



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} a_5 = 6x + 18 \\ a_7 = (x^2 - 4x)^2 \\ a_{11} = -3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + 4d = 6x + 18 \\ a_0 + 6d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \\ a_0 + 10d = -3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6d = -3x^2 - 6x - 18 \\ a_0 = 6x + 18 - 4d \\ a_0 + 6d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d = -x^2 - 2x - 6 \\ a_0 = 6x + 18 + 2x^2 + 4x + 12 \\ 2x^2 + 10x + 30 - 30^2 - 6x - 18 = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0 \\ & (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0 \\ & (x-2)(x-2)(x^2 - 4x - 3) = 0 \\ & (x-2)^2(x-1)(x-3) = 0 \\ & \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Про $x=1$: $\begin{cases} a_5 = 24 \\ a_7 = 9 \\ a_{11} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 36 \\ d = -3 \end{cases} \Rightarrow a_7 = 36 - 18 = 18 \neq 9 - \text{не верно}$

Про $x=2$: $\begin{cases} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \\ a_{11} = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 58 \\ d = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \\ a_{11} = -12 \end{cases} - \text{верно}$

Про $x=3$: $\begin{cases} a_5 = 36 \\ a_7 = 9 \\ a_{11} = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d = -27 \\ 2d = -18 \end{cases} - \text{не верно}$

Ответ 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ДЗ

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 4y-3x \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14 \leq x+y \leq 14 \\ -8 \leq 4x-3y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12 \leq x+y \leq 12 \\ -6 \leq 4x-3y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -48 \leq 7x \leq 48 \\ -14 \leq x+y \leq 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -98 \leq 7x+7y \leq 98 \\ -48 \leq 7x \leq 48 \end{cases}$$

$$-146 \leq 14x+7y \leq 146$$

$$-146 \leq 14x+7y \leq 146 \Rightarrow \min(14x+7y) = -146$$

Ответ: -146.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$m-n+9 > m-n \Rightarrow m-n \in \{1, 3, p^2\}$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=p^2 \\ m-n+9=13 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ p^2=10 \notin \mathbb{N} \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=13 \\ 22=p^2 \text{ не квадрат} \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} p^2=4 \\ m-n=p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=2 \\ m-n=4 \\ 7mn=3q^2 \Rightarrow q \Rightarrow 14 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ 7mn=3 \cdot 7 \cdot 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ mn=21 \Rightarrow \begin{cases} m=4+n \\ n^2+4n-21=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+7 \mid (n-3)=0 \\ n=4+n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=-7 \notin \mathbb{N} \\ n=3 \\ n=4+n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=3 \\ m=7 \end{cases}$$

$$m-n+9 > m-n \Rightarrow m-n \in \{1, 3\}$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \\ mn(m-n+3)=13p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=3 \\ m-n+9=3q^2 \\ mn(m-n+3)=13p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^2=10 \text{ не квадрат} \\ mn(m-n+3)=13p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=3 \\ q=2 \\ 6mn=13p^2 \Rightarrow p^2 \mid 6 \text{ не квадрат} \Rightarrow p \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Ответ (7/3)



