



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть b_0 - седьмой член п.с., в которой q -
отношение соседних членов $\Rightarrow$ 9-ый член $= b_0 q^2$,
15-ый $= b_0 q^8$

$$b_0 = \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}$$

$$x \neq 6$$

$$b_0 q^2 = x+3$$

$x = 9/25$ - решение не является

$$b_0 q^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$25x-9 \neq 0$ (т.к. $b_0 = 0 \Rightarrow b_0 q^2 = 0 \Rightarrow x+3 = 9/25 + 3 = 0$)

$$\frac{b_0 q^8}{b_0} = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} = \frac{1}{(x-6)^2} \Rightarrow q^4 = |x-6|$$

$$q^2 = \sqrt{|x-6|}$$

$$x+3 = b_0 q^2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot \sqrt{|x-6|}$$

$$I \ x > 6 \Rightarrow |x-6| = x-6$$

$$25x-9 > 0 \Rightarrow x+3 = \sqrt{25x-9}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$(x-18)(x-1) = 0$$

$$x > 6 \Rightarrow \boxed{x=18}$$

$$b_0 = \sqrt{21^2 \cdot 12} = 21\sqrt{12}$$

$$b_0 q^2 = 21$$

$$b_0 q^8 = \sqrt{\frac{21^2}{12^3}} = \frac{21}{12\sqrt{12}}$$

$$II \ x < 6 \Rightarrow x-6 < 0 \Rightarrow 25x-9 < 0$$

$$x+3 = \sqrt{9-25x}$$

$$(x+3 > 0)$$

$x=0$ подходит

$$x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x \Rightarrow x^2 + 31x = 0 \Rightarrow x = -31$$

$$x=0 \Rightarrow b_0 = 3\sqrt{6}$$

$$b_0 q^2 = 3$$

$$b_0 q^8 = \frac{3}{6\sqrt{6}}$$

$x_0 = -31$ не подходит, т.к. $x+3 = -\sqrt{9-25x}$,
а не $\sqrt{9-25x}$

Ответ: $\{0, 18\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ал 2

Заметим, что $|y+4| + 4|y-5| \geq 9$

пусть $y+4 = a$

$$f(a) = |a| + 4|a+9| \geq 9$$

$$I \ a \geq 0 \Rightarrow a+9 \geq 9 \Rightarrow f(a) \geq 9$$

$$II \ -9 \leq a < 0 \Rightarrow f(a) = 4a + 36 - a = 3a + 36 \geq 36 - 3 \cdot 9 = 9$$

$$III \ a < -9 \Rightarrow f(a) = -5a - 36 \geq (-5) \cdot (-9) - 36 = 9$$

Тогда $|y+4| + 4|y-5| \geq 9$, причем $f(a) = 9$ — когда $a = 9$,
т.е. $y = 5$

$$\sqrt{81-z^2} \leq 9 \Rightarrow \text{если } |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$y = 5, z = 0$$

$$\text{Тогда } \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} + 4$$

$$\text{пусть } \sqrt{x+5} = a, \sqrt{1-x} = b \Rightarrow \sqrt{5-4x-x^2} = ab$$

$$a-b+4 = 2ab$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2b^2 - 16$$

$$a^2 + b^2 = 6$$

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt{5-4x-x^2} = 4\sqrt{5-4x-x^2} + 16 + 16\sqrt{5-4x-x^2}$$

пусть

$$\sqrt{5-4x-x^2} = b \geq 0$$

$$4b^2 + 18b + 10 = 0$$

$$4b^2 - 14b + 10 = 0$$

$$2b^2 + 9b + 5 = 0$$

$$2b^2 - 7b + 5 = 0$$

$$2b^2 + 9b + 5 = 0$$

$$-D = 81 - 40 = 41$$

$$b = \frac{-9 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$b = \frac{7 \pm 3}{2 \cdot 2} \rightarrow \frac{5}{2}$$

$$b = \frac{-9 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$b = \frac{-9 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$b = \frac{-9 \pm \sqrt{41}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b=1 \Rightarrow 5-4x-x^2=1 \Rightarrow x^2+4x-4=0 \quad x=\pm 2\sqrt{2}-2$$
$$(x+2)^2=8 \Rightarrow$$

