



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)}, \text{ девятый член равен } x+3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} bq^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \\ bq^8 = x+3 \\ bq^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}, \text{ где } b - \text{первый член прогрессии, а } q - \text{разность.}$$

$$b > 0 \Rightarrow bq^8 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow \begin{matrix} -3 & \frac{9}{25} & 6 & x \end{matrix}$$

Разделим 3-е на 1-е и 2-е:

$$\begin{cases} q^8 = \frac{1}{(x-6)^2} \\ q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+3} \end{cases} \Rightarrow q^{\frac{8}{6}} = \frac{1}{x-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}} \\ q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+3} \Rightarrow (x+6) \cdot \frac{\sqrt{25x-9}}{x+3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x-9 = x^2+6x+9 \Rightarrow x^2-19x+18=0 \Rightarrow x = \begin{matrix} 18 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow x=18$$

Подстановкой можно убедиться, что 18 подходит:

Ответ: 18

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$4p \cos^3 x - 2 \cos x p + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^3 x + 4$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^3 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$p \cos 3x - 3 \cos^3 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = t : (t-1)^3 = t^3(1-p) \quad \text{при } t=0 \text{ реш. нет } \Rightarrow t \neq 0$$

$$-1 \leq t \leq 1 \quad \sqrt[3]{1-p} = \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{t} = 1 - \sqrt[3]{1-p}$$

$$1 - \sqrt[3]{1-p} = 0 \text{ тоже не подходит}$$

$$t = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt[3]{1-p} \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

При каких p решений будет бесконечно много.

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; \infty)$$

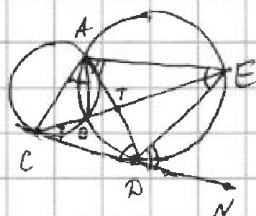


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N4

$$\angle AED = \angle ADC = x, \angle EAD = \angle EDN = y, \angle EAB = \angle ECD = z \text{ как } \\ \text{углы, опирающиеся на одну дугу.}$$

$$\angle CED = 180 - (180 - y) - z = y - z = \angle BAD \text{ (одна дуга)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CAT = \angle BAD + \angle CAB = y - z + z = y$$

$$\begin{aligned} \angle CAT = y = \angle TAE \\ \angle ADC = x = \angle AED \end{aligned} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AED \text{ по 2-м углам} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}; \quad \text{т.к. } AT - \text{биссектр.} \quad \frac{AE}{AC} = \frac{TE}{TC} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AD \cdot AC}{AE} \Rightarrow AC^2 = AD^2 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow AD = AC \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AD}{AC} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{5}{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Если $(a-c)(b-c)$ - квадрат простого числа p , то

возможны случаи: $a-c=b-c=p$ или $\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$

Умножив первое условие, получаем, что 2-ой случай не подходит. Рассмотрим первый: $a-c=b-c \Rightarrow a=b \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2+a=710 \Rightarrow D=1+4 \cdot 710=2841, \text{ что не явл. квадратом } \Rightarrow$$

$\Rightarrow a$ будет не целое $\Rightarrow$ 1 случай не подходит.

Остался 3-ий: $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow (1+c)^2+p^2+c=710 \Rightarrow D=9-4p^2+4 \cdot 709 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p \leq 26 \Rightarrow p \in \{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}. \text{ Из 2-го условия:}$$

$$b-a=p^2-1 \Rightarrow \text{надо чтобы } (p-1)(p+1) \text{ не делилось на 3,}$$

а т.к. $p-1$ и $p+1$ взаимно просты, то надо чтобы $p-1$ и $p+1$ не делились на 3 $\Rightarrow p \in \{3\} \Rightarrow a=1+c$ и $b=9+c$.

$$\text{Рассмотрим (1): } c^2+3c+p^2-709=0 \Rightarrow c^2+3c-700=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{-3 \pm 53}{2} = \begin{cases} 25 \\ -28 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } (26; 34; 25) \text{ и } (-27; -19; -28)$$

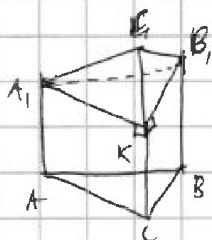
На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 **2** **3** **4** **5** **6** **7**

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



NZ

Решение $A, A=x, C, C=y, B, B=z, AC=BC=AB=a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2}a=3 \\ \frac{y+z}{2}a=3 \\ \frac{x+z}{2}a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+ay=6 \\ ay+az=6 \\ ax+az=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{a} \\ z=\frac{2}{a} \\ y=\frac{4}{a} \end{cases}$$

