



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№01

$$a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

Будем обозначать членом арифметической прогрессии или a_i , где i — номер члена последовательности

пусть $(a_2 - a_1 = b)$ $a_{i+1} - a_i = b$

то есть b — разность между двумя последовательными членами арифметической прогрессии

Получим

$$a_4 = a_1 + 3b$$

$$a_6 = a_1 + 5b$$

$$a_{10} = a_1 + 9b$$

получим систему:

$$\begin{cases} a_1 + 3b = 6 - 9x & (1) \\ a_1 + 5b = (x^2 - 2x)^2 & (2) \\ a_1 + 9b = 9x^2 & (3) \end{cases}$$

из (1) и (3)

$$6b = 9x^2 + 9x - 6$$

$$2b = 3x^2 + 3x - 2 \quad (*)$$

$$(x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

из (1) и (2)

$$2b = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 \quad (**)$$

из (*) и (**)

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 = 3x^2 + 3x - 2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$1 - 3 - 2 + 4 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \mid x-1$$

$$-x^3 + x^2$$

$$-2x^2 - 2x$$

$$-2x^2 + 2x$$

$$-4x + 4$$

$$-4x + 4$$

$$0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \mid x-1$$

$$x^4 - x^3$$

$$-3x^3 + x^2$$

$$-3x^3 + 3x^2$$

$$-2x^2 + 6x$$

$$-2x^2 + 2x$$

$$4x - 4$$

$$4x - 4$$

$$0$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1 (продолжение)

Тогда, значения x , удовлетворяющие условию $x = \frac{1}{2 \pm 2\sqrt{5}}$
 $1 \pm \sqrt{5}$

Проверим:

при $x = 1$

$$\alpha_4 = -3 \mid \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow \alpha_{10} = 1 + 2 \cdot 4 = 9$$

$$\alpha_6 = 1$$

$9x^2$ при $x = 1 \Rightarrow$ верно

при $x = 1 + \sqrt{5}$

$$\alpha_4 = 6 - 9 - 9\sqrt{5} = -3 - 9\sqrt{5}$$

$$\alpha_6 = ((1 + \sqrt{5})^2 - 2 - 2\sqrt{5})^2 = 16 \mid \Rightarrow -3 - 9\sqrt{5} + 2\beta = 16$$

$$2\beta = 19 + 9\sqrt{5}$$

$$1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} = 4$$

$$\alpha_{10} = \alpha_6 + 4\beta \Rightarrow \alpha_{10} = 16 + 38 + 18\sqrt{5} = 54 + 18\sqrt{5}$$

с другой стороны $9x^2 =$

$$= 9(1 + \sqrt{5})^2 =$$

$$= 9 + 18\sqrt{5} + 45 =$$

$$= 54 + 18\sqrt{5} \text{ верно}$$

~~$$\alpha_4 = 6 - 9 + 9\sqrt{5}$$~~

~~$$\alpha_6 = (1 - \sqrt{5})^2 -$$~~

Ответ: $1; 1 \pm \sqrt{5}$

выяснить по чему $x = 1 - \sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$3y + 6x \text{ max-?}$$

