



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -2:$$

$$bq^9 = \sqrt{16 \cdot 4} = \pm 8$$

$$bq^{11} = 4, q = \dots bq^{14} = \sqrt{\frac{16}{4^2 \cdot 4}} = \pm \frac{1}{2}, q = \pm \frac{1}{4}$$

при $x = 2$ существует геом. прогрессия с $q = \pm \frac{1}{4}$

и $b = 4^{12}$ или геом. прогрессия с $q = -\frac{1}{4}$, $b = -4^{12}$.

$$x = -19:$$

$$bq^9 = \sqrt{441 \cdot 49} = \pm 21 \cdot 7, bq^{11} = 21, bq^{14} = \sqrt{\frac{441}{4^6}} = \pm \frac{21}{4^3}$$

Существует геом. прогрессия с

$$q = \pm \frac{1}{\sqrt{4}} \text{ и } b = \frac{21}{\sqrt{4}} \cdot 21 \cdot (\sqrt{4})^{11}$$

Ответ: $-2, -19$.



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} & (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} & (2) \end{cases}$$

~~0 А 3:~~
 ~~$x+6 \geq 0$~~

$$(2): |y+2| + 2|y-18| = f(y)$$

он $y \leq 18$ $f(y)$ убывает т.к.

коэффициент при y отрицательный,

при $y > 18$: коэф. при y - положительный $\Rightarrow$

$f(y)$ возрастает. Тогда её минимум достигается

в $y=18$. $f(18) = 20$. Л.ч. (2) ≥ 20 . А правая

часть меньше или равна 20. Тогда & единств.

$$\text{решение (2): } \begin{cases} |y+2| + 2|y-18| = 20 \Rightarrow y=18 \\ \sqrt{400-z^2} = 20 \Rightarrow z=0 \end{cases}$$

$$(1): \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} = 2\sqrt{(6-x)(3+x)}$$

Положим $\sqrt{x+6} = a$, $\sqrt{3-x} = b$, заметим, что $a^2 + b^2 = 9$

$$a - b + 7 = 2ab$$

0 А 3:
 $x+6 \geq 0$
 $3-x \geq 0$

$$a - b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab$$

$$a^2(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0 \Rightarrow a-b = -2; 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a-b=-2!$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = -2 \Rightarrow 9 - 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} = 4$$

$$5 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} \Rightarrow \frac{25}{4} = 4(x+6)(3-x)$$

$$25 = -4x^2 - 12x + 42$$

$$4x^2 + 12x - 44 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 44 \cdot 4}}{8} = \frac{-12 \pm \sqrt{896}}{8} = \frac{-12 \pm 8\sqrt{14}}{8} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$\frac{-3-2\sqrt{14}}{2}$ не подходит $\frac{-3+2\sqrt{14}}{2}$ подходит

$$a-b=1:$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 1 \Rightarrow -2 \cdot 4 - 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} = 1$$

$$-4 = \sqrt{(x+6)(3-x)} \Rightarrow 16 = -x^2 - 3x + 18$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{\sqrt{17} \pm -3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \text{ не подходит } \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \text{ подходит}$$

$$\text{Итого } x = \frac{\sqrt{130}-6}{4} \cdot \frac{\sqrt{14}-3}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{130}-6}{4}, 18, 0 \right); \left(\frac{\sqrt{14}-3}{2}, 18, 0 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. иначе p^2 делит $a-b+1$ при дел. на 3.
Тогда $p=3$. $a-b+1=9$, $a^2+a=4008$ -

невозможно т.к. $a-b < 0$, тогда $a-b+1 \leq 0$

б) $a-c=-p^2$: $b-c=-1$, $a-b-1=-p^2 \Rightarrow a-b \equiv 1$,

т.к. $-p^2$ дает остатки 0 и 2 при дел. на 3.

тогда $p=3$. $a-b=-8 \Rightarrow a^2+a=992 \Rightarrow a=31, -32$.

$a=31, b=39, c=40$; $a=-32, b=-24, c=-23$.