$$b=5/2 \Rightarrow 5-4x-x^2=25/4$$

$$x^2+4x+5/4=0$$

$$(x+2)^2 = \frac{11}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{11}{4}} - 2$$

$$\text{Ответ: } (\pm 2\sqrt{2}-2, 5, 0), (\pm \sqrt{\frac{11}{4}}-2, 5, 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = \sqrt{3} \cos 2x + 10$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin 2x = (2\cos^2 x - 1)(\cos x) -$$

$$- \sin x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x)$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{Пусть } a = \cos x$$

$$p(4a^3 - 3a) + 3(p+4)a = 6(2a^2 - 1) + 10$$

$$4a^3 p + 12a = 12a^2 + 4 \quad / : 4$$

$$a^3 p + 3a - 3a^2 - 1 = 0$$

$$(a-1)^3 + a^3(p-1) = 0 \quad \text{Если } a=1, \quad p \neq 1$$

$$p-1 = -\frac{(a-1)^3}{a^3}$$

Если $a=0$,
выражение = $-1 \Rightarrow$ не подходит
решение есть
 $a = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt[3]{p-1} = \frac{1-a}{a} = \frac{1}{a} - 1$$

$$f(b) = \frac{1}{b} - 1 \quad \text{при } b \in [-1, 1] \text{ принимает любые}$$

значения, кроме $(-\infty, 0)$ промежутка $(-2, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{p-1} \notin (-2, 0) \quad (\text{Тогда решение есть, ведь } \exists \text{ такое } a \text{ та: } |a| \leq 1 \Rightarrow \exists \text{ решение } x)$$

$$p-1 \notin (-8, 0)$$

$$p \notin (-7, 1)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty, -7] \cup [1, +\infty), \quad \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

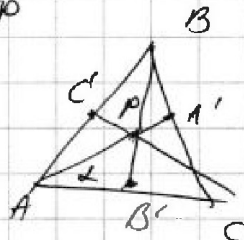
54

Вспользуемся синусной теоремой Чева:

В Δ -ке ABC $AA' \cap BB' = AA' \cap CC' = P$

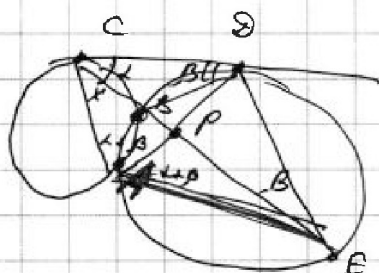
$$\Rightarrow \sin \angle CAA' \cdot \frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle BAA'} \cdot \frac{\sin \angle BCC'}{\sin \angle CBB'} \cdot \frac{\sin \angle ACC'}{\sin \angle ABB'} = 1$$

Что верно и следует из обычной теоремы Чева



$$\left(\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \right) = 1, \frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{ABB'}}{S_{BB'C}} = \frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle B'BC} \cdot \frac{AB}{AC}$$

~~Это также верно и для случая, когда P вне Δ~~



Пусть $P = CE \cap AD$

$CP : PE = 2 : 5$ из условия

Пусть $\angle DCB = \alpha, \angle CDB = \beta$

Тогда $\angle DBP = \angle BCD + \angle BDC =$

$\alpha + \beta$ по впис-ти ABDE

$\angle CAB = \angle BCD = \alpha$ по теореме о хорде и касательной
 $\angle BAD = \angle CDB = \beta \Rightarrow \angle CAD = \alpha + \beta \Rightarrow AP$ - бис-са ΔCAE
 $\Rightarrow CP : PE = CA : AE = 2 : 5$ по теореме о бис-се в ΔCAE

Пусть $\angle ACE = x \Rightarrow \angle CEA = 180 - 2\alpha - 2\beta - x$

$\angle DEC = \angle BAD = \beta$ по впис-ти ABDE $\Rightarrow \angle AED = 180 - 2\alpha - \beta - x$

по теореме синусов в ΔACE и ΔCDE :

$$\frac{CD}{DE} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{\sin x}{\sin (180 - 2\alpha - 2\beta - x)}$$