$3(y + 2x) \Rightarrow$ достаточно найти максимальное значение $y + 2x$

$$|x - 2y| \leq 2$$

$$x < 2y$$

$$|2x - y| \leq 1$$

$$x \geq 2y$$

$$2y \leq 2x$$

$$2x \geq y$$

$$2x < y$$

$$x - 2y \leq 2$$

$$y \leq 1 + \frac{x}{2}$$

$$2x - y \leq 1$$

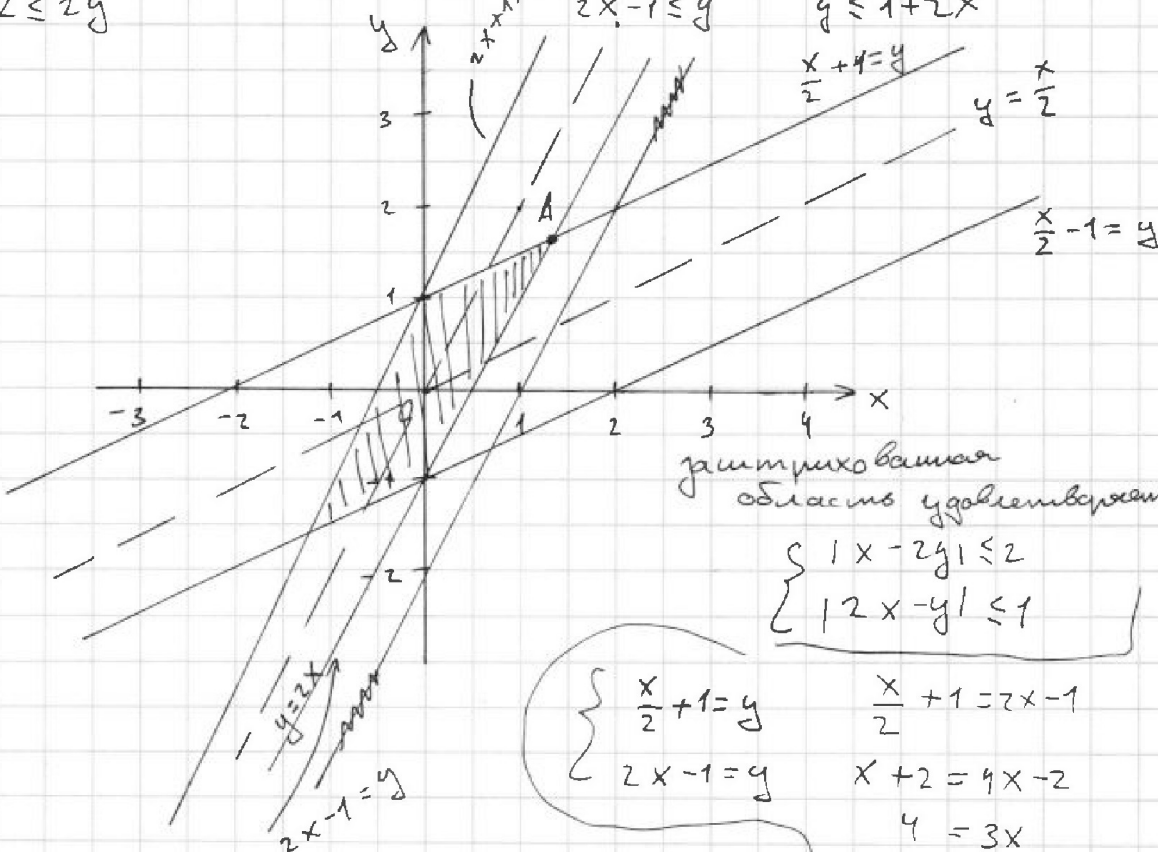
$$y - 2x \leq 1$$

$$x - 2 \leq 2y$$

$$y \leq 1 + 2x$$

$$2x - 1 \leq y$$

$$y \leq 1 + 2x$$



3y + 6x максимум x и y максимум x и y

заменим, что x и y принимают максимальные значения в точке A, отмеченной на графике тогда A является точкой пересечения

$$\text{тогда } 3y + 6x = 3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} = 5 + 8 = 13$$

Ответ: 13.





1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

m, n - натуральные p, q - простые числа

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

при этом

$$\begin{cases} A = 11p^2 \\ B = 75q^2 \end{cases} (1)$$

$$\begin{cases} A = 75q^2 \\ B = 11p^2 \end{cases} (2)$$

для (1)

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 11p^2$$

если m и n - четные то $11p^2$ должно быть четным, что возможно

только при $p = 2$, т.к. p - простое, аналогично $75q^2$ тогда тоже должно быть четным и $q = 2$

тогда:

$$\begin{cases} m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 44 \\ m^2n + 2mn^2 + 9mn = 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$75 \cdot 4 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$mn(m + 2n + 9)$$

