



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $\alpha = -q^4$ $\begin{cases} \beta = 6 - \alpha \\ \beta^2 q^4 = -q^4 (-73q^4 - 48) \end{cases} \Rightarrow \beta^2 = 73q^4 + 48$

(1): $\beta = 6 + q^4$ $36 + 72q^4 + q^8 = 73q^4 + 48$ $\alpha = -q^4 \Rightarrow q^4 = -\alpha$

$\alpha^2 - 72\alpha + 36 = -73\alpha - 48$

$\alpha^2 + \alpha + 84 = 0$ $D = 1 - 4 \cdot 84 < 0$ корней нет.

Ответ: $x = 3, x = 20$

Проверим случаи: $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 27$

1) $\alpha_1 = 4$ - подходит по ОДЗ (иногда по условию задачи $x > 0$)

и при $\alpha_1 = 4$ $\beta > 0$ и $\beta q^4 > 0$, $\beta \cdot \frac{1}{q^4} > 0 \Rightarrow 4 = x + 7$ $x = 3$

2) $\alpha_2 = 27$ - подходит по ОДЗ, но $\beta = 6 - \alpha < 0 \Rightarrow$ не имеет

противоположных (и.к. $q > 0$), но 7-ой и 13-ой члены положительны - противоречие?! $\otimes$

2) $\alpha = -q^4$ $\begin{cases} \beta = 6 - \alpha \\ \beta^2 q^4 = -q^4 (-73q^4 - 48) \end{cases} \Rightarrow \beta^2 = 73q^4 + 48$ $q^4 = -\alpha$

$36 - 72\alpha + \alpha^2 = -73\alpha + 48$

$\alpha^2 + \alpha - 12 = 0$

$\alpha_1 = -4$ $-4 + 3 = -1$

$\alpha_2 = 3$ $-1 + 3 = 2$

и.к. $\alpha = -q^4 < 0$, но $\alpha_2 = 3$ X

$\alpha_1 = -4$ - проверим по ОДЗ:

1) $\frac{73\alpha - 48}{\alpha^2} > 0 \quad \text{①}$

2) $(73\alpha - 48) \alpha > 0 \quad \text{②}$

$\beta > 0 \Rightarrow \alpha = -4$ подходит.

$-4 = x + 7 \Rightarrow x = -11$

Ответ: $x \in \{3; -5\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b + 5 = 2ab \quad a, b \geq 0$$

$$a - b = 2ab - 5$$

$$a = \sqrt{x+3}$$

$$b = \sqrt{4-x}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 20ab + 25$$

$$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} + 4-x = 4(x+3)(4-x) - 20\sqrt{(x+3)(4-x)} + 25$$

$$\text{Пусть } d = \sqrt{(x+3)(4-x)} = ab, \quad d \geq 0$$

$$3 - 2d + 4 = 4d^2 - 20d + 25$$

$$7 - 2d = 4d^2 - 20d + 25$$

$$4d^2 - 18d + 18 = 0$$

$$2d^2 - 9d + 9 = 0$$

$$D_d = 81 - 8 \cdot 9 = 81 - 72 = 9 = 3^2$$

$$d_1 = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3 > 0 \quad \textcircled{1}$$

$$1) \quad d=3: \quad (x+3)(4-x) = 9$$

$$-x^2 + x + 12 = 9$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x \in [-3; 4]$$

$$\text{Проверим по } \textcircled{1}: \quad \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \leq 4$$

$$(\cdot) \quad 1 + \sqrt{13} \leq 8$$

$$(\cdot) \quad \sqrt{13} \leq 7 \quad \textcircled{2}$$

x_1 - подходит.

$$(\cdot) \quad \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \geq -3$$

$$(\cdot) \quad 1 - \sqrt{13} \geq -6$$

$$(\cdot) \quad 7 \geq \sqrt{13} \quad \textcircled{3}$$

x_2 - подходит.

$$2) \quad d = \frac{3}{2}: \quad -x^2 + x + 12 = \frac{9}{4}$$

$$4x^2 - 4x + 39 = 0$$

$$x_1 = \frac{4 + 8\sqrt{10}}{8}$$

$$x_2 = \frac{4 - 8\sqrt{10}}{8}$$

Проверим по $\textcircled{1}$:

$$(\cdot) \quad \frac{4 + 8\sqrt{10}}{8} \leq 4$$

$$(\cdot) \quad 4 + 8\sqrt{10} \leq 32 - 4 = 28$$

$$(\cdot) \quad 2\sqrt{10} \leq 7$$

$$(\cdot) \quad 40 \leq 49 \quad \textcircled{4}$$

$$(\cdot) \quad \frac{4 - 8\sqrt{10}}{8} \geq -3 \quad (\cdot) \quad -8\sqrt{10} \geq -28$$

x_2 - подходит.