По синусной теореме Чева $\frac{CD}{DE} \cdot \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AB}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin (180 - 2\alpha - 2\beta - x)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По теореме синусов и теореме Чевы для

4-ка $CAED$ и точки пересечения B имеем:

$$\frac{\sin B}{\sin 2} \cdot \frac{\sin x}{\sin 2} \cdot \frac{\sin B}{\sin \angle BDA} = 1 \quad \angle BDA = \angle BEA \text{ из}$$

вписанности $ABDE$

$$\angle BEA = 180 - 2\alpha - 2\beta - x$$

$$\frac{\sin x}{\sin 180 - 2\alpha - 2\beta - x} = \frac{\sin^2 2}{\sin^2 B}$$

2) " $\frac{AE}{AC} = \frac{5}{2}$

3) $\frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сопоставим каждой точке прямоугольника 3 ^{2х2} симметричные точки (отн. средней линии и центра) ^{вертикальной}

Пусто S_1 - кол-во вариантов с симметрией отн. ср. линии

пусто S_2 - кол-во вариантов с симметрией отн. горизонт. ср. линии

S_3 - кол-во симметрий с центральной симметрией.

Заметим, что если ~~симметричная~~ ^{тип симметрии задан} входит в 2 из этих 3

групп, то она входит и во все.

Центр. сим. + вертик.

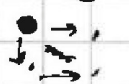
гориз. + верт.

центр. + гориз.

пусть
ее взяли



=> есть и
горизонтальная



- есть
горизонт.



- есть
вертик.

(Пусть $\bullet$ мы взяли, тогда $\rightarrow$ означает, что
из этого следует, что и группу тогда мы
тоже выбрали.)

$$100 \times 400 = 40000$$

$$S_1 = C_{40000}^4 \leftarrow \text{кол-во вариантов выбрать 4 точки в левой половине (тогда 4 точки мы возьмем}$$

$$S_2 = C_{20000}^4 \text{ аналогично}$$

$$S_3 = C_{20000}^4 \text{ - аналогично}$$

сразу ~~определяем~~
симметрично)

9 из каждой пары берем 1
представится

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = C_{10000}^2 \leftarrow \text{как мы поняли, берем 2 прямоуголь-}$$

ника из этих точек. Всего их $\frac{40000}{4} = 10000$ выбрать

$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ считали дважды 2 раза $\rightarrow$ вычитаем ^{нужно 2}
его столько же

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{10000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

~~Решение~~ $a-b \div 3$

$$a^2 + b = 710 \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{3}, \text{ т.к. иначе } a^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a-b \div 3$$

$$(a-c)/(b-c) = p^2$$

$a-c, b-c$ — целые

Пусть $a-c \geq 0$

$$b-c \geq a-c \geq 0$$

$$b-c = p^2$$

$$a-c = 1$$

$$\begin{aligned} a-c &= b-c-p, \\ (a-c) &= 1 \\ (b-c) &= p^2 \end{aligned}$$

Пусть $a-c < 0$

$$c-a > 0$$

$$b-c < 0 \Rightarrow c-b > 0$$

$$\text{Тогда } (c-a)/(c-b) = p^2$$

$$c-a > c-b$$

$$a = c - p^2$$

$$c-a = p^2 \Rightarrow c-b = 1$$

$$b = c - 1$$

$$b-a = p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$p = 3$$

$$a = c - 9$$

$$b = c - 1$$

$$a^2 + b = (c-9)^2 + c - 1 =$$

$$= c^2 - 17c + 80 = 710$$

$$c^2 - 17c = 630$$

$$c = \frac{17 \pm 53}{2}$$

$$c = 35 \quad \text{или} \quad c = -18$$

$$a = 26 \quad \text{или} \quad a = -27$$

$$b = 34 \quad \text{или} \quad b = -19$$

$$(-27, -19, -28) \quad (26, 34, 35)$$

$$(-27, -19, -18) \quad (26, 34, 25)$$

Но заметим, что

$$\text{Тогда } p^2 - 1 \equiv b-a \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{для } p \neq 3$$