т.к. m и n -

-натуральные по условию

$\Rightarrow m + 2n + 9$ - натуральное

т.к. по предположению m и n - четные $\Rightarrow$

$$\Rightarrow mn : 4 \quad \text{тогда } m + 2n + 9 = 5^2 \cdot 3$$

$$m + 2n + 9 = 25$$

$$m + 2n = 16$$

$$mn = 12$$

не подходит

$$m + 2n + 9 = 15 \Rightarrow m + 2n = 6$$

$$mn = 20$$

не подходит

$$m + 2n + 9 = 75$$

$$mn = 4 \Rightarrow m = n = 2 \Rightarrow 2 + 4 + 9 \neq 75$$

аналогично для (2) если m и n - четные

$$m^2n + 2mn^2 + 9mn = 11 \cdot 4$$

$$mn(m + 2n + 9) = 11 \cdot 4 \quad \text{где } mn : 4 \Rightarrow m = n = 2$$

$$\Rightarrow 9 \Rightarrow m + 2n + 9 = 11 \quad \text{не подходит}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

Получается, что оба числа не могут быть четными
если оба числа m и n
нечетные, то

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

(n - нечетное
 m - четное)

$$A = 4 + 7 + 7 - 4 - 7$$

A - четное

$$B = 4 + 7 + 4$$

B - четное

$$\Rightarrow p = q = 2$$

$$B = mn(m + 2n + 9) = \begin{matrix} 44 \\ 75.4 \end{matrix}$$

$4 + 7 + 4 = 7$

если $B = 11p^2$ то $mn(m + 2n + 9) = 44$ где $m + 2n + 9 : 4$

если же $mn(m + 2n + 9) = 75.4$

н.к. $m + 2n + 9 > 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m + 2n + 9 = 44$$

$$mn = 1 \Rightarrow m = n = 1$$

$$1 + 2 + 9 \neq 44$$

не подходит

$$m + 2n + 9 = \begin{matrix} 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 \end{matrix}$$

$$m + 2n = 3$$

$$m = n = 1$$

не подходит

$$m + 2n = 11$$

$$mn = 15$$

или $m = 5$
 $n = 3$

$$5 + 6 = 11$$

тогда $A = 44$

$$5^2 + 4 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 - 7 \cdot 5 - 14 \cdot 3 =$$

$$= 25 + 60 + 36 - 35 - 42 =$$

$$26 = 86 - 42 = 44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 5; n = 3 \text{ удовлетворяет}$$

$$m + 2n + 9 = 60$$

$$m + 2n = 51$$

$$mn = 5 \text{ не подходит}$$

$$m + 2n + 9 = 100$$

$$mn = 3 \text{ не подходит}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

Теперь рассмотрим случаи когда одно из чисел m или n четное, а второе нечетное

тогда: 1) пусть m - четное

$$A = \chi + \chi + \chi - \chi - \chi = \chi \Rightarrow A - \text{четное} \Rightarrow$$

$$B = \chi + \chi + \chi - \text{четное}$$

$$\Rightarrow p = q = 4$$

$$mn(m+2n+9) = \begin{cases} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$\chi + \chi + \chi = 4 \Rightarrow mn:4, \text{ а т.к. } n - \text{нечетное} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m:4$$

тогда где $B = 44$ $n=1; m=4$; $m+2n+9 \neq 11$

не подходит

где $B = 75 \cdot 4$ $m+2n+9 = \begin{cases} 75 \rightarrow m=4, n=1 \text{ не подходит} \\ 15 \Rightarrow mn=5 \cdot 4; m+2n=6 \\ 25 \Rightarrow mn=3 \cdot 4; m+2n=16 \end{cases}$

не подходит

2) пусть n - четное

$$A = \chi + \chi + \chi - \chi - \chi \Rightarrow A - \text{четное} \Rightarrow$$

$$B = \chi + \chi + \chi - \text{четное}$$

$$\Rightarrow p = q = 2 \Rightarrow B = \begin{cases} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$mn(m+2n+9) = \begin{cases} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$\chi + \chi + \chi = 2 \Rightarrow \chi:2$$

$$m=6 \rightarrow 4+6 \text{ не}$$

$$12 \quad 12+2 \text{ подходит}$$

если $B = 44$ $m+2n+9 = 2 \cdot 11 = 22 (m.k. > 9)$

$$m+2n = 13 \text{ не подходит}$$

$$mn = 2$$

если $B = 75 \cdot 4$

$$m+2n+9 = \begin{cases} 75 \cdot 2 \text{ не подходит} \\ 5 \cdot 2 \text{ } m+2n \neq 1 \text{ не подходит} \\ 5 \cdot 3 \cdot 2 \text{ } 30 \Rightarrow mn = 10 \Rightarrow m = \begin{cases} 2 \text{ } n=5 \\ 10 \text{ } n=1 \end{cases} \\ 25 \cdot 2 \end{cases}$$