Ответ: $(31, 39, 40)$; $(-32, -24, -23)$.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

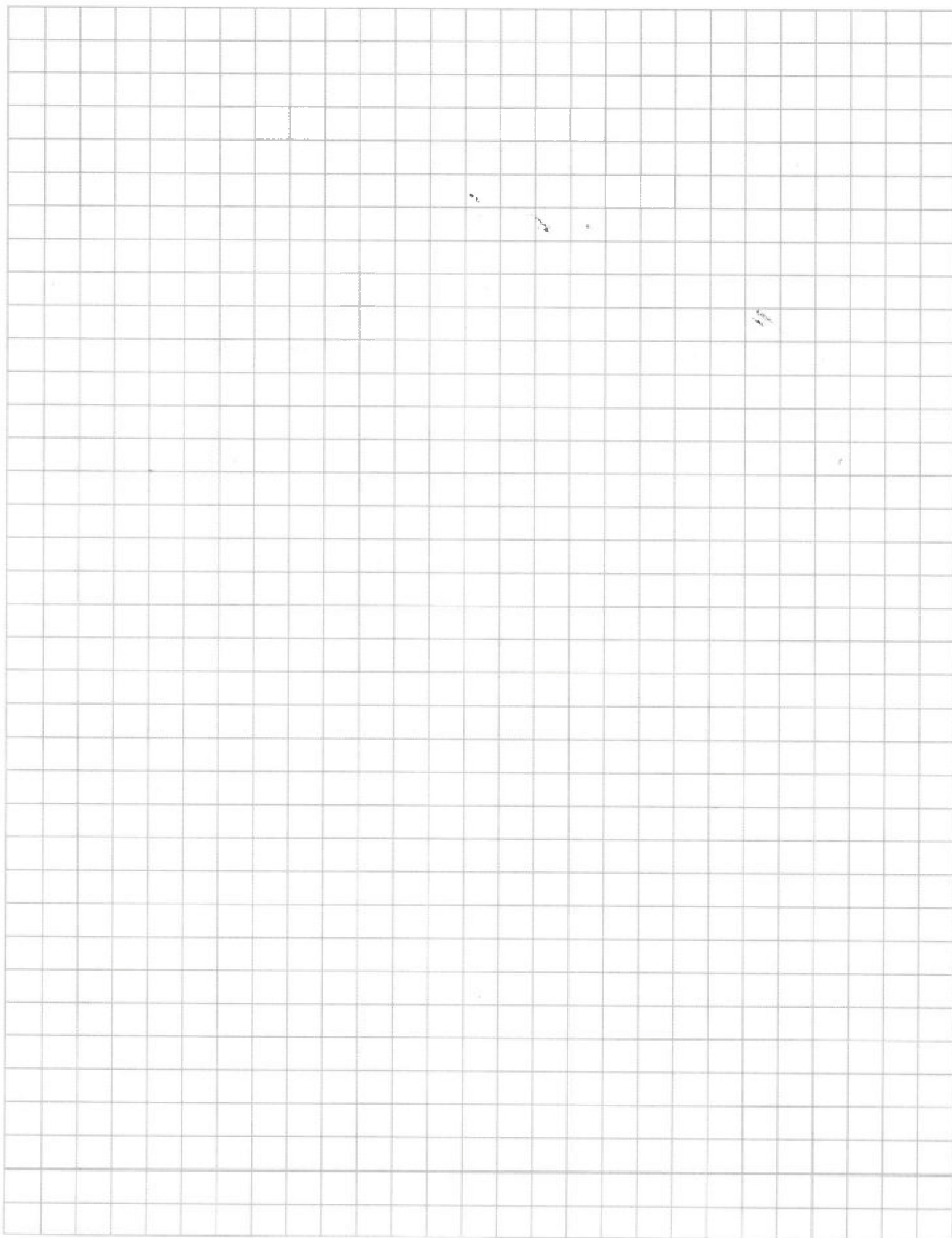
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.

Пусть b - первый член геом. прогрессии, q - знаменатель.

Тогда

$$\begin{cases} b q^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} & (1) \\ b q^{11} = 2-x & (2) \\ b q^{14} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} & (3) \end{cases} \quad \begin{aligned} (2)/(1): q^2 &= \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} & (A) \\ (3)/(1): q^5 &= \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2} & (B) \end{aligned}$$

$$(A): q^8 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow (2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$(2-x)^2 = \pm (25x+34)$$

$$1) (2-x)^2 = 25x+34$$

$$4-4x+x^2 = 25x+34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$x = -1; 30$$

$$2) (2-x)^2 = 25x-34$$

$$4-4x+x^2 = 25x-34$$

$$x^2 + 29x + 38 = 0$$

$$x = -2; -19$$

$x = -1$: $x = -1$ не подходит т.к. подкоренное

~~$b q^9 =$~~

выражение $(25x+34)(3x+2) < 0$

$x = 30$ не подходит т.к. $b q^{11} = b q^9 \cdot q^2 < 0$,

а $b q^9 > 0$.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b, a < b, a^2 + b = 1000 \Rightarrow a < 1000 - a^2, a^2 + a < 1000 \Rightarrow a \in [-32, 31]$$