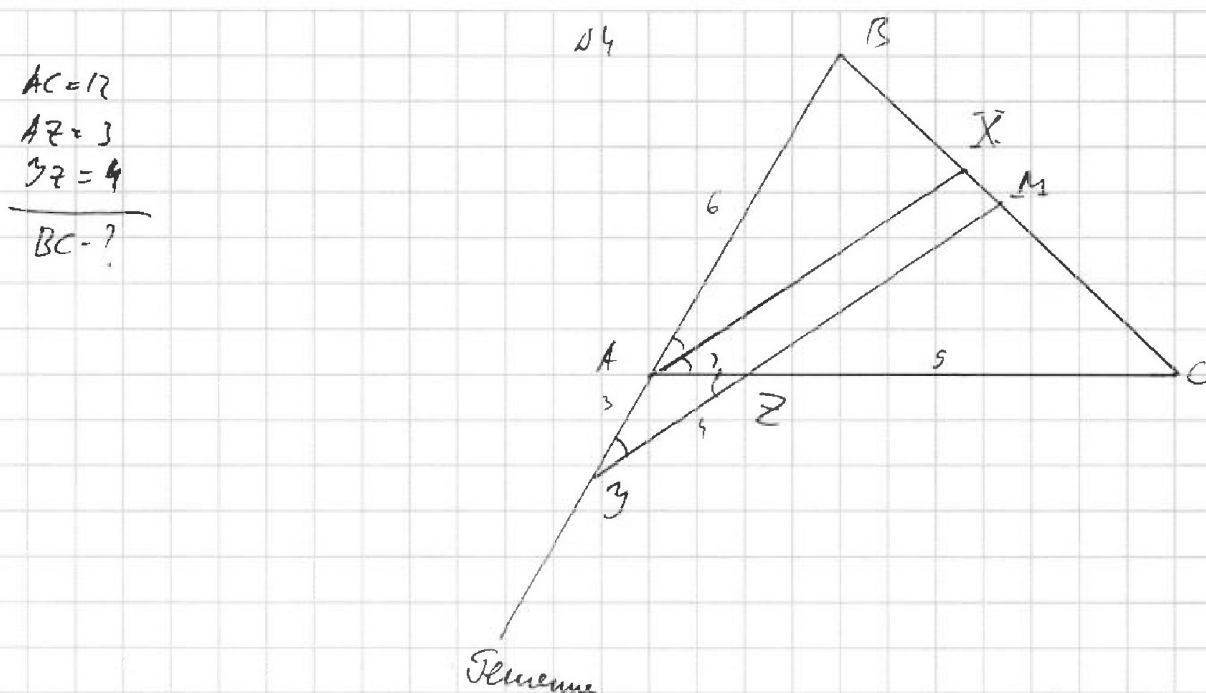
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

7 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1) $\angle XAZ = \angle ZAZ$ - накрест лежащие при $AX \parallel ZM$ и сек. AZ
- 2) $\angle BAX = \angle BZM$ - соотв. при $AX \parallel ZM$ и сек. BZ
- 3) $\angle BAX = \angle XAC$
 $\angle BZM = \angle ZCA \Rightarrow \angle BZM = \angle AZC \Rightarrow \triangle AZZ$ - равнобедр. $\Rightarrow AZ = AZ = 3$
- 4) $AC = AZ + ZC \Rightarrow ZC = 12 - 3 = 9$
- 5) $\angle ACX$
 $ZM \parallel AX \Rightarrow$ $\frac{CM}{CX} = \frac{CZ}{CA} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
 $\frac{CM}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BX}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BX}{BM} = \frac{2}{3}$
- 6) $\angle BZM$
 $AX \parallel ZM \Rightarrow$ $\frac{BA}{BZ} = \frac{BX}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow BZ = \frac{3}{2} BA = 6 \Rightarrow BA = ZAZ = 6$
- 7) Пусть $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle ZAZ = 180^\circ - \alpha$
- 8) По теореме косинусов в $\triangle AZZ$
 $ZZ^2 = AZ^2 + AZ^2 - 2 \cdot AZ \cdot AZ \cdot \cos \angle ZAZ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$16 = 18 + 18 \cos \alpha$$

$$18 \cos \alpha = -2$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{9}$$

5) По формуле косинусов в $\triangle BAC$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 \cdot BA \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos \alpha$$

$$BC^2 = 180 - 144 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$BC^2 = 180 + 16$$

$$BC^2 = 196$$

$$BC = \pm 14 \quad \left| \begin{array}{l} BC > 0 \\ \hline \end{array} \right. \Rightarrow BC = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{5} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases} \quad (1)$$

(1) Пусть $x = a^4, y = b^4$ (можно так сделать, так как $x \geq 0$ и $y \geq 0$)

$$4a^{16} + a^4 + 5a = 4b^{16} + b^4 + 5b$$

$$4(a^{16} - b^{16}) + (a^4 - b^4) + 5(a - b) = 0$$

$$4(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + 5(a - b) = 0$$

$$(a - b) \left(4(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b) + (a^2 + b^2)(a + b) + 5 \right) = 0$$

$$\begin{array}{l} 4 \geq 0 \\ a^8 + b^8 \geq 0 \\ a^4 + b^4 \geq 0 \\ a^2 + b^2 \geq 0 \\ a + b \geq 0 \\ 5 \geq 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow A \geq 0 \quad (a - b)A = 0 \quad \Rightarrow a - b \geq 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow x = y$$