$$p = 3 \Rightarrow b = a + 1$$

$$a = c + 1$$

$$a^2 + b = c^2 + 2c + 1 + 1 + c = 710$$

$$c^2 + 3c = 700$$

$$(c-25)(c+28) = 0$$

$$c = 25$$

$$c = -28$$

$$a = 26$$

$$a = -27$$

$$b = 34$$

$$b = -19$$

Ответ: ~~(26, 34, 35)~~
~~(-27, -19, -28)~~
~~(25, -28, -27)~~

~~(-27, -19, -18)~~
~~(26, 34, 25)~~



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сделаем таблицу из чисел $a, a^2, b = 710 - a^2, b \pmod{3}$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

$a < b$
 $a^2 + b = 710$
 $a^2 + a < 710$
 $a \leq 26$
 $a < 0$
 $a \leq -27$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 18 \\ \hline 270 \\ 35 \\ \hline 630 \end{array}$$

$a - b \not\equiv 3 \Rightarrow \text{т.к. } a^2 + b \equiv 2 \pmod{3}$

$a \equiv 0 \text{ или } 2, \text{ т.е. } a^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a - b \equiv 3$

$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow a = b$ противоречие
 $a-c = 1 \quad (a-c < b-c)$
 $b-c = p^2$
 $a-c = 1$

т.е. если $b - a = p^2 - 1$

Тогда $c = a - 1$ (единица)

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
$710 - a^2$	710	709	706	701	694	685	674	661	646	629	610	589	566	541	514	485

Но $b - a \equiv p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ или } p \not\equiv 3$

но тогда $b - a \equiv 3 \Rightarrow$ единица

Вариант - $p = 3 \Rightarrow b - a = 8 \Rightarrow b = 8 + a \Rightarrow$
 $a^2 + b = 710 \Rightarrow a^2 + a + 8 = 710 \Rightarrow a^2 + a = 702 \Rightarrow a = 26$
 $b = 34, c = a - 1 = 25$

$b = a + 8 \rightarrow 34, c = a - 1 \rightarrow 25$
 $(26, 34, 25)$
 $(-27, -19, 28)$

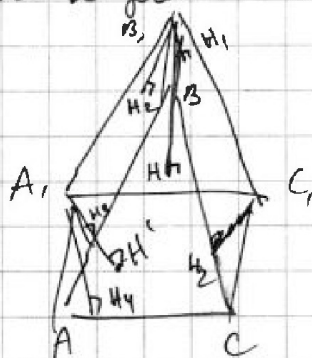


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

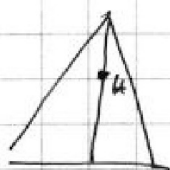
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.ч. площади двух параллелограммов равны
они ~~являются~~ симметричны относительно биссектрисы
м-ты для этих двух фигур ~~на~~ Пусть ABC — равноб.



Δ -ик, $S_{AA_1B_1} = S_{BB_1C_1} = 3$
Тогда перпендикуляр из B_1 на (ABC)
попадает на бис-су Δ -ка



Δ -во: $S_{AA_1B_1} = AB \cdot B_1H_1$,
где $H_1, B_1 \in AB, H_1 \in (AB)$

Аналогично $S_{BB_1C_1} = BC \cdot B_1H_2$,
где $H_2, B_1 \in BC, H_2 \in (BC)$

$\Leftrightarrow$

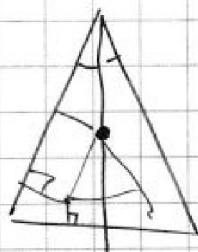
$\Rightarrow$ По теореме о 3 перпендикулярах $B_1H_2 = B_1H_1 \Rightarrow$

B_1H_1 и B_1H_2 — перпендикуляры к своим сторонам

$$H_1H_2 = \sqrt{B_1H_1^2 - B_1H_2^2} = H_1H_2 \Rightarrow H \in \text{бис-се } \Delta\text{-ка}$$