Таким образом

есть единственная пара чисел m, n , удовлетворяющая условию

Ответ: $m=5; n=3$.

$$m+2n+9=50$$

$$mn=6 \Rightarrow m=6$$

$$\text{не подходит}$$

$$10+2+9 \neq 30$$

$$2+10+9 \neq 30$$

$$\text{не подходит}$$

$$6+6+9 \neq 50$$

$$2+6+9 \neq 50$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

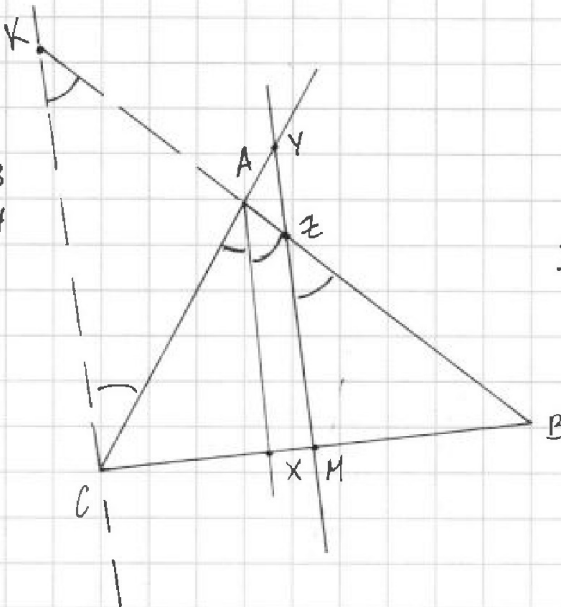
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4
BC-?
AC=6
AZ=3
~~AB=6~~
YZ=4



AX - биссектриса

AX || MZ

BM = MC

Проведем прямую || MZ через точку C и продолжим AB до пересечения с ней. Обозначим точку пересечения K. Вспомогательный $\triangle CBK$:

M - середина CB и $\Rightarrow$
MZ || CK

$\Rightarrow$ MZ - средняя линия и Z - середина KB

т.к. AX - биссектриса то $\angle CA X = \angle XAB$

т.к. AX || MZ || CK $\Rightarrow \angle CA X = \angle B Z M = \angle B K C = \angle A C K$

(По теореме о пропорциональных отрезках:)

$$\frac{BZ}{ZA} = \frac{BM}{MX}$$

$$\frac{AZ}{AK} = \frac{XM}{XC}$$

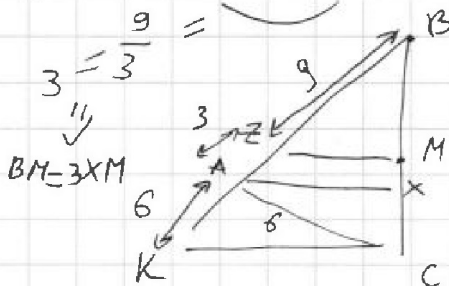
$\triangle CAK - \text{п/с} \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = AC = 6$
по условию

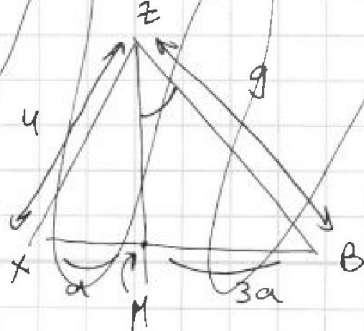
т.к. Z - середина BK $\Rightarrow$

$\Rightarrow KZ = ZB = KA + AZ = 6 + 3 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow ZB = 9$



также в условии нам дана длина отрезка XZ = 4



$$\frac{ZB}{AZ} = \frac{BM}{XM} = \frac{9}{3} = 3$$

$$BM = 3XM$$

обозначим

$$XM = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM = 3a \Rightarrow BC = 6a$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

