



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 710$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть q - множитель геометрической прогрессии. Тогда:

$$\begin{cases} (x+3) \cdot q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \\ \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot q^2 = (x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3) \cdot q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \\ \sqrt{(25x-9)^3(x-6)^3} \cdot q^6 = (x+3)^3 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-6 \neq 0 \\ (25x-9)(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6 \\ (x-\frac{9}{25})(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6 \\ x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup [6; +\infty) \end{cases}$$

При $x = \frac{9}{25}$:

$$\neq \left(\frac{9}{25} + 3\right) q^6 = 0 \quad \text{П.к } q \neq 0, \text{ то нет корней} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 \cdot q^2 = \frac{9}{25} + 3 \\ \end{cases} \quad \neq x \neq \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$x \in (-\infty; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$$

$$\text{П.к } q^6 > 0 \text{ и } \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \geq 0, \text{ то } x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow$$

$$x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \Rightarrow$$

Из системы следует:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+3)^4 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \sqrt{(25x-9)^3 \cdot (x-6)^3}$$

$$(x+3)^4 = \sqrt{(25x-9)^4}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x+3)^2 = 25x-9 \\ (x+3)^2 = 9-25x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+9-25x+9=0 \\ x^2+6x+9-9+25x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-19x+18=0 \\ x^2+31x=0 \end{cases}$$

$$x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \quad x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$$

$$\begin{cases} x^2-19x+18=0 \\ x^2+31x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-18)=0 \\ x(x+31)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=18 \\ x=0 \\ x=-31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=18 \\ x=0 \end{cases} \quad 1) \text{ При } x=18: \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = \sqrt{\frac{450-9}{(18-6)^3}} = \sqrt{\frac{441}{12^3}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 9}{12 \cdot 2 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{7}{24} \sqrt{3}$$

$$x+3=21 \Rightarrow \frac{1}{(\frac{7}{24}\sqrt{3})^6} \cdot 21 = \frac{21}{6 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{21}{12 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7}{24} \sqrt{3}$$

$$2) \text{ При } x=0: \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = \sqrt{\frac{-9}{(-6)^3}} = \sqrt{\frac{-9}{-216}} = \sqrt{\frac{1}{24}}$$

$$x+3=3 \Rightarrow \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{6}})^6} = \frac{1}{\frac{1}{6 \cdot \sqrt{6}}} = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{1} = 6 \sqrt{6}$$

$$3 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{6}})^6} = \frac{3}{6 \sqrt{6}} = \frac{1}{2 \sqrt{6}} \Rightarrow x=0 \text{ подходит.}$$

Ответ: $x=0, x=18$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \quad (1)$$

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \quad (2)$$

Решение:

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 1-x-4z \geq 0 \\ y-4x-x^2+z \geq 0 \\ 81-z^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ -x \leq 5 \\ 4z \leq 1-x \leq 6 \\ y \geq 4x+x^2-z \\ z \in [-9; 9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ z \leq \frac{3}{2} \\ y \geq -20 - \frac{3}{2} \\ z \in [-9; 9] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ y \geq -21,5 \\ z \in [-9; \frac{3}{2}] \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (2) отдельно:

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$\begin{cases} y < -4 \\ -y-4-4y+20 = \sqrt{81-z^2} \\ -4 \leq y < 5 \\ y+4-4y+20 = \sqrt{81-z^2} \\ y \geq 5 \\ y+4+4y-20 = \sqrt{81-z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -4 \\ -5y+16 = \sqrt{81-z^2} \\ -4 \leq y < 5 \\ 24-3y = \sqrt{81-z^2} \\ y \geq 5 \\ 5y-16 = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к. $z^2 \geq 0$, то $81 - z^2 \leq 81 \Rightarrow \sqrt{81 - z^2} \leq 9 \Rightarrow$ ^{это и} исследовать
следует:

$$\begin{cases} y < -4 \\ -5y + 16 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -4 \\ -5y \leq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -4 \\ y \geq \frac{7}{5} = 1,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \leq y < 5 \\ 24 - 3y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y < 5 \\ -3y \leq -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y < 5 \\ y \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow y = 5$$

$$\begin{cases} y \geq 5 \\ 5y - 16 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 5 \\ 5y \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 5 \\ y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|y+4| + 4|y-5| = |9| + 4|0| = \sqrt{81 - z^2}$$

$$9 = \sqrt{81 - z^2}$$

$$81 = 81 - z^2$$

$$z^2 = 0$$

$$z = 0 \Rightarrow$$

Подставим y и z в уравнение (1):