$$(a-c)^2 (b-c)^2 = p^2, \text{ где } p - \text{простое число}$$

$$\text{Тогда } a-c = \pm 1 \text{ или } \pm p \text{ или } \pm p^2$$

$$1) a-c=1, \text{ тогда } b-c=p^2.$$

$$b-a+1=p^2; 1000-a-a^2=p^2; b-a \equiv 2 \pmod{3}.$$

$b-a \equiv 1 \pmod{3}$ невозможно из-за того что квадраты дают остатки 0 и 1 при делении на 3.

$$\text{Тогда } b-a+1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p=3. b-a=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + a = 992 \Rightarrow a = 31, -32.$$

$$a=31, b=39, \text{ или } a=-32, b=-24.$$

Этот случай не подходит т.к. $b > a$.

$$2) a-c=-1: b-c=-p^2 \Rightarrow b-a-1=p^2$$

$$\text{Если } b-a \equiv 1 \pmod{3}, \text{ то } p=3. b-a-1=8,$$

$1000 - a^2 - a = -8, 1008 = a^2 + a$ - нет решений в целых. $b-a \equiv 2 \pmod{3}$ - невозможно т.к.

$-p^2$ дает остатки 0 и 2 при делении на 3.

$$3) a-c=p: b-c=p \Rightarrow a=b!?$$

$$4) a-c=-p: b-c=-p \Rightarrow a=b!?$$

$$5) a-c=p^2 \Rightarrow b-c=1 \Rightarrow a-b+1=p^2 \Rightarrow a-b \equiv 2 \pmod{3}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3:

Пусть $-1 \leq \cos x = t \leq 1$.

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

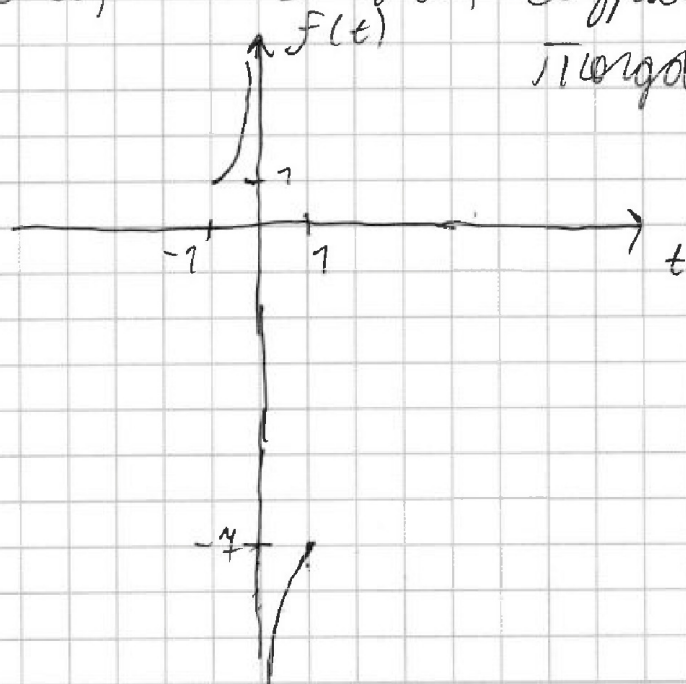
$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0 \quad \text{при } p=0: 3t^2 + 3t + 1$$

$$pt^3 = -3t^2 - 3t - 1$$

$$p = -\frac{3}{t} - \frac{3}{t^2} - \frac{1}{t^3} = f(t) \quad f'(t) = \frac{3}{t^2} + \frac{6}{t^3} + \frac{3}{t^4} =$$

$$= 3\left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^4}\right) = 3\left(\frac{t^2 + 2t + 1}{t^4}\right) = \frac{3(t+1)^2}{t^4} \geq 0$$