Ответ: $y=12, z=0, x \in \left\{ \frac{4+8\sqrt{10}}{8}; \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right\}$

$\textcircled{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

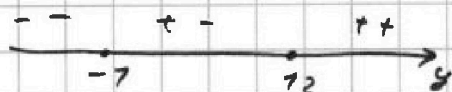
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{23} \quad \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z^2} & (1) \\ |y+7| + 3|y-72| = \sqrt{73^2 - z^2} & (2) \end{cases} \quad \sqrt{73^2 - z^2} \leq \sqrt{73^2} = 73$$

из (2) получим: $|y+7| + 3|y-72| \leq 73$



$$1) y \geq 72$$

$$4y + 7 - 36 \leq 73$$

$$4y \leq 73 + 35$$

$$4y \leq 48$$

$$y \leq 12 \Rightarrow y = 72$$

$$2) -7 \leq y < 72$$

$$4y + 7 - 3y + 36 \leq 73$$

$$-2y + 37 - 73 \leq 0$$

$$2y \geq 24$$

$$y \geq 12 \quad \emptyset$$

$$3) y < -7$$

$$-y - 7 - 3y + 36 \leq 73$$

$$4y \geq 35 - 73$$

$$4y \geq -22$$

$$y \geq \frac{-22}{4} > -7 \quad \emptyset$$

Значит (2) может выполняться только в случае:

$$y = 72 \quad \text{и} \quad z^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \quad \text{и} \quad y = 72 \quad \text{покажем в (1)}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{72+x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+72}$$

Заметим, что:

$$-x^2+x+72 = (x+3)(4-x)$$

$$\text{Пусть } \sqrt{x+3} = a, a \geq 0$$

$$\sqrt{4-x} = b, b \geq 0$$

$$\text{тогда: } a - b + 5 = 2ab$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13) $\cos x = t \quad -7 \leq t \leq 7$

$\cos 2x = 2t^2 - 7$

$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$

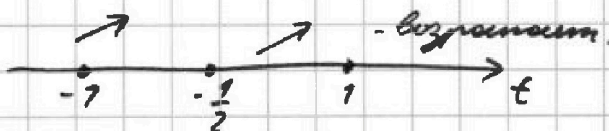
$\cos 3x = 4t^3 - 3t$

$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

нарисуем график функции $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$
на промежутке $[-7; 7]$

$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t + 1)^2$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$



$\forall t \neq -\frac{1}{2} \quad f'(t) > 0$

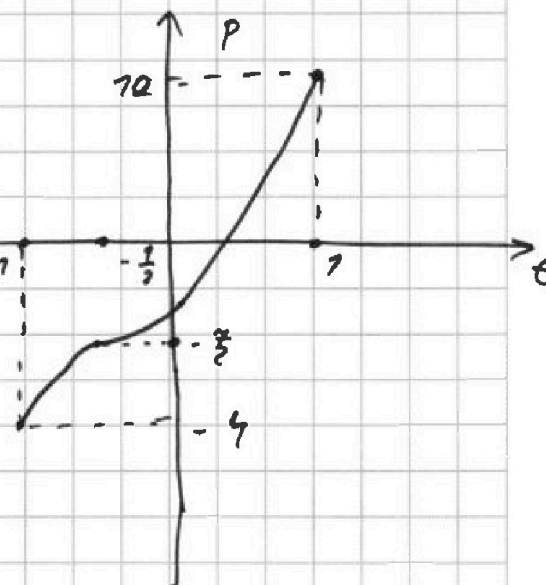
Значит, $-\frac{1}{2}$ - точка перегиба, а $f(t)$ монотонно возрастает;

$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{2^2}{2^3} + \frac{2 \cdot 3}{2^2} - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$

$f(-7) = -4 + 7 + 3 - 3 = -4$

График:

$f(7) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$



Из графика видно, что уравнение относительно t (а следовательно относительно x) имеет решение только при $p \in [-4; 10]$

$-7 \leq t \leq 7$

т.е. $-7 \leq \cos x \leq 7$

Ответ: $p \in [-4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы знаем, что функция монотонно возрастает и имеет решение только при $p \in [-4; 10]$, при этом решение относительно t - единственное (при $p \in [-4; 10]$)