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 0 + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-(x^2+4x-5)}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-(x-1)(x+5)}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{(1-x)(x+5)}$$

$$4 + \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+5} = 0$$

Заметим, что $\sqrt{x+5}$ - возрастающая функция, $\sqrt{1-x}$ убывающая $\Rightarrow$ $4 + \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+5}$ - возрастающая функция $\Rightarrow$ у уравнения одно решение. Подходящее x не более 1 решение



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 + \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x}\sqrt{x+5}$$

$$16 + x + 5 + 8\sqrt{x+5} = 1 - x + 4(1-x)(x+5) + 2(1-x)\sqrt{x+5}$$

$$20 + 2x + 8\sqrt{x+5} = 4(5 - x^2 - 4x) + 2\sqrt{x+5} - 2x\sqrt{x+5}$$

$$20 + 2x + 8\sqrt{x+5} = 20 - 4x^2 - 16x + 2\sqrt{x+5} - 2x\sqrt{x+5}$$

$$4x^2 + 18x + 6\sqrt{x+5} + 2x\sqrt{x+5} = 0$$

$$2x^2 + 9x + 3\sqrt{x+5} + x\sqrt{x+5} = 0$$

$$x^2 + 6x + x(x+3) + \sqrt{x+5}(x+3) = 0$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})^2 = x+5+1-x - 2\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{1-x} = 6 - 2\sqrt{1-x}\sqrt{x+5}$$

$$4 = (\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})^2 - 2 + 2\sqrt{1-x}\sqrt{x+5} \Rightarrow$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})^2 + \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 2 = 0$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 1) = 2$$

$$\text{Пусть } \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = y:$$

$$\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{1-x}$$

$$x+5 = 1+1-x+2\sqrt{1-x}$$

$$2\sqrt{1-x} = 2x+3$$

$$4-4x = 4x^2+12x+9$$

$$4x^2+16x+5=0$$

$$x = \frac{-16 \pm 4\sqrt{11}}{8} \Leftrightarrow$$

$$x = -2 \pm \frac{\sqrt{11}}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } (-2 + \frac{\sqrt{11}}{2}; 5; 0), (-2 - \frac{\sqrt{11}}{2}; 5; 0).$$

$$\text{Пусть } \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = -2$$

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} - 2$$

$$\text{Т.к. } x \in [-5; 1], \text{ то:}$$

$$1-x \in [0; 6]$$

$$a(a+1) = 2$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a+2)(a-1) = 0$$

$$a = 1, a = -2$$

$$D = 16^2 - 16 \cdot 5 = 16 \cdot 11$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(\cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x) + 3(p+4) \cos x = 6 \cos^2 x - 6 \sin^2 x + 10$$

$$p(\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \cos x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p(\cos^3 x - 3 \cos x \cdot \sin^2 x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$p(\cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$(p-3)4 \cos^3 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x - 4 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

Замена: $t = \cos x \in [-1; 1]$

$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

При $p=0$:

$$-3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$3t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3 < 0 \Rightarrow \text{нет корней.}$$

При $p \neq 0$:

$$pt^3 - 3t + (t-1) - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)(t^2+t+1) - 3t + (t-1) = 0$$

$$+ (t-1)(t^2-2t+1) = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt[3]{p-1}t)^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(\sqrt[3]{p-1}t + t-1)(\sqrt[3]{(p-1)^2t^2} - (t-1)\sqrt[3]{p-1} + (t-1)^2) = 0$$

$$\text{П.к. } 3\sqrt[3]{p-1}t + (t-1)^3\sqrt[3]{p-1} + (t-1)^2 \neq 0$$

1) $\Delta = \text{П.к. } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^2 - ab + b^2 > 0$,
т.к. $\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2 < 0$ при $b > 0$, тогда $t-1 \neq 0$ и $\sqrt[3]{p-1} \neq 0$:

$$3\sqrt[3]{(p-1)^2} \cdot t^2 - (t-1)^3\sqrt[3]{p-1} \cdot t + (t-1)^2 > 0 \Rightarrow$$

$$3\sqrt[3]{p-1}t + t - 1 = 0$$

$$t(\sqrt[3]{p-1} + 1) = 1.$$

При $\sqrt[3]{p-1} + 1 = 0$ нет корней
 $p = 0$

При $p \neq 0$:

$$-1 \leq t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq +1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p < 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p < 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \\ p > 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p-1 \leq -8 \\ p \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p \leq -7 \\ p \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) при $t-1=0$