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

Пусть $c = \sqrt{x+6}, d = \sqrt{5-y}$, тогда так. $30 - x - y^2 = (x+6)(5-y)$

$$\begin{cases} c - d + 5 = 2cd \\ c^2 - d^2 + 25 = 11 \end{cases}$$

$$c^2 - d^2 + 25 = 11$$

$$\begin{cases} c^2 + d^2 - 2cd = 4(d^2 + 25 - 10cd) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 + d^2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 = 4(cd)^2 + 25 - 10cd \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} c^2 + d^2 = 11 \end{cases}$$

$$(3) 4(cd)^2 - 10cd + 14 = 0$$

$$2(cd^2 - 5cd + 7) = 0$$

$$(cd - 1)(2cd - 7) = 0$$

$$\begin{cases} cd = 1 \\ cd = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$cd = \frac{7}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} c^2 + d^2 = 11 \\ cd = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} c^2 + d^2 = 11 \\ cd = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+d)^2 - 2cd = 11 \\ cd = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (c+d)^2 - 2cd = 11 \\ cd = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+d)^2 = 13 \\ cd = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (c+d)^2 = 13 \\ cd = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+d = \sqrt{13} \\ cd = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c+d = 3\sqrt{2} \\ cd = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \sqrt{13} - d \\ d(\sqrt{13} - d)^2 = 1(4) \end{cases} \quad \begin{cases} c = 3\sqrt{2} - d \\ 6\sqrt{2}d - 2d^2 = 7(5) \end{cases}$$

$$(4) \quad d^2 - d\sqrt{13} + 1 = 0$$

$$D = 13 - 4 = 9$$

$$d = \frac{\sqrt{13} \pm 3}{2}$$

$$c = \sqrt{13} - d$$

$$\begin{cases} c = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \\ d = \frac{\sqrt{13} + 3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{3\sqrt{2} - 7}{2} \\ d = \frac{3\sqrt{2} + 7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \frac{\sqrt{13} + 3}{2} \\ d = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{3\sqrt{2} + 7}{2} \\ d = \frac{3\sqrt{2} - 7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + 6 = \frac{1}{4}(16 - 6\sqrt{13}) \\ 5 - X = \frac{1}{4}(16 + 6\sqrt{13}) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} X + 6 = \frac{1}{4}(21 + 6\sqrt{13}) \\ 5 - X = \frac{1}{4}(21 - 6\sqrt{13}) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} X + 6 = \frac{1}{4}(22 - 12\sqrt{2}) \\ 5 - X = \frac{1}{4}(22 + 12\sqrt{2}) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} X + 6 = \frac{1}{4}(22 + 12\sqrt{2}) \\ 5 - X = \frac{1}{4}(22 - 12\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4}(-3 - 6\sqrt{13}) \\ X = \frac{1}{4}(-1 - 6\sqrt{13}) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} X = \frac{1}{4}(-7 + 6\sqrt{13}) \\ X = \frac{1}{4}(-1 + 6\sqrt{13}) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} X = \frac{1}{4}(-24 - 12\sqrt{2}) \\ X = \frac{1}{4}(-2 - 12\sqrt{2}) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} X = \frac{1}{4}(-2 + 12\sqrt{2}) \\ X = \frac{1}{4}(2 - 12\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$X < 0 - \text{не берем} \quad \quad \quad -3 + 6\sqrt{13} \neq -1 + 6\sqrt{13} - \text{не берем} \quad \quad \quad X < 0 - \text{не берем} \quad \quad \quad X > 0 - \text{берем}$$

$$X = \frac{-2 + 12\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{-1 + 6\sqrt{2}}{2} \\ Y = \frac{-1 + 6\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{-1 + 6\sqrt{2}}{2}, \frac{-1 + 6\sqrt{2}}{2} \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

56

П.к. Ваураш 9×9 , то у него всего 100 клеток покрасить в чёрный. Способов покрасить два узла в белый всего $100 - 99$. П.к. при повороте на $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ мы получаем ту же раскраску, то все раскраски мы посчитали по 4 раза, то есть всего $\frac{100 - 99}{4} = 25 - 99 = 2475$ различных способов. Если не поворачивать на угол покраски 90° , то квадраты не перейдут сам в себя.

