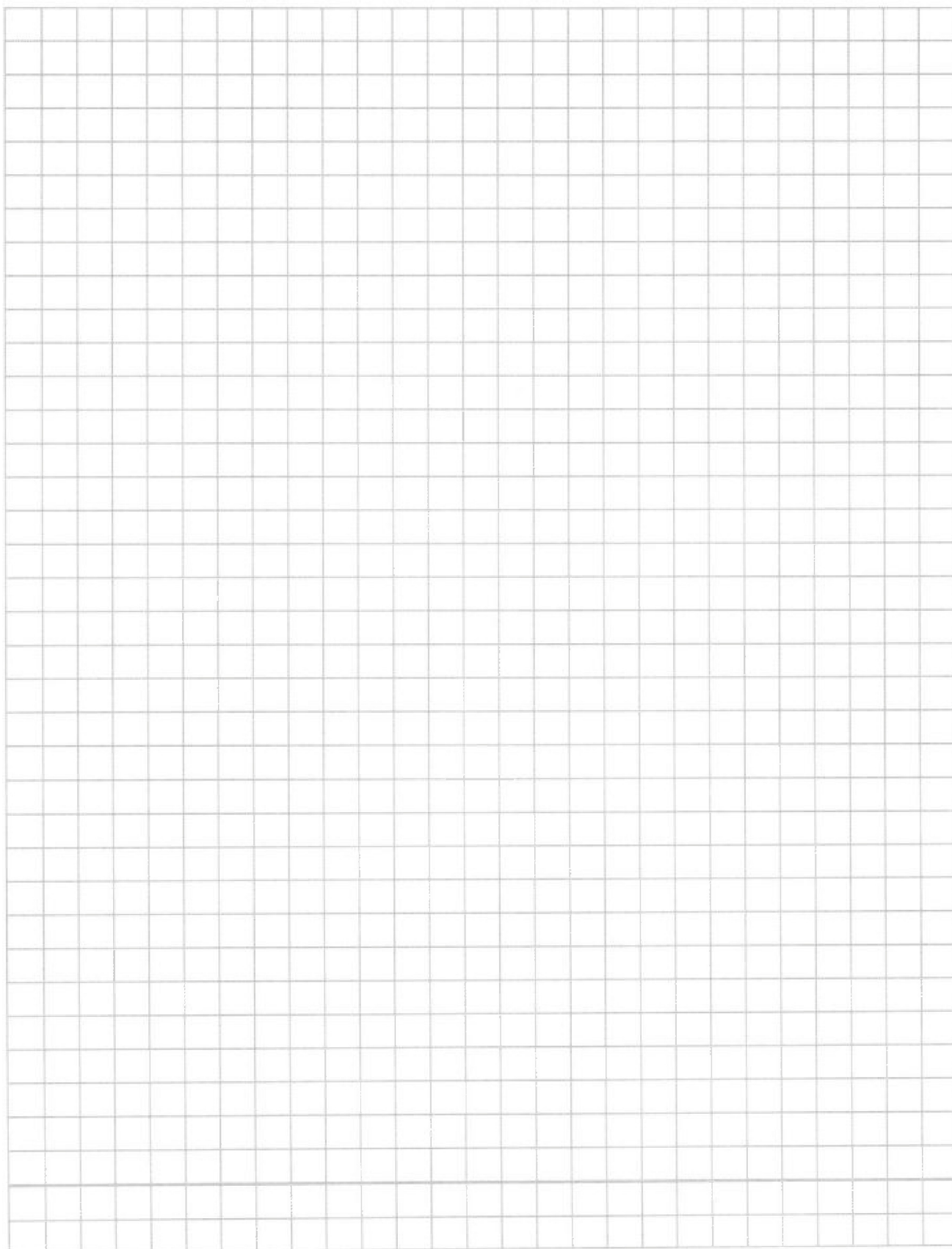
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