$f'(t) > 0 \Rightarrow f(t)$ возрастает



тогда решения будут

$$\text{при } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$



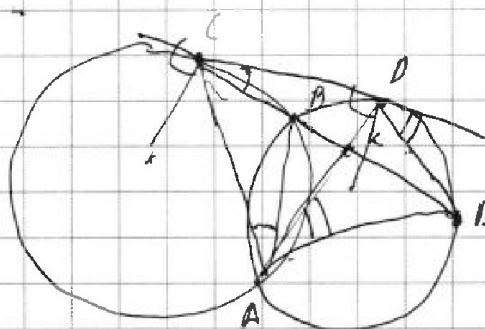
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



$$\begin{aligned}
 & p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 \\
 & 6 \cos 2x + 12 \cos x + 3p \cos x + 10 \\
 & 12 \cos 3x (\cos x + 6 \cos x + 3 \cos x (2+p) + 10) \\
 & (\cos 3x (p + 12 \cos x) + 10)
 \end{aligned}$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 6 \cos x + 6 \cos x + 3p \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x + 12 \cos 3x \cos x + 6 \cos x + 3p \cos x + 10$$

$$p (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6 (\cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10) = 0$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0 \quad p(\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$pt^3 - t^3 + t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$pt^3 - t^3 = (t+1)^3$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^3 x + 3 \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x =$$

$$p = -30(-3a^2 - a^3)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

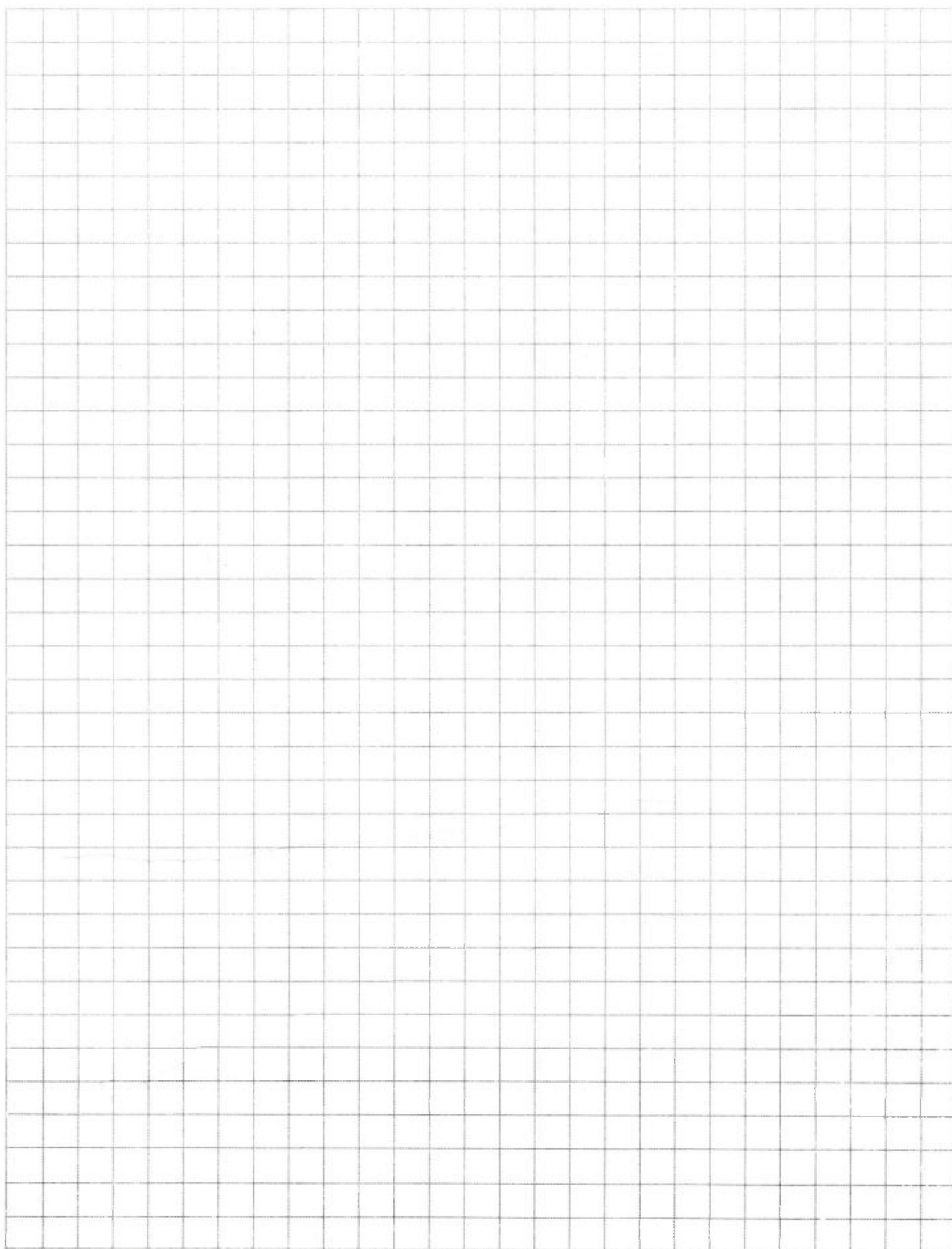
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$-992/37 = -\frac{32}{32} - \frac{3}{2} \quad 18 + 9 \quad x_1 + 2x_2 = \frac{3}{2} \quad 3t^2 - 3t + 1 = 0 \quad -\frac{3}{2} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}$$