Ответ 2475.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9) CL - медиана (h, g) $\left| \begin{array}{l} h, \\ CL - \text{высота} (g, h) \end{array} \right. \Rightarrow \triangle ABC - \text{равнобедренный} \Rightarrow AC = BC$

10) AK - диаметр $\Rightarrow \angle ANK = 90^\circ \Rightarrow MN \parallel BK \parallel \text{т. Паласа}$
 $BK = KC \Rightarrow KN = NC$

11) Пусть $KN = NC = x \Rightarrow AK = 20 - x \Rightarrow AC = 20 + x = BC$

12) По т. Пифагора в $\triangle ABK$ ($\angle AKB = 90^\circ$):

$$AK^2 + BK^2 = AB^2$$

13) По т. Пифагора в $\triangle BCK$ ($\angle BKC = 90^\circ$):

$$BK^2 + CK^2 = BC^2$$

14) из 12) и 13):

$$AB^2 - AK^2 = BC^2 - CK^2$$

~~или~~

$$676 - (20 - x)^2 = (20 + x)^2 - 4x^2$$

$$676 = 400 + x^2 - 40x + 400 + x^2 + 40x - 4x^2$$

$$676 = 800 - 2x^2$$

$$2x^2 = 124 \Rightarrow x^2 = 62 \Rightarrow x = \sqrt{62} \Rightarrow AC = BC = 20 + x = 20 + \sqrt{62}$$

Ответ: $AC = BC = 20 + \sqrt{62}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$m, n \in \mathbb{N}$$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases} \quad \checkmark \quad \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=13p \\ m-n=p \end{cases}$$

$$13p^2=3q^2$$

$$p^2=9=3^2$$

$$p^2=22-12=10$$

$$(m-n)=p^2$$

$$m-n+9=13$$

$$p^2=4$$

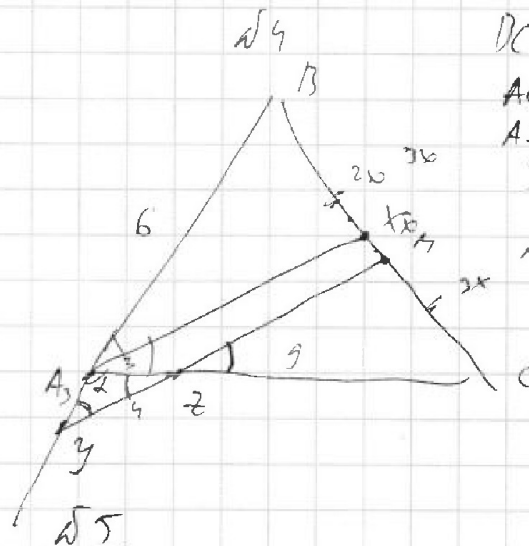
$$p=2$$

$$\begin{cases} m-n=13 \\ mn \cdot 16 = 3q^2 \end{cases}$$

$\sqrt{3}$

$$\begin{matrix} 13p^2 \\ 3q^2 \end{matrix}$$

$$(7;3) \rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 13 = 13 \cdot 2^2 \\ 7 \cdot 3 = 3 \cdot 7^2 \end{cases}$$



$BC=?$

$$AC=12$$

$$AZ=3$$

$$3z=4$$

$$AZ=AZ=3$$

$\sqrt{5}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{5-y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

$$4x^4 + x + 5\sqrt{5-y} = 4y^4 + y + 5\sqrt{x}$$

$$4x^4 - 4y^4 = y - x + 5\sqrt{5-y} - 5\sqrt{x}$$

$$(4x^4 - 4y^4) + (x - y) + 5(\sqrt{5-y} - \sqrt{5-x}) = 0$$

$$(x+6)(5-y) = 20 - 6y + 5x - xy$$

$$20 - x - y^2 = 20 - 6y + 5x - xy + A$$

$$A = -y^2 + 6y - 6x + xy =$$

$$= -y(y-x) + 6(y-x) =$$

$$= (y-x)(6-y)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a_5 &= 6x + 18 \\ a_7 &= (x^2 - 4x)^2 \\ a_{11} &= (-3x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \cdot d_1 \\ \begin{cases} a_5 = a_0 + 4d \\ a_7 = a_0 + 6d \\ a_{11} = a_0 + 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 - 6x - 18 \\ 4d = -3x^2 - x^4 - 16x^2 + 8x^3 \end{cases} \\ 6d = -3x^2 - 6x - 18 \\ 2d = -x^2 - 2x - 6 \end{aligned}$$