м.к. AX - биссектриса $\Rightarrow \frac{AC}{CX} = \frac{AB}{BX}$

решим, что $\triangle KAC \sim \triangle ZAY$
м.к. $KC \parallel ZY$; $\angle KAC = \angle YAZ$,
как верши
нах
мы уже знаем,
что $AZ = 3$
 $YZ = 4$
 $KA = AC = 6$

$\triangle KAC \sim \triangle ZAY \Rightarrow$ отсюда $\mu/\delta \Rightarrow AZ = AY = 3$

$\frac{KC}{YZ} = \frac{AC}{ZA} \Rightarrow \frac{KC}{4} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow KC = 8$

$\triangle BKC \sim \triangle BAX \sim \triangle BZM$

$MZ = \frac{KC}{2} = 4$

$\frac{AX}{MZ} = \frac{XB}{MB} = \frac{1}{3}$

$AX = \frac{16}{3}$

высота в $\triangle KAC$
является и
медианой м.к. $\mu/\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

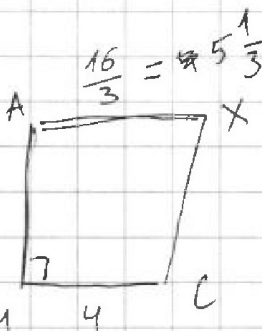
7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (продолжение)

Площа папусли:

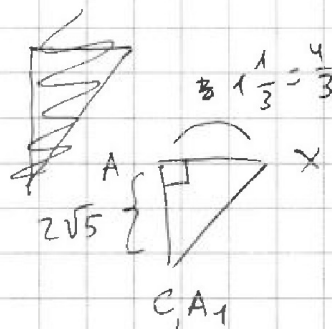


$$CX = \sqrt{4 \cdot 5 + \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{196}}{3}$$

$$\frac{20 \cdot 9 + 16}{9} = \frac{196}{9}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 88 \\ \hline 104 \\ + 152 \\ \hline 256 \end{array}$$

Ответ: $\sqrt{196} = BC$



мы знаем $CX + XM = \frac{BC}{2}$

$$XM = \frac{BM}{3} = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CX + a = 3a$$

$$CX = 2a$$

$$\frac{\sqrt{196}}{3} = 2a$$

$$\sqrt{196} = 6a = BC$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-y} + x = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ \sqrt{x^3+3x-\sqrt{2y}} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

Реш 3:

$$\begin{aligned} x+2 &\geq 0 \\ x &\geq -2 \\ 2x &\geq 0 \end{aligned} \Rightarrow x \geq 0$$

$$\begin{aligned} x-y &\geq 0 \\ x &\geq y \\ 2y &\geq 0 \end{aligned} \Rightarrow x \geq y \geq 0$$

$$14+5x-y^2 \geq 0$$

$$x^3+3x+\sqrt{2x} = y^3+3y+\sqrt{2y}$$

замечим, что если
(свойство монотонности)

$$\begin{aligned} x > y &\Rightarrow x^3 > y^3 \\ 3x > 3y & \\ \sqrt{2x} > \sqrt{2y} & \end{aligned} \Rightarrow x = y$$

тогда

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 4 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-x} + x = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} + x = 2\sqrt{14+5x-x^2} + \sqrt{x-x}$$

$$x+2+14\sqrt{x+2}+49 = 4(14+5x-x^2) + 4\sqrt{x-x} + x-x$$

$$x+54\sqrt{x+2}+x-4\cdot 14-20x+4x^2+14\sqrt{x+2} = 4\sqrt{x-x}$$

$$4x^2 - 18x + 44 - 56 + 14\sqrt{x+2} = 4\sqrt{x-x} \quad / : 2$$

$$(2x^2 - 9x - 6) + 7\sqrt{x+2} = 2\sqrt{x-x}\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$(2x^2 - 9x - 6)^2 + 14\sqrt{x+2}(\quad) + 49(x+2) = 4(x-x)(14+5x-x^2)$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 9x - 6 &= (2x^2 - 9x)^2 - 12(2x^2 - 9x) + 36 = \\ &= 4x^4 - 36x^3 + 81x^2 - 24x^2 + 108x + 36 = \\ &= 4x^4 - 36x^3 + 57x^2 + 108x + 36 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)