Аналогично определим H_3 и H_4 — как перпендикуляры из A_1 на AB и AC , $H \in \perp(ABC)$

$$\text{Т.Р. } V_{ABCA_1B_1C_1} = B_1H \cdot S_{ABC} = B_1H = H' \cdot S$$



$$AH_3 = \frac{3}{AB} = \frac{3}{a} \quad \text{Пусть } AB=a \Rightarrow BC=CA=a, \quad AH'=x$$

$$A'H_4 = \frac{2}{a} \quad \text{Тогда } H_3H_4 \text{ (перпендикуляр к } AB) =$$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{9}{a^2}}, \quad H_4H' = \sqrt{x^2 - \frac{4}{a^2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

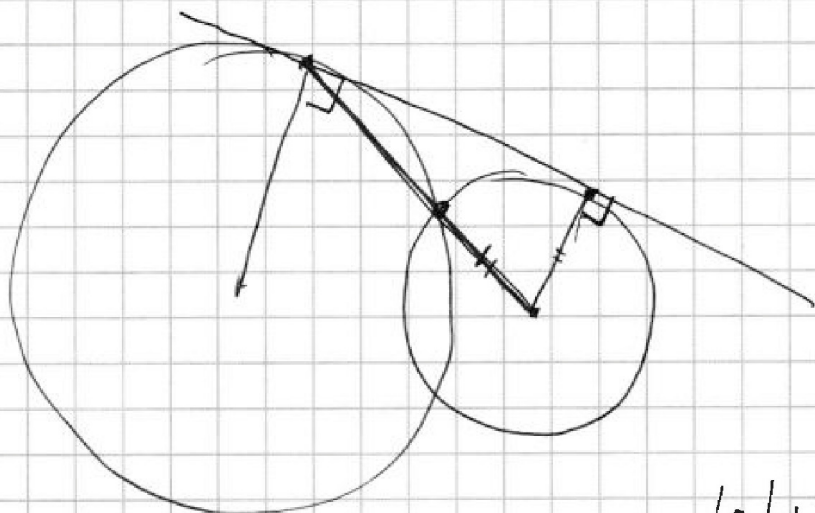
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение задачи



$$|a| + 4|a+9|$$

$$x+5 \geq 0$$

г.г.

$$1-x-4z \geq 0$$

$$z \geq \frac{x-1}{4}$$

$$y-4x-x^2+z \geq 0$$

$$y+z \geq x^2+4x \quad 1-4z \geq x$$

$$1-4z \geq x$$

$$(x+z)^2 - 4$$

$$-4x - x^2 - 4zx \geq 20z$$

$$y+z - 4x - x^2$$

$$20z \geq 4zx + x^2 + 4x$$

$$y+z \geq x^2 + 4x$$

$$20000 \cdot 19999 \cdot 19998 \cdot 19997$$

$$10000 \cdot 99999$$

4!

-3 - *г.г.*

$$10000 \cdot 99999$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

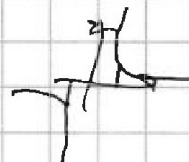
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6
77

69²

69⁸

7 8 9 10 11 12 13 14 15
0 9 1² 1³ 1⁴ 1⁵ 1⁶ 1⁷ 1⁸



9

$$\frac{1}{(x-6)^2} = 9^8$$

$$\frac{1}{|x-6|} = 9^4 \Rightarrow 9^2 = \sqrt{|x-6|}$$

$$4a^3p + 12a = 12a^2 + 4$$

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$a^3p + 3a = 3a^2 + 1$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$a^3p - 3a^2 + 3a - 1 = 0$$

$$p(4a^3 - 3a) + 3(p+4)a = 6(2a^2 - 1) + 10$$

$$4a^3p - 12a^2 + (2p+12)a - 4 = 0$$

$$2a^3p - 6a^2 + (p+6)a - 4 = 0$$

$$2a^2(ap-3) + (ap-3)a + 4ap - (2a^2+1)ap$$

$$21 = \sqrt{25 \cdot 18 - 9}$$

$$(21+4)(21-3)$$

a
a²

33
x33

$$9 - 121 =$$

$$22 \cdot 22 = 4 \cdot 121 = 484$$

$$25 \cdot 18$$

$$50 \cdot 9$$

$$27 = 729$$

$$28 = 400$$

$$450 \cdot 12$$

2

$$(30-2)^2 = 900 - 120 + 4 = 784$$

020
121
271

$$25 \cdot 18 \div 12$$

21

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}$$

$$30\sqrt{6} \quad 21$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$$

$$\text{Реш } 6-4z - 2\sqrt{(x+5)(1-x-4z)} = 4y-16x-4x^2+4z+16 - 16\sqrt{y-4x-x^2+z}$$