$$a_0 = a_5 - 4d = 6x + 18 + 2x^2 + 4x + 12 = 2x^2 + 10x + 30$$

$$2x^2 + 10x + 30 - 3x^2 - 6x - 18 = (x^2 - 4x)^2$$

$x=1$

$$-x^2 + 4x + 12 = x^4 + 16x^2 - 8x^3$$

$$24 = -12 + a_0$$

$$8 = -18 + a_0$$

$$-3 =$$

$$x=21$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x=2, 16 - 64 + 68 - 8 - 12 - 20 - 20 = 0$$

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$(x-2)(x-2)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$(x-2)^2(x-1)(x-3) = 0$$

$$\begin{cases} 30 \\ 6/6 \\ -12 \end{cases}$$

$$2d = -14$$

$$2d = -4$$

$$2d = -4$$

$$a_0 = 58$$

$$x=31$$

$$\begin{cases} 36 \\ 9 \\ -24 \end{cases}$$

$$2d = -27$$

$$2d = -18$$

d_2

$$\text{with } 14x + 7y = ?$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$14x + 7y = -162$$

$$2x + y =$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 14 + 4 = 18 \\ & 14x + 7y = -162 \\ & 2x + y = -162/7 \\ & 14x + 7y = -162 \\ & 2x + y = -162/7 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -14 \leq x + y \leq 14 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -64 \leq 7x \leq 64 \\ -59 \leq 7x + 7y \leq 59 \\ 162 \leq 14x + 7y \leq 162 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x-6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy}$$

$$5\sqrt{x-6} + \sqrt{5-y} + 10\sqrt{x-6} - 10\sqrt{5-y} - 2\sqrt{30-xy} + 5\sqrt{x-6} =$$

$$= 4(30-xy) - 10 - 4x - 4y^2$$

$$(x-6)(5-y)(y-x)(6-y) = (6y-y^2-6x+xy)(5x-xy-30+6y) =$$

$$= (30xy-6xy^2-180y+36y^2-5xy^2+xy^3+30y^2-6y^3-30x^2+6x^2y-30x-$$

$$-36xy+5x^2y-x^2y^2-30xy+6xy^2 =$$

$$= 4(30xy-6xy^2-180y+36y^2-5xy^2+xy^3+30y^2-6y^3-30x^2+6x^2y-30x-$$

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6 \\ 5-y \geq 0 \rightarrow y \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow y \in [0; 5] \rightarrow x \in [0; 30]$$

$$30-x-y^2 \geq 0 \quad x+y^2 \leq 30$$

$$x=a^4 \quad y=b^4$$

$$4a^{16} + a^4 + 5a = 4b^{16} + b^4 + 5b$$

$$4(a^8+b^8)(a^8+b^8) + (a^8-b^8)(a^2+b^2) + 5(a-b) = 0$$

$$4(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b) + (a^2+b^2)(a-b)(a+b) + 5(a-b) = 0$$

$$(a-b)(4(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b) + (a^2+b^2)(a+b) + 5) = 0$$

$$a=b \Rightarrow x=y$$

→ 0

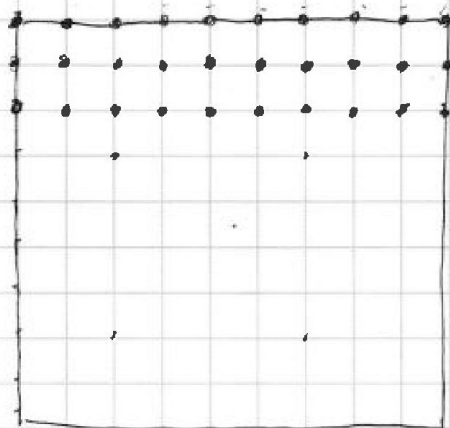


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№ 6.