Ответ: есть решение только при $p \in [-4; 10]$

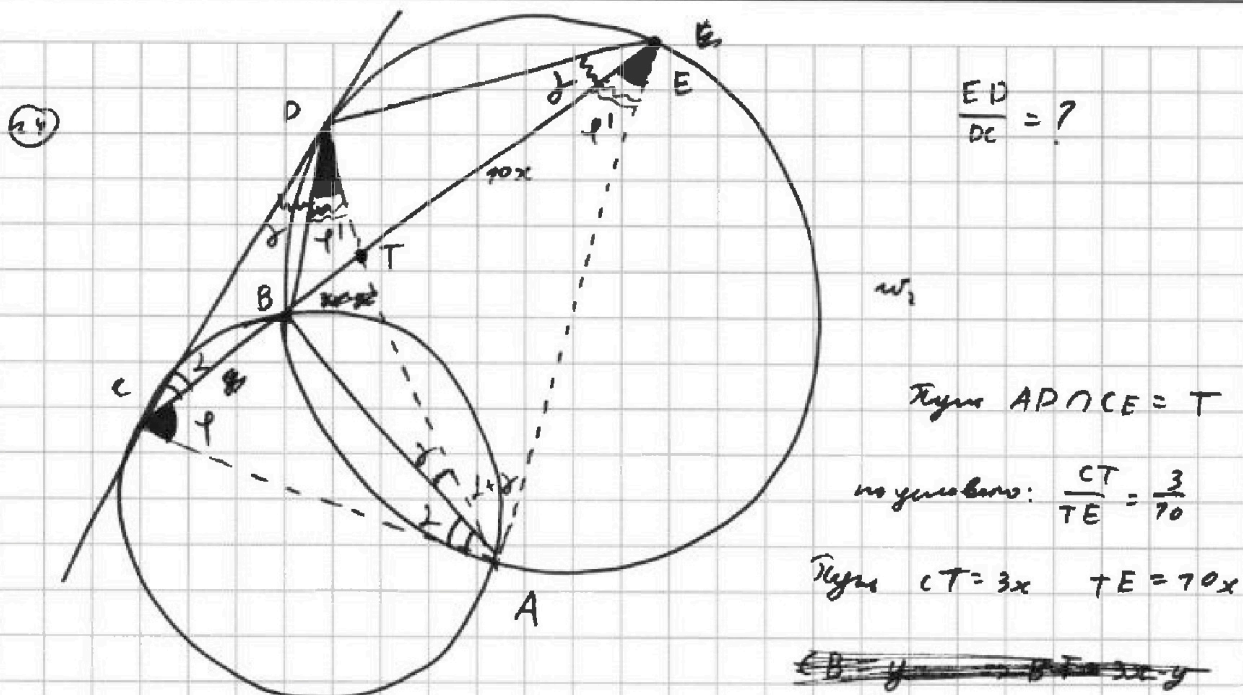


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Поиск искомой и искомого~~

~~$ED^2 = 8 + 13x$~~

$\angle CDB = \alpha = \angle DEB = \angle DAB$
 $\angle DCB = \beta = \angle BAC$

Т.с.с.с.с. $\triangle CBP$: $\frac{BD}{\sin \beta} = \frac{CB}{\sin \alpha}$

$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{BD}{BC}$

Т.с.с.с.с. $\triangle CDE$: $\frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{DE}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{ED}{DC} = ?$

Значит: $\frac{BD}{BC} = \frac{ED}{DC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

$\angle DBE = \angle DAE = \beta + \alpha = \angle DAC = \beta + \alpha$

Значит $AT \parallel DE$ AT - медиана $\triangle ACE$:

по свойству медианы: $\frac{CT}{TE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{70}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) посчитаем кол-во клеток, симметричных относительно центра. разобьем доску на 4 области.

100	2 ℓ_1	ℓ_2 1
100	1'	2'
	125	125

Зам., что область 1' восстановив-
ших по области 1. Аналогично с 2 и 2'
~~Заметим, что симметричные~~

Выберем некоторую расстановку из способа (1).

Выберем, где клетки, выбравшие в областях 1' и 2', и

симметричные их относительно ℓ_2 (при этом они

могут перейти сами в себя). Очевидно, что мы

получим расстановку, симметричную относительно

центра таблицы. Аналогично сделав со всеми

способами (2). Зам., что таким образом мы

получим всевозможные расстановки вида (3).

Заметим, что некоторые расстановки мы
посчитали несколько раз, а именно те, кото-
рые симметричны относительно ℓ_1 и ℓ_2 .

Их мы посчитали 4 раза. ~~З~~ Значит надо отнять 3
умноженных на кол-во таких расстановок.