$$\cos 3x + \cos x$$

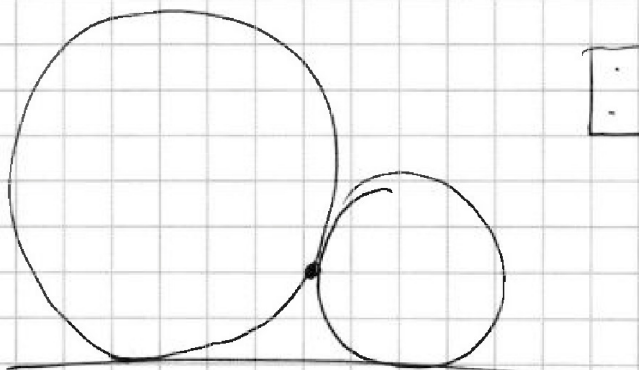
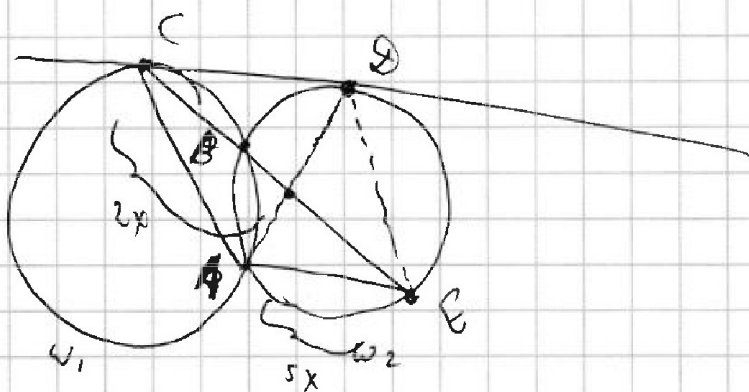
$$\cos 2x + x + \cos 2x - x$$

$$2 \cos 2x - \cos x \text{ Реш}$$

$$\begin{array}{r} 539 \\ + 539 \\ \hline 1078 \\ + 1078 \\ \hline 2156 \\ + 2156 \\ \hline 4312 \end{array}$$

$$2p \cos 2x \cdot \cos x + 2p \cdot \cos x = 6 \cos 2x - 12 \cos x + 10$$

$$2p \cos x (\cos 2x + 1) = 6(\cos 2x - 2 \cos x) + 10$$



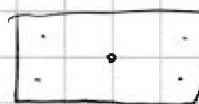
$$630 = 3 \cdot 210$$

$$3021$$

$$1078$$

$$17 \cdot 17$$

$$\begin{array}{r} 289 + 2520 \\ 289 \\ \hline 2809 \end{array}$$



$$(26-3)^2$$

$$400 - 120 + 9$$

$$289$$

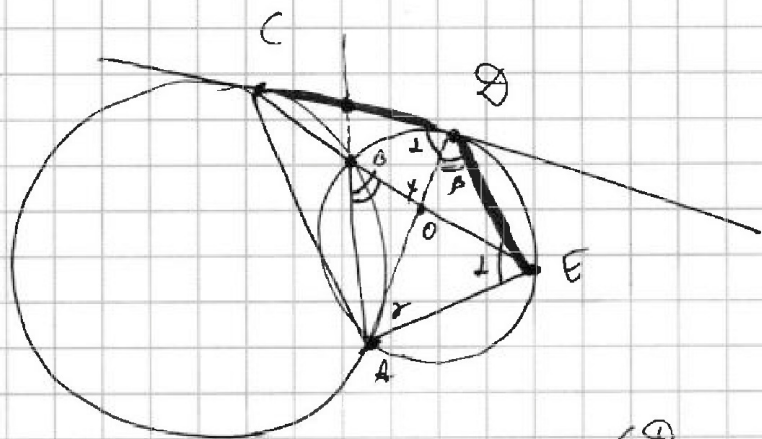


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

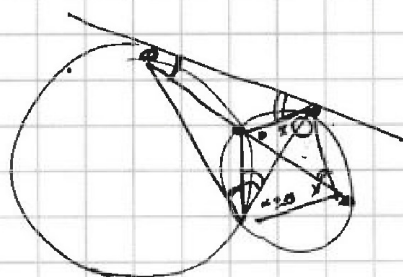
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