Problem $B, K \parallel BC \Rightarrow B, K \perp KC \Rightarrow C, K = y - z$ u $B, K = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{C, BK} = \frac{a \cdot y - x}{2} = 1$$

Не трудно заметить, что высота ABE - высота пирамиды

$$A, C, B, K \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow V_{A,C,B,K} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{A,B,K} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot 1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{h \cdot a}{2} = 1 \text{ no you} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{A, B, C} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{3}}$$

7. k. $A_1 A_2 KC = B_1 B_2$, mo $V_{ABC, KA_1} = x \cdot S_{ABC} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Суммарный объем: $\sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3}$

Answer: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

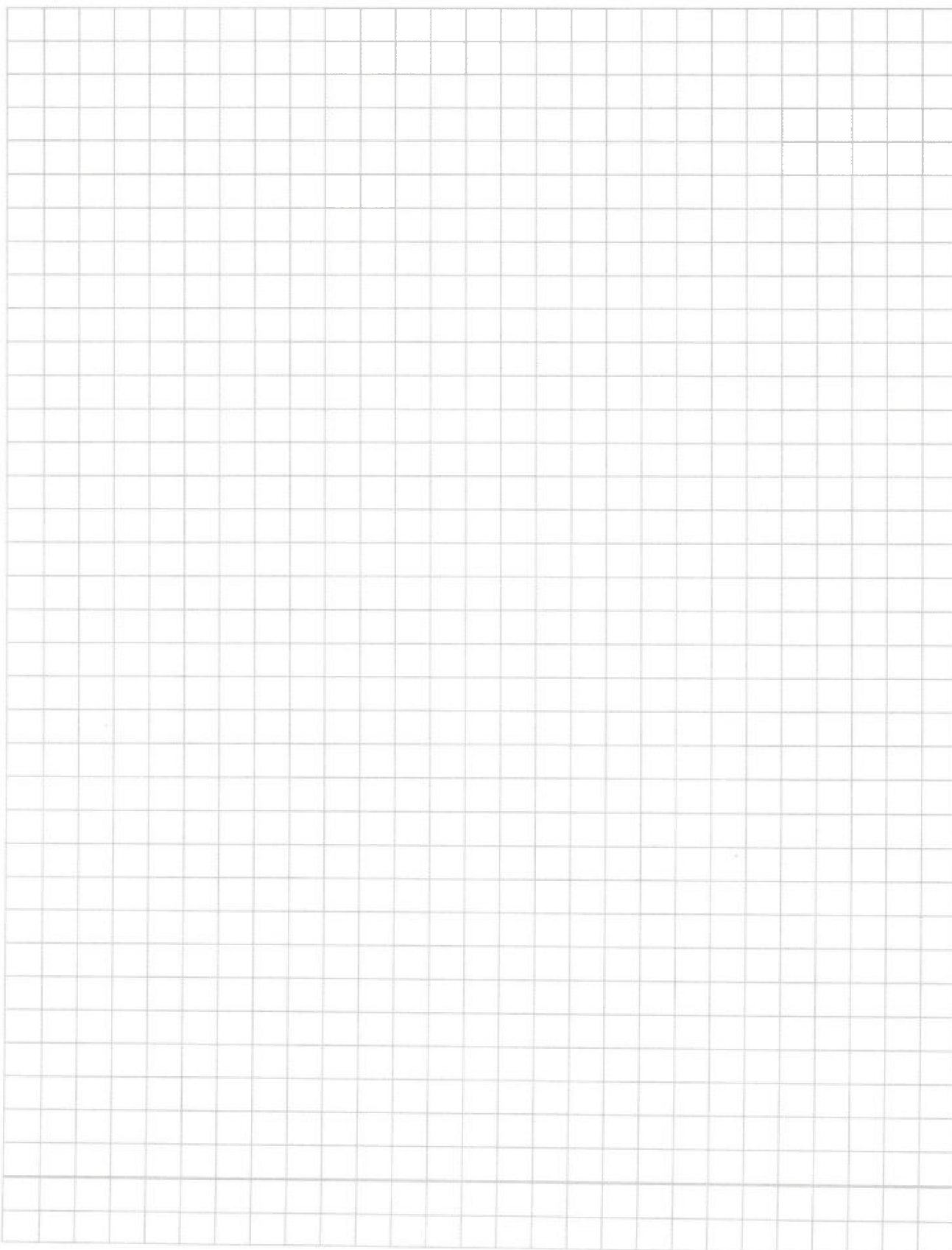
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