Посчитаем их количество.

область 1

Заметим, что ~~заметим, что~~ симметричные 2 клетки в ~~области 1~~
~~области 1~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) автомобили восстанавливаются одновременно.

I: 200 и 775. Значит ко-во машин составит: C_{77500}^2

Всего поврежденных машин составит:

$$C_{25000}^4 + C_{23000}^4 + C_{21000}^4 + C_{19000}^4 - 3 \cdot C_{17500}^2 =$$

$$= 2 \cdot C_{25000}^4 + 2 \cdot C_{23000}^4 - 3 \cdot C_{17500}^2 = 4 \cdot C_{25000}^4 - 3 \cdot C_{17500}^2$$

Ответ: $4 \cdot C_{25000}^4 - 3 \cdot C_{17500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \begin{cases} a-c=7 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b=-(p^2-7) \quad \text{аналогично } p=3$$

$$\begin{cases} a-c=7 \Rightarrow -c=7-a \\ b-c=9 \Rightarrow b+7-a=9 \Rightarrow a=b-8 \\ a+b^2=560 \end{cases} \Rightarrow b^2+b-8=560 \Rightarrow b^2+b-568=0$$

$$D_0 = 7+4 \cdot 568 = 2273 \quad 47^2 < 2273 < 48^2 \Rightarrow D_0 \text{ не кв} \Rightarrow \Rightarrow \text{нет целых решений.}$$

$$6) \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-7 \end{cases} \Rightarrow a-b=-(p^2-7) \quad \text{аналогично } p=3$$

$$\begin{cases} a-c=-9 \\ b-c=-7 \Rightarrow -c=-7-b \\ a+b^2=560 \end{cases} \Rightarrow a-b=-8 \Rightarrow a=b-8$$

$$b^2+b-568=0 \quad \text{аналогично случаю (5) нет целых решений.}$$

Значит найдем все тройки:

(a, b, c)
(37, 23, 32)
(-16, -24, -75)
(37, 23, 22)
(-16, -24, -25)

~~Ответ: (a, b, c)
(37, 23, 32)
(-16, -24, -75)~~

Ответ: (a, b, c) :
(37, 23, 32), (37, 23, 22)
(-16, -24, -75), (-16, -24, -25)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26

$$(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \quad a > b$$

$$\begin{cases} 3 + a - b \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad p \in \mathbb{P}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$1) \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow a = b \quad ?!$$

X

~~Решаем, как обычно~~

$$2) \begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} \Rightarrow a = b \quad ?!$$

X

~~или другим~~

Решим, как обычно
или другим методом 3 другим

$$3) \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 7 \end{cases} \quad -c = 7 - b$$

$$a - b = p^2 - 7$$

квадраты: $x \mid x^2$

0	0
1	1
2	4

если $3 \mid x$ $x^2 \equiv 0$
если $3 \nmid x$ $x^2 \equiv 1$

(МТФ для 3)

$$\Rightarrow \text{если } p \neq 3, \text{ то } p \nmid p^2 - 7$$

и значит $p^2 - 7 \equiv 0 \pmod{3}$
 $\Rightarrow 3 \mid a - b \quad X$

$$b^2 + b + 8 = 560 \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$$

$$D_b = 2209 = 47^2 \Rightarrow b_1 = 23 \Rightarrow a_1 = 37$$

$$c_1 = b_1 - 7 = 22 \quad b_2 = -24 \Rightarrow a_2 = -16$$

$$c_2 = b_2 - 7 = -25$$

$$(37, 23, 22) \quad (-16, -24, -25)$$

✓

значит $p = 3$

$$\begin{cases} a-c = 9 \\ b-c = 7 \\ a+b^2 = 560 \end{cases} \Rightarrow -c = 7 - b$$

$$a = 8 + b$$

$$\begin{cases} a+b = 108 \Rightarrow a = 100 \\ a+b^2 = 560 \Rightarrow 10 - b + b^2 = 560 \end{cases}$$

$$b^2 - b - 550 = 0$$

$$\begin{cases} b_1 = 23, b_2 = -24 \\ b_1 = 23 \Rightarrow a_1 = 37 \\ b_2 = -24 \Rightarrow a_2 = -16 \end{cases}$$

$$D_b = 2209 = 47^2 \Rightarrow b_1 = 23, b_2 = -24$$

~~или другим методом~~

$$\Rightarrow a = 37, b = 23, c = 22$$

$$a = -16, b = -24, c = -25$$

$$(37, 23, 22) \quad (-16, -24, -25)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