$$4x^4 - 36x^3 + 57x^2 + 108x + 36 + 49x + 98$$

134

$$\begin{array}{r} 2 \\ 14 \\ \times 4 \\ \hline 98 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \cdot 4 - 157 \\ 84 \end{array}$$

$$4(7-x)(14+5x-x^2) = 4(98 + 35x - 7x^2 - 14x - 5x^2 + x^3) =$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ 11 \\ + 11 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$= 4 \cdot 98 + 35 \cdot 4x - 28x^2 - 20x^2 - 14 \cdot 4x + 4x^3$$

$$14\sqrt{x+2}(2x^2-9x-6) = -4x^4 + 40x^3 - 105x^2$$

$$14 + 5x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 5x - 14 \leq 0$$

$$(x-7)(x+2) \leq 0$$

$$x \in [-2; 7]$$

$$\text{ог. обз. м.к. } x = 4$$

$$x \in [0; 4]$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2}$$

$$25 + 4 \cdot 14 = 25 + 56 = 81$$

$$x = \frac{5 \pm 9}{2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 4 \\ \hline 58 \end{array}$$

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

2208

$$14\sqrt{x+2}(2x^2-9x-6) = -4x^4 + 40x^3 - 105x^2 - 73x +$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 2 \cdot 6}}{4} + 98 \cdot 4 - 134$$

$$48 + 80 + 12 = 129$$

$$3775 - 2\sqrt{144 + 35} = 49$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N₀₅

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{4-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$(x+7)(x-2) \geq 0$$

$$(x+7)(x-2) \geq 0$$



$$x \in [0; 4]$$

$$-x^2 + 5x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} = 2$$

$$-x^2 + 5x + 14 \geq 0$$

$$x^2 - 5x - 14 \leq 0 \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2} = [-2; 7]$$

$$(x-7)(x+2) \leq 0$$

$$x \in [-2; 7]$$

$$x \in [0; 4]$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{4-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$14+5x-x^2 = -(x-7)(x+2)$$

$$= -x^2 - 2x + 7x + 14$$

$$(7-x)(x+7)$$

$$\sqrt{x+2} = a$$

$$\sqrt{4-x} = b$$

$$a + b + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$\text{или } a + b + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$\Rightarrow -(x-7)(x+2) \leq 0 \Rightarrow x = [-2; 7]$$

$$\text{если } x = 7 \quad \sqrt{x+2} = \sqrt{9} = 3$$

$$3 - 0 + 7 = 2\sqrt{0} \quad 7 \neq 0$$

Таким образом система не имеет корней
Ответ: $\emptyset$



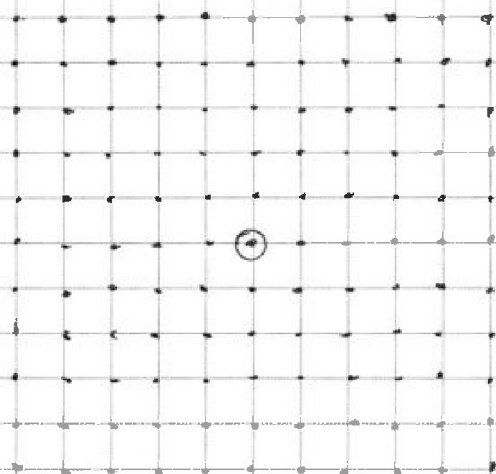
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



11 - 11 ~~11~~

121 узел (всего)

всего способов выбрать
два узла, которые мы
назовем
независимыми
в белом

$$\frac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60 = 7260$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 121 \\ \times 60 \\ \hline 7260 \end{array}$$

Заметим, что и раскраски, которые называются друг
из друга поворотом относятся к паре, в
которых белые узлы симметричны
относительно центра квадрата

Заметим, что для всех узлов краев центрального (связан
есть один (и только один) узел симметричный
относительно центра, ~~то есть узел~~ ^{на рисунке})