$t=1$

$$(\sqrt[3]{p-1} \cdot 1)^3 + 0 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} = 1$$

$$p-1=0$$

$$p=1 \Rightarrow \text{при } p=1$$

3) при $\sqrt[3]{p-1}=0$

$$p=1$$

$$(\sqrt[3]{p-1} \cdot t)^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(t-1)^3 = 0$$

$$t=1$$

$\Rightarrow$

При ~~$p=0$~~ ~~$p=0$~~ корней нет $p \in (-\frac{7}{8}; \frac{1}{8})$ корней нет

При $p=1$: $t=1$ - единственный корень

При $p \in (-\infty; -\frac{7}{8}] \cup (\frac{1}{8}; +\infty)$ - единственный

корень: $t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$

При $t=1$: $\cos x = 1 \Rightarrow$

При $t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$: $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: при $p \in (-\frac{7}{8}; 1)$ корней нет

при $p \in (-\infty; -\frac{7}{8}]$ единственный корень:

есть 2 корня:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При $p \in (-4; 1)$ корней нет

При $p = 1$: $t = 1$

При $p \in (-\infty; -4] \cup (1; +\infty)$: $t = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$

т.к. $x = \pm \arccos t, \pm 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то:

Ответ:

при $p \in (-4; 1)$ корней нет

при $p = 1$: $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ - единственные

при $p \in (-\infty; -4] \cup (1; +\infty)$ есть 2 корня:

$$x = \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$$x = -\arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

~~Токи C, D, E, A нечетна~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

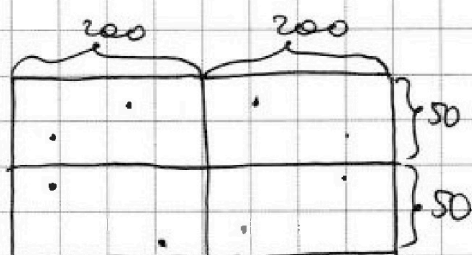
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

55

Средними линиями прямоугольник 100×400 делится на 4 прямоугольника 50×200 :



Кол-во раскрасок таких, что множество симметрично относительно:

1) горизонтальной средней линией (ГЛ)

$$x = C_{50 \cdot 400}^4 = C_{20000}^4 \quad (\text{выберем 4 клетки в}$$

верхнем прямоугольнике 50×400 , потом отразим относительно средней горизонтальной)

2) вертикальной средней линией (ВЛ)

$$y = C_{100 \cdot 100}^4 = C_{20000}^4 \quad (\text{аналогично})$$

3) Центра:

$$C_{400 \cdot 100}^4$$

Выберем 4 пары клеток:
 ~~$40000 \cdot 39999$~~

$$z = \frac{40000 \cdot 39998 \cdot 39996 \cdot 39994}{4! \cdot 2^4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Цикла и горизонтальной ор. линии:

Заметим, что если картинка симметрична относительно гр и центра, то она симметрична относительно вл. Если картинка симметрична относительно вл и центра, то она симметрична относительно гр.

Таких картинок:

$$c = C_{100 \cdot 50}^2$$

(т.к. в каждом прямоугольнике 200×50 по 2 клетки)

=> По формуле включений-исключений, искомое кол-во способов:

$$A = x + y + z - c - c - c + c = x + y + z - 2c$$

$$A = 2 \cdot C_{20000}^4 + \frac{40000 \cdot 39998 \cdot 39996 \cdot 39994}{2^4 \cdot 4!} - 2 \cdot C_{10000}^2$$



Ответ: $2 \cdot C_{20000}^4 + \frac{40000 \cdot 39998 \cdot 39996 \cdot 39994}{2^4 \cdot 4!} - 2 \cdot C_{10000}^2$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П6

Рассмотрим условие:

• число $(a-c)/(b-c)$ - квадрат некоторого простого числа $\Rightarrow$ Пусть p - это простое число. Тогда:

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$$

П.к. $a < b$, то $a-c \neq b-c \Rightarrow$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$$

Если $p \neq 3$; то $p \equiv 1 \pmod{3}$ или $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$
 $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$ При $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$

$$a-c - (b-c) = 1 - p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\begin{cases} a-b \equiv 0 \pmod{3} \\ b-a \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \text{ Противоречие}$$

При $\begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases}$: $b-c - (a-c) = 1 - p^2 \equiv 0 \pmod{3}$
 $b-a \equiv 0 \pmod{3}$