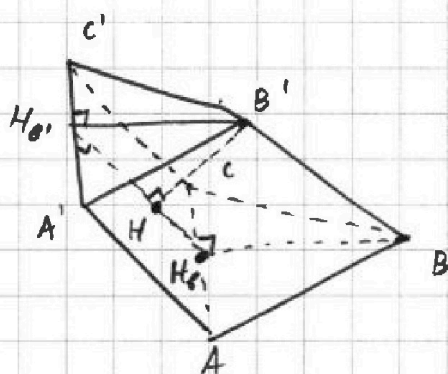
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⊛ Введите обозначения как показано на рисунке.



$$AB = BC = AC = A'B' = A'C' = B'C' = 7$$

по условию.

$$\text{Пусть } S_{A'B'B'} = S_{B'B'C'C'} = 4$$

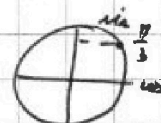
$$S_{A'C'C'} = 3$$

Нр. Опустим высоту BH_0 в $\triangle ABC$.

β - плоскость $(BB'H_0)$

Заметим, что плоскость симметрична относительно β . $\Rightarrow S_{A'H_0B'H_0} = \frac{3}{2}$ ($H_0' = \beta \cap A'C'$)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$\text{Пусть } h - \text{высота призмы} \Rightarrow V_{AB'B'} = V_{AB'C'} = V_{AB'C'C'} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Пусть α - высота из точки A' на плоскость $(BB'C'C')$

В силу симметрии высота из C' на плоскость $(A'A'B'B')$ тоже равна α .

Пусть β - высота из B' на плоскость $(A'A'C'C')$.

$$V^{\beta} - \text{объем призматического } ABCB': V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot A = \frac{1}{3} \cdot \alpha \cdot 2$$

$$V = \frac{2}{3} \alpha \quad \text{т.к. } S_{A'B'B'} = \frac{S_{A'A'B'B'}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot V_{ABC} \cdot h_{B'}$$

$$\text{т.к. } B'H_0' \parallel (ABC) \quad S_{A'H_0'C'} = \frac{S_{A'A'C'C'}}{2} = \frac{3}{2} \quad V_{AB'C'H_0'} = V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \beta = 2\beta$$

$$2\beta = \frac{2}{3} \alpha \Rightarrow 3\beta = \alpha$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} h = \frac{2}{3} \cdot 3\beta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} h = 2\beta$$

$$h = \frac{24\beta}{\sqrt{3}}$$

Пусть H - основание β в силу симметрии

высоты.

$$B'H = \beta$$

$$H \in H_0H_0'$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} - 5$$

$$7 - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 4(x+3)(4-x) - 20\sqrt{(x+3)(4-x)} + 25$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$16t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 89 = -8 < 0$$

$$1) -x^2 + x + 12 = 9$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 x_2 = -3$$

$$2) -x^2 + x + 12 = \frac{9}{4}$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 39 = 160 \quad 4x^2 - 4x - 39 = 0 \quad \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-39)} = 4 \pm \sqrt{160} = 4 \pm 4\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{4 + 4\sqrt{10}}{4} = 1 + \sqrt{10} > 4$$