И для каждой такой раскраски (когда мы
перекрасим выбранный узел и симметричный
ему относительно центра) есть еще
одна раскраска, которая получается из предыдущей
поворотом, например:



Всего раскрасок, в которых узлы симметричные $\frac{120}{2} =$
= 60 (для каждого узла краев центрального есть
симметричный)

или эти же для каждой из них есть одна, которая
получается поворотом $\Rightarrow$ таких $\frac{60}{2} = 30$ 1230



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

Таким образом среди 7260 выполненных раскрасок
есть 60 таких, что они учитывают одну
раскраску, а значит, каждая такая поворотная
двигается $\Rightarrow$ раскрасок, удовлетворяющих
условию:

$$7260 - 60 = 7200$$

Ответ: 7200

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

$PQ \parallel BB_1$

$AC, BC - ?$

$AB = 4$

$AN = 5$

т.к. AM — диаметр $\Sigma \Rightarrow$

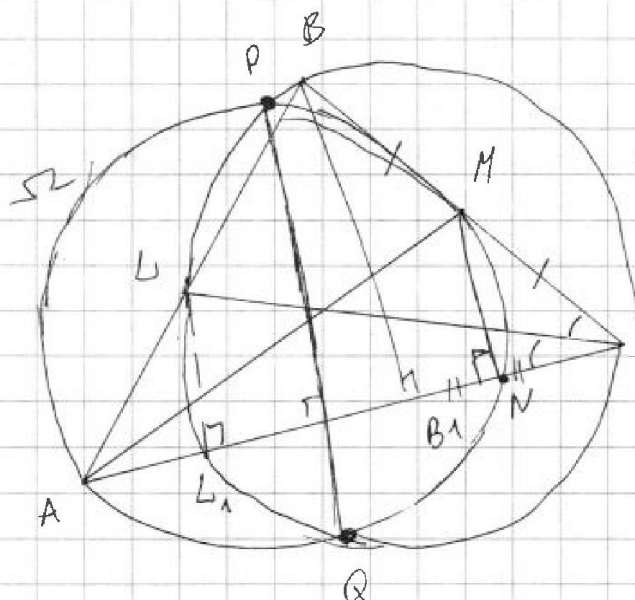
$\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$

а т.к. BB_1 — высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AB_1B = 90^\circ$

$\parallel$

$BB_1 \parallel MN$



При этом по условию $BB_1 \parallel PQ \Rightarrow PQ \parallel MN$

значит, что в $\triangle BCB_1$ $MN \parallel BB_1$ и M — середина BC по условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow MN$ — средняя линия $\Rightarrow CN = NB_1$

т.к. CL — биссектриса $\Rightarrow \frac{AC}{AL} = \frac{CB}{BL}$ где $AL + BL = AB = 4$

если $\angle AMC = 90^\circ \Rightarrow MC^2 = CN \cdot CA$
 $AN + CN$

$AN \cdot AM = AL \cdot AB$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

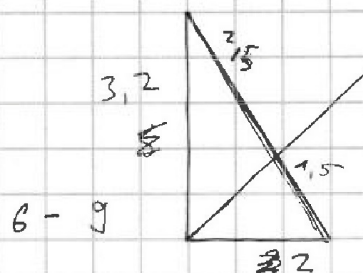
$$\begin{aligned}(x-1)^2(x^2-2x-4) &= (x^2-2x+1)(x^2-2x-4) = \\ &= x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 8x + x^2 - 2x - 4 = \\ &= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4\end{aligned}$$

$$6 - 9 = -3$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 24 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 16 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 16 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 24 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 16 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 16 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 24 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 16 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 16 \\ \hline 3 \end{array}$$



$$\begin{aligned}1 + 4 + 4 - 7 - 14 &= \\ &= 9 - 14 - 7 = \\ &= 2 - 14 = -12\end{aligned}$$

$$\frac{x}{2} = y$$

$$x - 2 \leq 2y$$

$$\frac{x}{2} - 1 \leq y$$

$$\begin{aligned}x &= 2 \\ y &= 0\end{aligned}$$

$$y = 1 + \frac{x}{2}$$

$$m + 2n + 9 = 15$$

$$m + 2n = 6$$

$$mn = 20$$

$$m + 2n = 16$$

$$mn = 12$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 15 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 + 2 \\ 4 + 6 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{aligned}(6 - 2n)n &= 20 \\ 6n - 2n^2 - 20 &= 0 \\ 2n^2 - 6n + 20 &= 0 \\ 2n^2 - 6n + 20 &= 0\end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