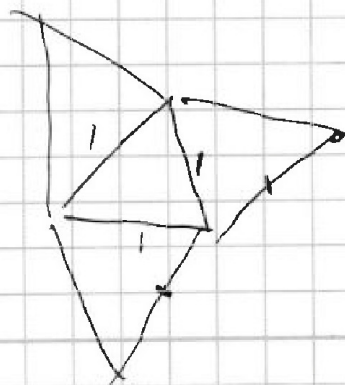
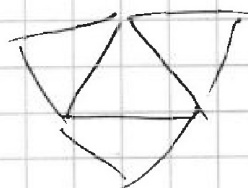
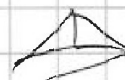
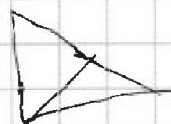
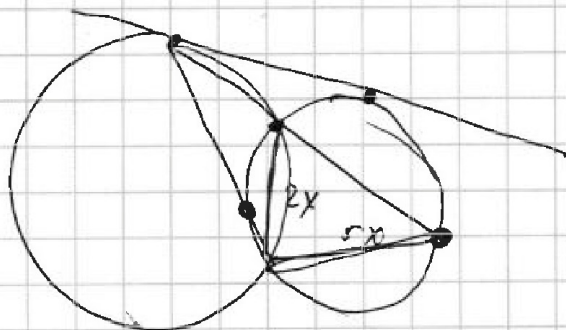


$$\frac{AE}{\sin \alpha} = \frac{DE}{\sin \theta}$$
$$\frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{CO}{\sin \theta}$$

$$\frac{CD}{AE} = \frac{CO}{OE} = \frac{2}{5}$$



$$180 - \alpha - 2\beta$$



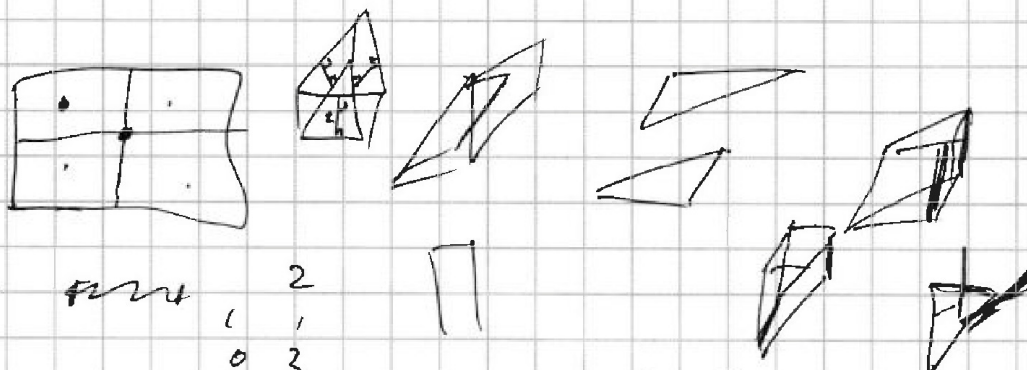


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$a, b > 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \quad 1 \\ 0 \quad 2 \\ 24^2 + 27 \\ \hline 26^2 + 26 \\ \hline 26 \cdot 27 \\ 27 \\ \times 26 \\ \hline 162 \\ + 54 \\ \hline 702 \end{array}$$