$$4 + 8\sqrt{10} \leq 4 \cdot 8$$

$$7 + 2\sqrt{20} \leq 8$$

$$2\sqrt{20} \leq 1$$

$$x_2 = \frac{4 - 4\sqrt{10}}{4} = 1 - \sqrt{10} < -3$$

$$4 - 8\sqrt{10} \geq -3 \cdot 8$$

$$40 \leq 49$$

$$7 - 2\sqrt{20} \geq -6$$

$$2\sqrt{20} \leq 13$$

$$40 \leq 49$$

$$7t^2 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$$

$$-4 + 3 - 3 + 6 - 6 = -4$$

$$7t^3 + 3t + 6t^2 - 3 = p$$

$$f(-1) = -4 + 6 + 3 - 3 = 2$$

$$= -4$$

$$f'(t) = 21t^2 + 7t + 3 = 3(2t+7)^2$$

$$t = -\frac{7}{2}$$

$$7 - 3 + 6 - 3 + 6 = 20$$

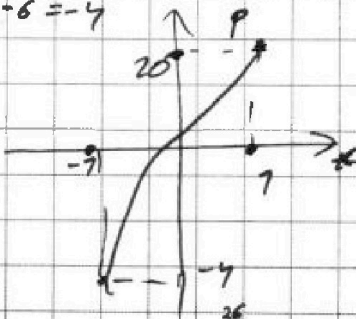
$$f(1) = 4 - 3 - 3 = -2$$

$$4t^3$$

$$4 \cos^3 x + 3(\cos 2x + \cos x)$$

$$(37 - 22)(23 - 22)$$

$$(-16 + 25)(-24 + 25)$$

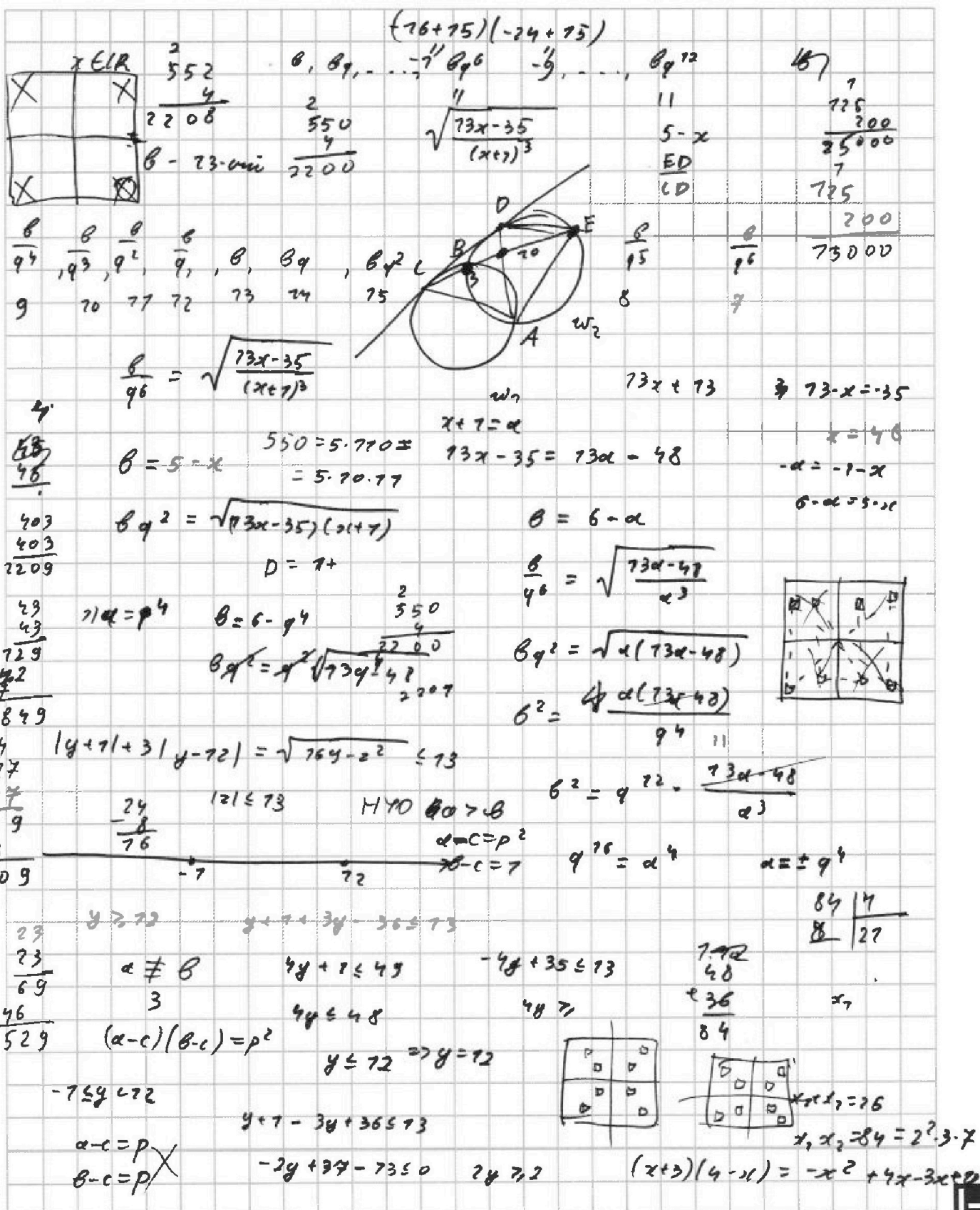


$$\begin{array}{r} 36 \\ 41 \\ 48 \\ 384 \\ 152 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 41 \\ 48 \\ 384 \\ 152 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$47$$

$$8 \cdot 8 = 64$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

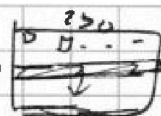
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$27-3$$