Противоречие $\Rightarrow$

$p=3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+9 \end{cases}$$

При $b=c+1$ и $a=c+9$: $b < a \Rightarrow$
 Противоречие $\Rightarrow$
 $\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+9 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \text{т.к. } a^2 + b = 710, \text{ то:}$$

$$\begin{cases} a^2 + b = 710 \\ a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 710 \\ a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases}$$

$$D = 9 + 2800 = 2809 = 53^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 + 3c - 700 = 0 \\ a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{-3 \pm 53}{2}$$

$$\begin{cases} c = \frac{-3 + 53}{2} \\ c = \frac{-3 - 53}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 25 \\ a = 26 \\ b = 34 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} c = -28 \\ a = -27 \\ b = -19 \end{cases}$$

Ответ: $(26; 34; 25), (-27; -19; -28)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

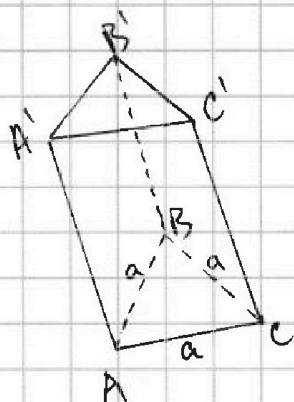
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

54.

Пусть h - высота призмы. Тогда её объём:

$V = S \cdot h$, где $S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ$ - площадь основания призмы.



a - сторона основания призмы (сторона равностороннего треугольника)

Тогда:

$$\frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 60^\circ = S = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