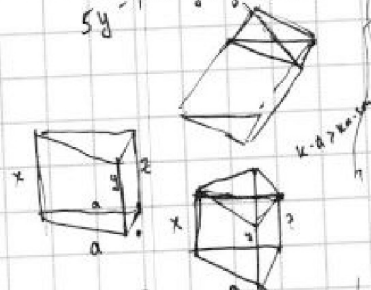
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 6-c &= 1 \\ a-c &= p^2 \\ (p^2+c)^2 + 1+c &= 710 \\ p^2 &= 26 \end{aligned}$$

$$9 \leq 259$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ -4 \quad 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -5y+1 &\Rightarrow y \leq \frac{1}{5} \Rightarrow y \leq -4 \\ -3y+9 &\Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow -4 \leq y \leq 3 \\ 5y-1 &\Rightarrow y \geq \frac{1}{5} \Rightarrow 5 \leq y \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x+a &= 3 \\ \frac{x+a}{2} &= 3 \\ \frac{x+a}{2} &= 2 \\ a+x &= 1 \\ a+y &= 6 \\ a+x &= 4 \\ 2a+x &= 10 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + 95$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ y &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot a \cdot \frac{1}{2} &= 1 \\ a^2 &= \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 12 \cdot (25 \cdot 18 - 9) &= 21 = 698 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 18 \\ \hline 200 \\ 25 \\ \hline 450 \\ 441 \quad 12 \\ \hline 21 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \\ 21 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 53 \\ \hline 159 \\ 2659 \\ \hline 282253 \\ 9 = 2\sqrt{3} \end{array}$$

$$p \leq 26$$

$$211 \geq p^2$$

$$211$$

$$28$$

$$\begin{aligned} (4c)^2 + p^2 + c &= 710 \\ c^2 + 2c + 1 + c + p^2 - 710 &= 0 \\ c^2 + 3c + p^2 - 709 &= 0 \\ 9 - 4p^2 + 4 \cdot 709 &\geq 0 \\ 9 + 4 \cdot 700 &= 2809 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 284414 \\ 709 \\ \hline 2836 \\ 712845 \\ \hline 2840 \\ 2845249^2 \\ \hline 2841 \end{array}$$

$$\begin{aligned} p^2 + c - 1 - c \\ p^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{(25x-9)(x-6)} \\ b^2 &= x+1 \\ b^2 &= \sqrt{(25x-9)(x-6)} \\ q^2 &= \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+1} \\ q^2 &= \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{(x-6)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{(x-6)^3}} &= \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+1} \\ \sqrt{\frac{1}{(x-6)^3}} &= \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+1} \\ \sqrt{25x-9} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25x-9 &= x^2+6x+9 \\ x^2-19x+18 &= 0 \\ 19^2-4 \cdot 18 &= 289 \\ x &= \frac{19 \pm 17}{2} = \frac{36}{2} = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} + 4 &\geq \sqrt{1-x-42} \\ x+5 + 8\sqrt{x+5} + 16 &\geq 1-x-42 \\ 8\sqrt{x+5} &\geq -20-2x-42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c+1 &< c+p^2 \\ 1 &< p^2 \\ p^2+c &< 7+c \\ p^2 &< 1 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$bq' = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$bq = x+3$$

$$bq' = \frac{25x-9}{(x-6)^3}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}}$$

$$\frac{1}{(x-6)^3} = x+3$$

$$1 = (x+3)(x-6)^3$$

$$b'q' = (x+3)\sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$x > \frac{9}{25}$$

$$x > 6$$

$$q' = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}}$$

$$(2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x)$$

$$-2\cos^2 x + 2\cos^4 x$$

$$p^4 \cos^2 x - 3\cos^2 p + 3p \cos^2 x + 12\cos^2 x$$

$$= 12\cos^2 x - 6 + 10$$

$$4p \cos^2 x - 12\cos^2 x + 12\cos^2 x - 4 = 0$$

$$p^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$pt^3 + t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$pt^3 + (t-1)^3 = t^3$$

$$(t-1)^3 = t^3(1-p)$$

$$1 - \left(\frac{t-1}{t}\right)^3 = p$$

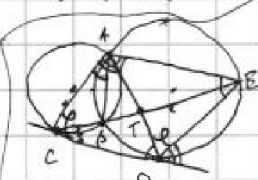
$$\frac{t^3 - (t-1)^3}{t^3} = \frac{(t-t+1)(t^2+t(t-1)+(t-1)^2)}{t^3}$$