всего 100 узлов $\Rightarrow$ 100 клеток
перекрестить два узла в бисектрисе
все фигуры 40 4 раза в бисектрисе

всего способов $\Rightarrow 100 \cdot 99$

$$\text{но, } \frac{100 \cdot 99}{4} = 99 \cdot 25 = 100 \cdot 25 - 25 = 2500 - 25 = 2475$$



$$\begin{aligned} 4x - 3y &= -6 \\ 3x - 4y &= -9 \\ \begin{aligned} xy &= -2 \\ x &= y - 2 \\ 4(y - 2) - 3y &= -6 \\ 4y - 8 - 3y &= -6 \\ y &= 2 \\ x &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= y \\ x &= (y - 2) \\ 5y - 8 &= -9 \\ 5y &= -1 \\ y &= -0.2 \\ x &= -0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= 26 \\ AN &= 20 \end{aligned}$$

$$MN = AN = x$$

$$\begin{aligned} MN &= \frac{1}{2} BH \\ AN^2 + NH^2 &= AH^2 \end{aligned}$$

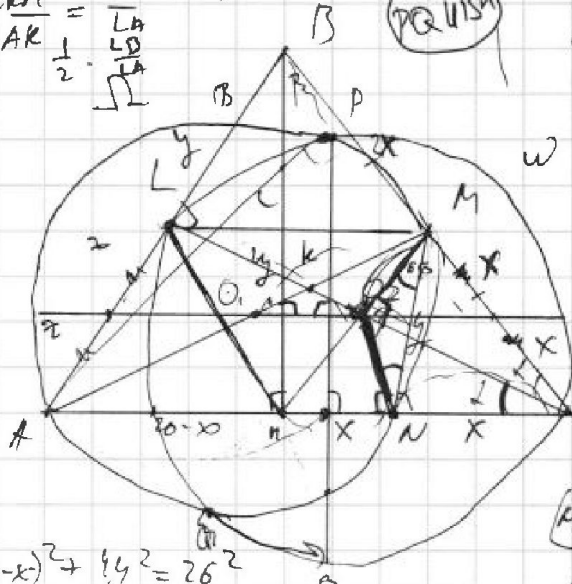
$$\begin{aligned} AC &= AN + 2x \\ dK_{\text{сл}}^2 &= w^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$AN = AN + x$$

$$MN = y$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 100 \\ x^2 + 4y^2 &= 100 \end{aligned}$$

$$\frac{2KA}{AK} = \frac{LB}{LA} \cdot \frac{LA}{LB} = 1$$



$$\begin{aligned} AC &= ? \\ BC &= ? \end{aligned}$$

$$\frac{CK}{KL} \cdot \frac{LA}{AB} = 1$$

$$\frac{KA}{LA} = \frac{LA}{LB} = \frac{AC}{CB}$$

$$\frac{AC}{CM} = \frac{AK}{KM} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{AL}{LB}$$

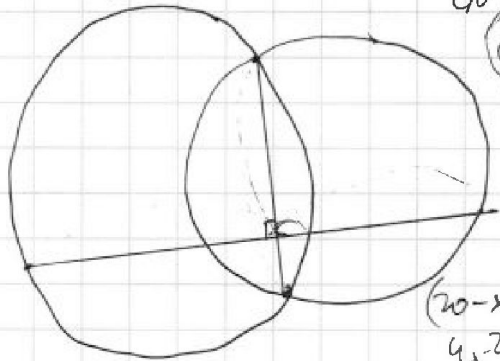
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{2KM} \Rightarrow \frac{AK}{2KM} = \frac{AL}{LB}$$

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{MK}{KA} = 1$$

$$\frac{AK}{LB} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{LB}{KA} = 1 \quad (20-x)^2 + 4y^2 = 26^2$$

$$CN \cdot CA = CO^2 - R_n^2$$

$$d^2 + 13^2 = BC^2$$



$$\begin{aligned} (20-x)^2 + 4y^2 &= 26^2 \\ 4x^2 + 4y^2 &= (20-x)^2 \end{aligned}$$