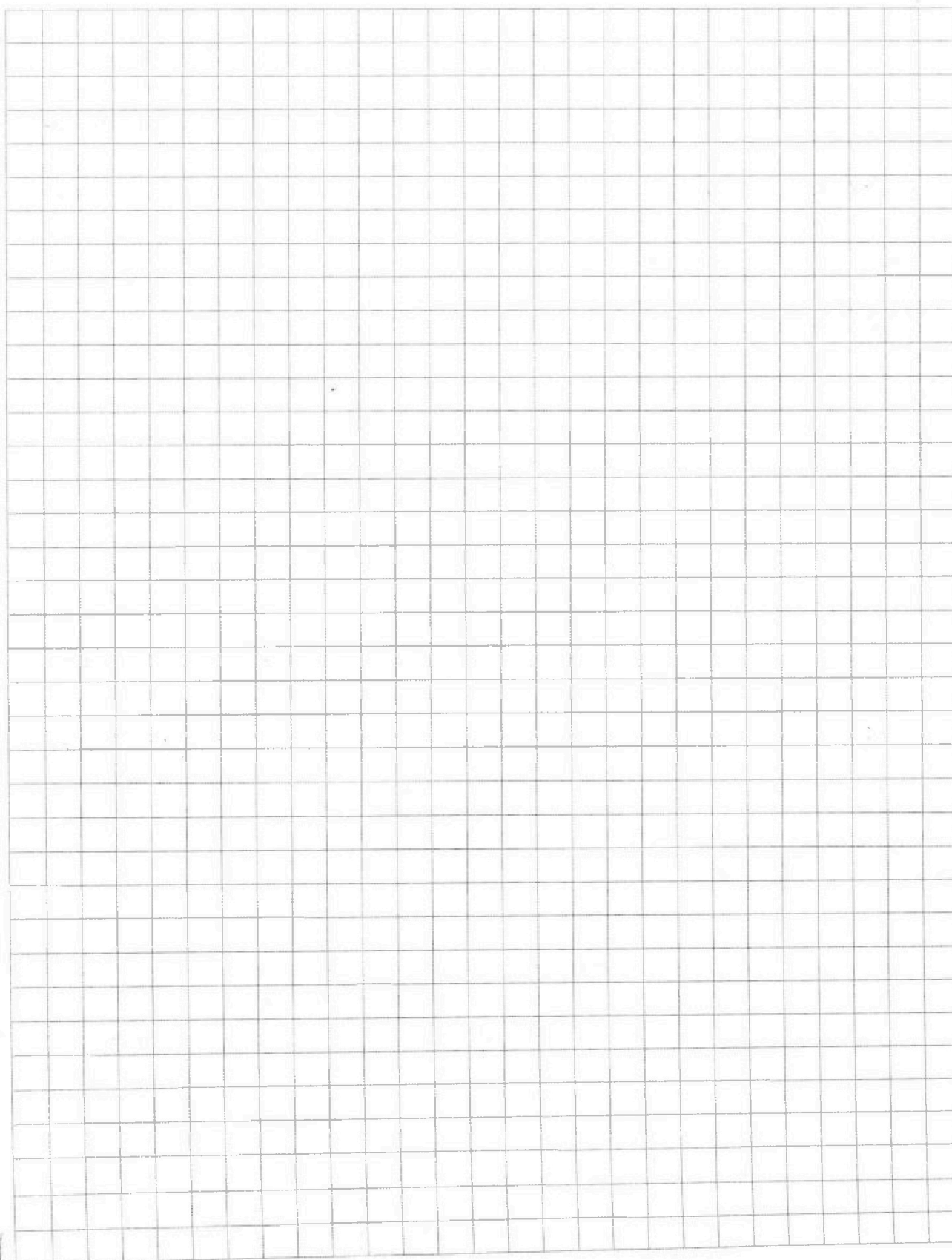


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





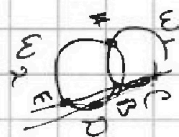
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1



№3:

$$(x+3) \cdot q^2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot q^2$$
$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = \sqrt{(25-9)(x-6)} \cdot q^8$$
$$(x+3)^4 = \sqrt{(25-9)(x-6)} \cdot q^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

Сумма равна 0!

$$(x+3) \cdot q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$
$$(x+3) = \sqrt{(25-9)(x-6)} \cdot q^2$$
$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot q^6 = (x+3)^3$$

$$\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}^3} = \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}{(x+3)^3}$$

$$(x+3)^4 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3} \cdot (25x-9)^3 \cdot (x-6)^3}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2 \cdot (x-6)$$

$$(x+3)^2 = \pm (25x-9)$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$12^3 = 4^3 \cdot 3^3$$

$$450 \cdot 12 = 25 \cdot 18 = 450$$
$$450 - 9 = 441$$
$$441 = 21^2$$
$$21 = 3 \cdot 7$$
$$3 \cdot 7 = 21$$
$$21 \cdot 21 = 441$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.
$$\frac{5+x}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(5+x)(x-1)}{4} + x-1 = \frac{5+x}{5} \cdot 8 + 5+x+91$$
$$\frac{5+x}{5} \cdot \frac{x-1}{4} + \frac{x+1}{4} = \frac{5+x}{5} \cdot 4$$

003

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+2}$$

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$t=4z$

$s_1 = x$
 $q = x-1$

$s+x \leq \frac{2}{1-x}$

$1-x$
 $4-x^2$

$$y-4x-x^2+2 = -x(x+4)+2+y$$

$$x+5+1-x-4z+16-2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x-4z}+8\sqrt{x+5}-8\sqrt{1-x-4z} =$$
$$= 4y-16x-4x^2+4z$$

$$22-8z-4y+16x+4x^2 - \dots = 0$$

$\frac{5082}{570}$
 $\frac{656}{55}$
 $\frac{55}{56}$
 $\frac{56}{56}$

$$\begin{aligned} x+5 &\geq 0 \\ x &\geq -5 \\ -x &\leq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-x-4z &\geq 0 \\ 4z &\leq 1-x \leq 6 \\ z &\leq \frac{6}{4} \end{aligned}$$

$$y-4x-x^2+2 \geq 0$$

$$y \geq 4x+x^2-2 \geq -20+25-2$$

$\frac{6426}{526}$
 $\frac{681}{521}$
 $\frac{521}{521}$
 $\frac{521}{521}$
 $\frac{521}{521}$
 $\frac{521}{521}$
 $\frac{521}{521}$
 $\frac{521}{521}$
 $\frac{521}{521}$
 $\frac{521}{521}$

$$\begin{aligned} 81-z^2 &\geq 0 \\ 81-z^2-81 &\leq 0 \\ -9 &\leq z \leq 9 \\ 9 &\geq -z \geq -9 \end{aligned}$$

$$5082 = 5082 + 5 = 0$$

$$y+4-4y+20$$

$$16-3y = \sqrt{81-z^2}$$

$\frac{5082}{570}$
 $\frac{656}{55}$
 $\frac{55}{56}$
 $\frac{56}{56}$

$$\begin{aligned} 5 &= 5+x \\ 3 &= 5+x \\ 0 &= 5+x \end{aligned}$$

$\frac{5082}{570}$
 $\frac{656}{55}$
 $\frac{55}{56}$
 $\frac{56}{56}$

$$\begin{aligned} 5 &= 5+x \\ 3 &= 5+x \\ 0 &= 5+x \end{aligned}$$

$\frac{5082}{570}$
 $\frac{656}{55}$
 $\frac{55}{56}$
 $\frac{56}{56}$

$$\begin{aligned} 5 &= 5+x \\ 3 &= 5+x \\ 0 &= 5+x \end{aligned}$$

$$5 > x > 5 - \dots$$