$$6^2 \cdot 26 = 25 \times 34 \quad x_1 x_2 x_3 = 1 \quad - (x-3)(x+6) \quad \therefore \frac{3}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}$$

$$-28 \quad \sqrt{(3x+2)^2} \quad 800 - 12 \cdot 4 = 452 \quad b = 1000 - a^2 \quad 3t^2 - 3t - 1$$

$$25 - 42 = 20 - 3x - x^2 \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{t^3}$$

$$6x \quad 72x \quad \frac{1}{2} = -24x \quad \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} \geq -3 \quad x-6 \quad \sqrt{\frac{-12-x^2}{2}} \quad 3(3x+2)^3$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2 \quad +4 = 2 \quad \sqrt{y-3x-x^2+2} \quad a+a \leq 40^2$$

$$y+2 \mid +2 \mid y-78 \mid = \sqrt{400-z^2} \quad 20 \leq z \leq \sqrt{1258+291} \quad 78 \quad \frac{2}{11} \quad \frac{99}{49}$$

$$((2x)^2 - (25x+34))((2x)^2 - 10x - 39) = 0 \quad 78 = 6 \cdot 13 \quad x \geq -6 \quad 78 - \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = 41 \quad \frac{1001}{1001}$$

$$x^2 - 29x + 40 \quad 20 \quad y = 20 \quad \frac{x+25}{2} \quad \frac{475}{24} \quad z = 0 \quad 6^2 \cdot 26 = 125 \times 34 \quad (x \quad 72 - 18 - 9 \quad 9$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2 \sqrt{78-3x-x^2} = 2\sqrt{(3-x)(6+x)}$$

$$504 \cdot 445 + 34 \cdot 447 \quad x \cdot \frac{35}{2} \quad \frac{145}{105} \quad 2 \quad a-b \times 4 \quad \frac{4x}{33} \quad \frac{33}{33} \quad \frac{47}{47} \quad \frac{526}{526}$$

$$a-b+4=2ab \quad a-b+4=20 \quad b=0 \quad y: 1024-32=37 \quad 699 \quad 47 \quad 44 \quad + \frac{8}{8} \quad 2$$

$$3 \quad \therefore \quad a-b+2d^2+x-b+1-2ab = \sqrt{37} \quad 3pt^3 + 12t^2 + 12t \quad 224 \cdot 4 + 10 = 0 \quad 36 \cdot 16 \cdot 42 \cdot 64 \quad 37 \quad 896$$

$$a^2 + b^2 = 3 \quad a-b + (a-b)^2 + ab + b + 1 = 0 \quad 36 \cdot 16 \cdot 42 \cdot 64 \quad 37 \quad 896$$

$$3\sqrt{x+6} - 3\sqrt{3-x} \geq 3 \quad x+32 \quad \frac{32}{64} \quad \frac{36}{1024} \quad 4 \cdot 73 \cdot 10 \quad \frac{37}{37} \quad \cos x = t \quad 150 \quad 60$$

$$a-b+4=2ab \quad a^2+b^2=9 \quad p(8t^3-9t) +$$

$$a^2+b^2=2 \quad a^2+b^2=1000 \quad b-a=8 \quad a-b+a^2+b^2-2ab-2=0 \quad a^2+a=992+6(2t^2-1)+3(p+4)t+1020$$

$$-2 \quad 7 \quad \frac{x+19}{25} \quad 9 - 2\sqrt{x+6} \sqrt{3-x} = 4p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1$$

$$\sqrt{x+6} \sqrt{3-x} = -2 \quad 5 = 2\sqrt{x+6} \sqrt{3-x} \quad \frac{25}{4} = (x+6)(3-x) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

$$t \geq 0 \quad 3t^2 + 3t + 2 = 0 \quad 3pt^2 + 6t + 3 \quad \frac{2}{t^2}$$