$$x \leq 4$$

$$\alpha - \beta + 5 = 2\alpha\beta \leq 2 \cdot 7 = 14$$

$$\alpha - \beta \leq 9^{200}$$



$$\sqrt{x+3} \leq \sqrt{7}$$

$$\sqrt{x+3} + 5 \leq \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 \Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \leq 2x$$

$$\geq \sqrt{x+3} + 5$$

$$\sqrt{4-x} \leq \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$$

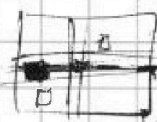
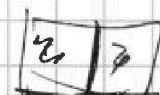
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 25 - 20\alpha\beta + 4\alpha^2\beta^2$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} \geq 7 \Leftrightarrow \alpha\beta$$

$$\sqrt{x+3} \leq 9$$

$$x+3 \leq 81$$

$$x \leq 78$$



$$DB = t$$

$$\frac{6}{\sin \angle} = \frac{y}{\sin \angle}$$

$$\frac{t}{y} = \frac{\sin \angle}{\sin \angle}$$

$$\alpha - \beta + 5 \leq \alpha^2 + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \alpha + \beta^2 + \beta - 5 \geq 0$$

$$\sqrt{x+3} \leq 2$$

$$x+3 \leq 4$$

$$x \leq 1$$

$$\frac{DB}{DE} = \frac{y}{\sqrt{73}xy} = \frac{Da}{70}$$

$$7 - 4\theta^2 - 4\theta + 20 \geq 0$$

$$= \sqrt{\frac{4}{73x}}$$

$$4\theta^2 + 4\theta - 21 \leq 0$$



$$-\frac{2}{3} + \frac{x-3}{2} - \frac{3}{2} - 3 =$$

$$= -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2} = -\frac{x}{2}$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 \cdot x_2 = -3$$

$$x_1 =$$

$$D = 7 + 4 \cdot 3 = 19$$



$$\omega x = t$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$y$$

$$\frac{t}{\sin \angle} = \frac{AB}{\sin \angle}$$

$$\frac{y}{\sin \angle} = \frac{AB}{\sin \angle}$$

$$\sin^2 x = 7 - t^2$$

$$3-p$$

$$\text{т.к. } y = 1$$

$$2t^3 - t - 2t + 2t^3 = 4t^3 - 3t$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p$$

$$p = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$-24 - 4$$

$$\frac{78}{39}$$

$$D = 76 + 76 \cdot 39 =$$

$$= 76(40) = 4^2 \cdot 8 \cdot 5 =$$

$$= 4^2 \cdot 4 \cdot 70$$

$$\sqrt{D} = 4 \cdot 2 \sqrt{70} = 8\sqrt{70}$$

$$x_1 =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1



2



3



4



5



6

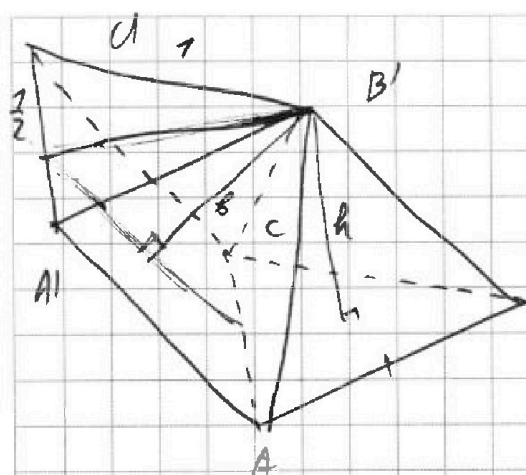


7

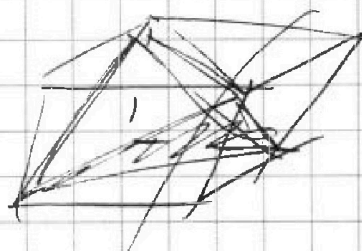
СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$V = \frac{1}{3} A \cdot S$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.7

θ - 73й этаж

q - радиус

$q \neq 0$

$\frac{\theta}{q^6} = 75$ этаж

Хочу $x + 7 = \alpha$

$\theta q^2 = 75$ этаж

$$73x - 35 = 73\alpha - 48$$

$$5 - x = 6 - \alpha$$

По условию:

$$\begin{cases} \theta = 6 - \alpha & (1) \\ \frac{\theta}{q^6} = \sqrt{\frac{73\alpha - 48}{\alpha^3}} & (2) \\ \theta q^2 = \sqrt{\alpha(73\alpha - 48)} & (3) \end{cases}$$