$(a-c, b-c)$

$$\begin{array}{r} a^2 - b \\ a^2 - a + 10 \\ \hline 28^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 5 \\ x + 5 \geq 0 \\ 1 - x - 4x^2 \geq 0 \\ y - 4x - x^2 + 2 \geq 0 \\ 4 + y + 2 \geq (x+2)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 + y \geq (x+2)^2 \\ y \geq x^2 \end{array}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} 3^{1/4}$$



$$\begin{array}{l} b^2 - a^2 = d^2 - c^2 \\ b^2 - d^2 = c^2 - a^2 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

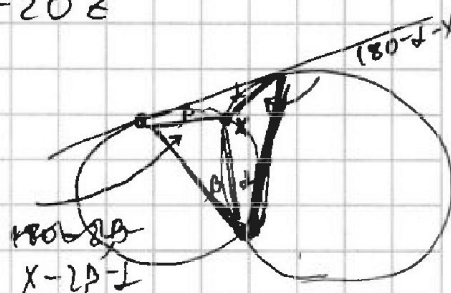
$$x+5+1-x-4z$$

$$6-4z = 4(y-4x-x^2+z) + 16 - 8\sqrt{y-4x-x^2+z}$$
$$-2\sqrt{x-x^2-4zx+5-5x-20z}$$
$$-x^2-4x-4zx-20z$$



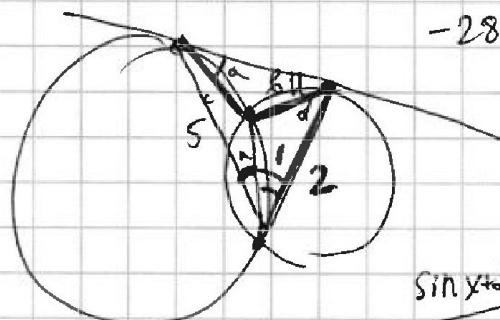
$$\begin{array}{r} -27 \\ 729 \\ -28^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 28 \\ 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$



$$\frac{2}{\sin x} = \frac{a}{\sin 2}$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin x-(2-\beta)}$$



$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \epsilon}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \epsilon}{\sin \alpha} = 1$$
$$\frac{\sin x+2}{\sin 2} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin 2\beta+x} = 1$$

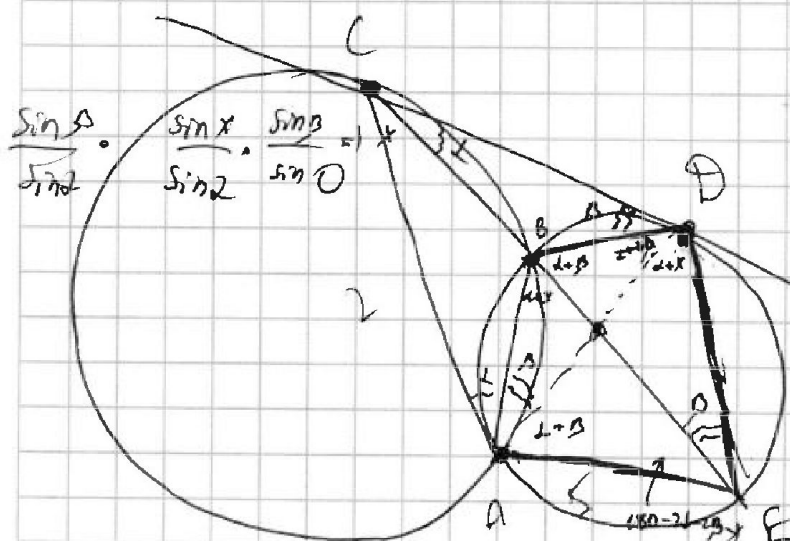
$$26^2 + 26$$

$$26 \cdot 27$$

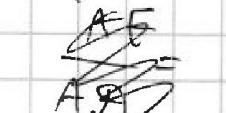
$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 26 \\ \hline 162 \\ 54 \\ \hline 702 \end{array}$$

$$2 \cdot 702$$

$$a + 27$$



$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE - AB}{AD \cdot AC}$$



$$\frac{CB}{CD} = \frac{BD}{DE}$$

$$\frac{CB}{BD}$$

$$\frac{\sin x}{\sin 2x+2\beta+x}$$

$$\frac{\sin 2x+\beta+x}{\sin x+x} = ?$$

$$\frac{CB}{BD}$$