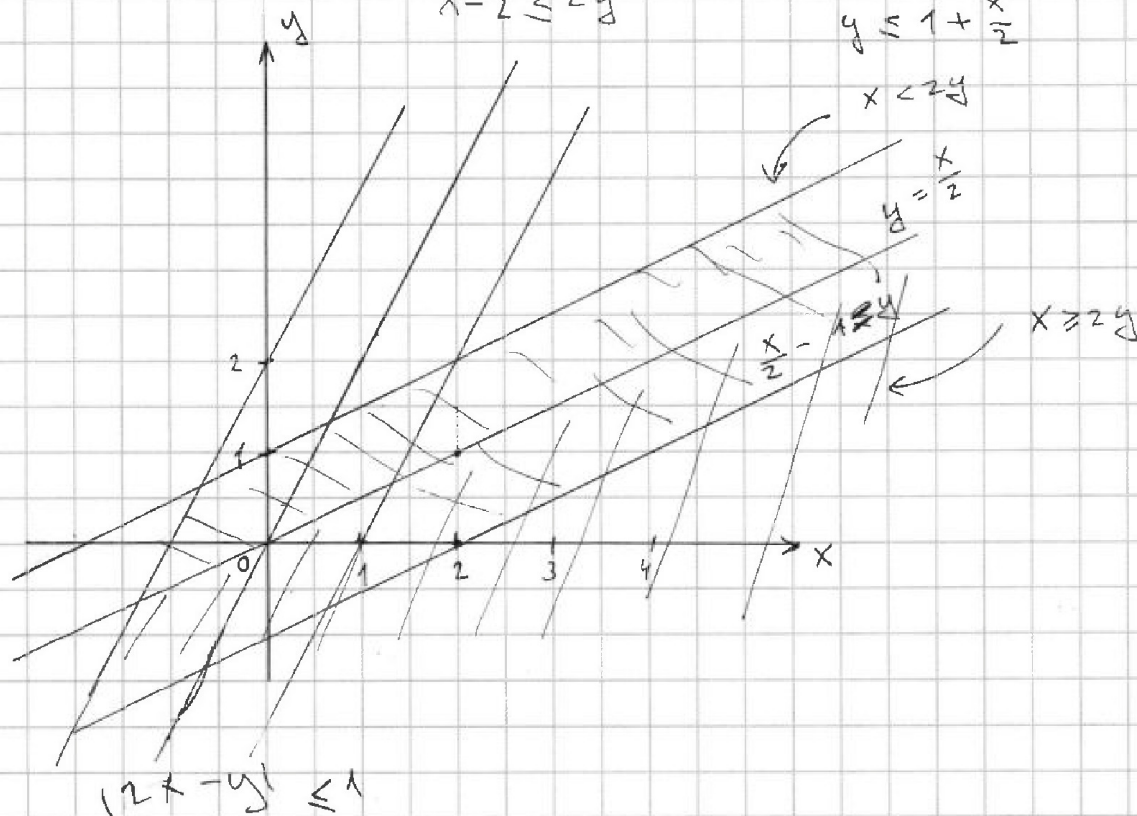
№ 2

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases} \rightarrow |x - 2y| \leq 2$$

$$3y + 6x = \\ = 3(y + 2x)$$

$$\begin{aligned} x &\geq 2y \\ x - 2y &\leq 2 \\ x &\leq 2 + 2y \\ x - 2 &\leq 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\leq 2y \\ 2y - x &\leq 2 \\ 2y &\leq 2 + x \\ y &\leq 1 + \frac{x}{2} \end{aligned}$$



$$2x \geq y$$

$$2x \leq y$$

$$2x - y \leq 1$$

$$y - 2x \geq 1$$

$$2x - 1 \leq y$$

$$y \leq 1 + 2x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