$$(3): \theta^2 = \frac{\alpha(73\alpha - 48)}{q^4}$$

$$(2): \theta^2 = q^{12} \cdot \frac{73\alpha - 48}{\alpha^3}$$

$$q^{16} = \frac{(73\alpha - 48)}{(73\alpha - 48)} \cdot \alpha^4$$

$$1) \alpha = q^4 \begin{cases} \theta = 6 - \alpha & (1) \\ \theta^2 q^4 = \alpha(73\alpha - 48) & (4) \end{cases}$$

$$q^{16} = \alpha^4 \Rightarrow \alpha = \pm q^4$$

$$(4): \theta^2 q^4 = q^4(73q^4 - 48)$$

$$(6 - q^4)^2 = 6 \cdot 73q^4 - 48$$

$$(1) \theta = 6 - \alpha = 6 - q^4$$

$$(6 - \alpha)^2 = 73\alpha - 48$$

$$36 - 12\alpha + \alpha^2 = 73\alpha - 48$$

$$\alpha^2 - 25\alpha + 84 = 0$$

$$\text{по т. Виетта: } \alpha_1 = 4$$

$$\alpha_2 = 27$$

$$4 = 2 + 2 \Rightarrow x = 20$$

$$27 = 20 + 7 \Rightarrow x = 20$$

$$2) \alpha = 27 \begin{cases} \theta = 6 - \alpha \\ \theta^2 q^4 = \alpha(73\alpha - 48) \end{cases}$$

Проверим 3 макс. корня.

$$1. \alpha_1 = 4 \quad 4 \cdot (73 \cdot 4 - 48) > 0 \quad (V) \Rightarrow \Rightarrow 4 = x + 7 \quad x = 3$$

$$2. \alpha_2 = 27 \quad 27 \cdot (73 \cdot 27 - 48) > 0 \quad (V) \Rightarrow \Rightarrow 27 = x + 7 \Rightarrow x = 20$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AC}{EA} = \frac{3}{70}$$

$$\angle ECA = \varphi \cdot \angle BDA = \angle BFA = \varphi'$$

т. треугол. $\triangle ACE$: $\frac{AC}{\sin \varphi'} = \frac{AE}{\sin \varphi}$ $\frac{AC}{EA} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{3}{70}$

т. треугол. $\triangle CBA$: $\frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{CB}{\sin \angle C}$ (1)

т. треугол. $\triangle ABD$: $\frac{AB}{\sin \varphi'} = \frac{BD}{\sin \angle D}$ (2)

$$(1) / (2): \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle D} \cdot \frac{CB}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{BD}{BC} = t, \quad t = ?$$

$$t = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle D} \Rightarrow \frac{\sin \angle C}{\sin \angle D} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'}$$

$$t^2 = \left(\frac{3}{70} \right)^{-1} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{70}{3}} \quad t = \sqrt{\frac{70}{3}}$$

$$t = \frac{ED}{DC} = \left(\sqrt{\frac{3}{70}} \right)^{-1} = \sqrt{\frac{70}{3}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{70}{3}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{70}{3}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) $\begin{cases} \alpha - c = -7 \\ \beta - c = -p^2 \end{cases}$ ~~(указан случай не в силу $\alpha > \beta$)~~
 $\alpha - \beta = +7 + p^2$ ~~стационарно~~ ~~случаю (3) получили $p=3$~~

$$\begin{cases} \alpha - c = -7 \Rightarrow c = \alpha + 7 \\ \beta - c = -9 \\ \alpha + \beta^2 = 560 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha - 7 = -9 \Rightarrow \alpha = \beta + 8 \\ \alpha + \beta^2 = 560 \end{cases} \Rightarrow \beta + 8 + \beta^2 = 560$$

$$\beta^2 + \beta - 552 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 552 = 2209 = 47^2 \quad \beta_1 = \frac{-1 + 47}{2} = \frac{46}{2} = 23$$

$$\beta_2 = \frac{-1 - 47}{2} = \frac{-48}{2} = -24$$

1) $\beta_1 = 23 \Rightarrow \alpha = 31 \Rightarrow c = 32$

$$\alpha - \beta = 31 - 23 = 8 \div 3 \text{ } \textcircled{\times}$$

$$31^2 + 23^2 = 560 \text{ } \textcircled{\times}$$

222

2) $\beta_2 = -24 \Rightarrow \alpha = -76 \Rightarrow c = -75$

$$-76 + 24 = 8 \div 3 \text{ } \textcircled{\times}$$

$$-76 + 24^2 = 560 \text{ } \textcircled{\times}$$

~~Ответ: 1) $\alpha = -76$ $\beta = -24$ $c = -75$
 2) $\alpha = 31$ $\beta = 23$ $c = 32$~~