$$\frac{t^3 - t^2 + t + t^2 - 2t + 1}{t^3} = p$$

$$\frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} = p$$

$$\frac{1}{1-3t+p} \leq 1$$

$$0 < 1 \leq 1-3t+p$$



$$\frac{CB}{CE} = \frac{CE}{CD}$$

$$CB(CD+BE) = CE^2$$

$$\frac{AE}{CA} = \frac{5}{2} = \frac{54}{24}$$

$$\frac{ED}{AB} = \frac{TD}{BT} = \frac{ET}{AT}$$

$$1 - \frac{1}{t} = \sqrt{1-p}$$

$$\frac{t-1}{t} = \sqrt{1-p}$$

$$\frac{t^2 - t + 1}{t^2} = \frac{1}{t^2}$$

$$t-1 = \sqrt{1-p}$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AD}$$

$$AD = \sqrt{10}y' = y\sqrt{10}$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{26}{52} = \frac{26}{52}$$

$$\frac{26}{52} = \frac{26}{52}$$

$$\frac{26}{52} = \frac{26}{52}$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$(a-1)(a-710) = 0$$

$$a-1 = 0$$

$$a-710 = 0$$

$$a = 1$$

$$a = 710$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

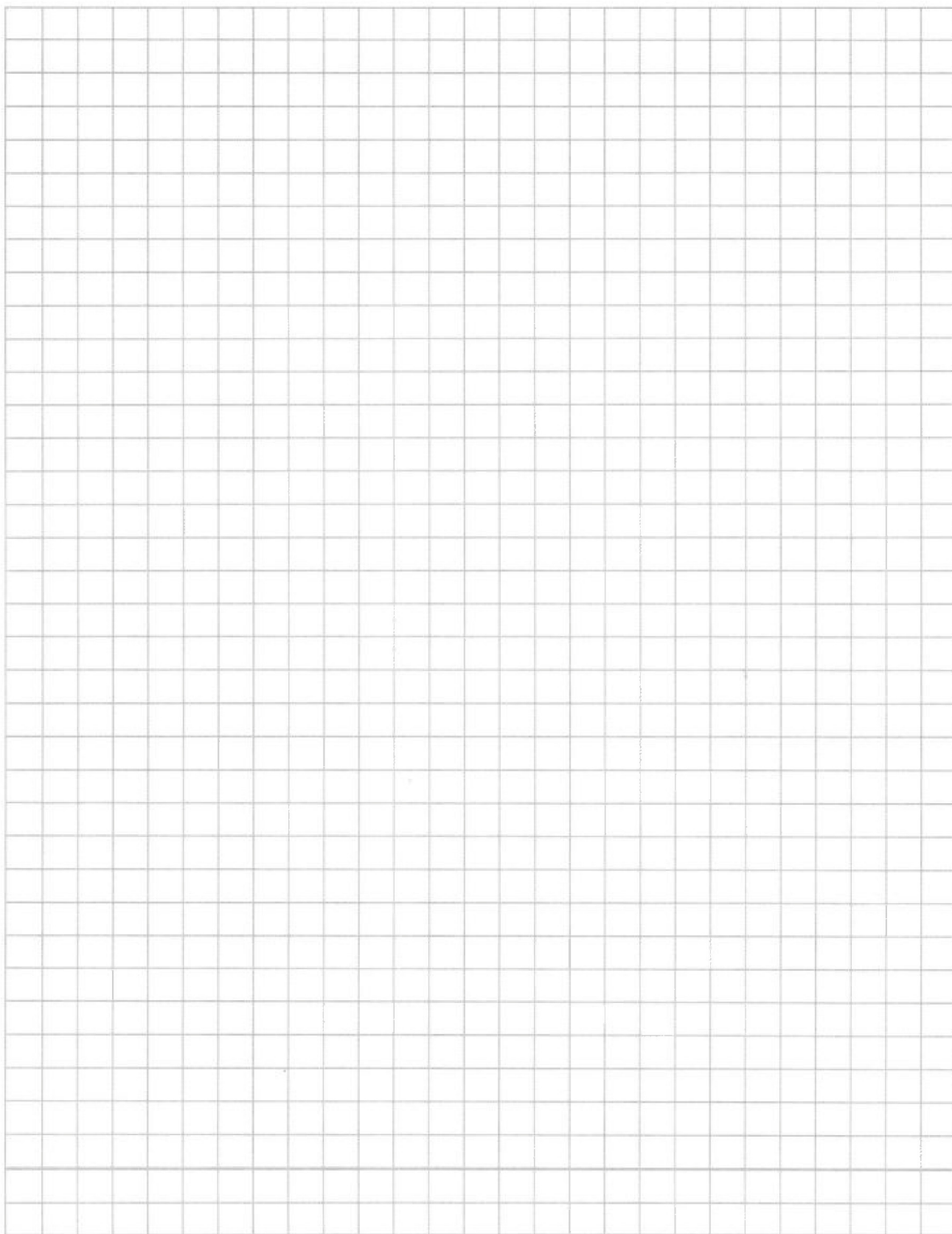
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

