



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1: $\{a_n\}$ - ариф. прогр., $\text{max} = 6$

$$a_4 = 6 - 3x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

$$a_6 = a_4 + 2d$$

$$a_{10} = a_6 + 4d$$

$$\Rightarrow 2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$\Rightarrow 9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6)$$

$$3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 18x - 12 = 9x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

корень $x=1$ подходит

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$$

$x=1$ тоже подходит

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \mid x-1$$

$$x^3 - x^2 \mid x^2 - 2x + 4$$

$$-2x^2 - 2x$$

$$-2x^2 + 2x$$

$$-4x + 4$$

$$-4x + 4$$

$$0$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$D = 4 + 16 = 20 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

~~Ответ: $x = 1, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}$~~

$$D = 4 + 16 = 20 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Ответ: $x = 1, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Найти наиб. знач. $6x + 3y$, при $\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$ раскроем кр-ва с модулем как систему

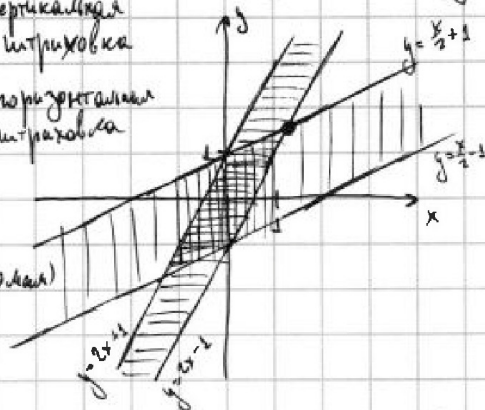
$$\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ x - 2y \geq -2 \\ 2x - y \leq 1 \\ 2x - y \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} - 1 \\ y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \geq 2x - 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{вертикальная} \\ \text{штриховка} \\ \text{горизонтальная} \\ \text{штриховка} \end{matrix}$$

изобразим это на графике

$$y = \frac{x}{2} - 1 \text{ (прямая)}; \quad y = \frac{x}{2} + 1 \text{ (прямая)}$$

x	0	2
y	-1	0

x	0	2
y	1	0



$$y = 2x - 1 \text{ (прямая)}$$

x	0	1
y	-1	1

$$y = 2x + 1 \text{ (прямая)}$$

x	0	-1
y	1	-1

Место пересечения штриховки является множеством решений системы

$6x + 3y$ будет наибольшим, когда x и y принимают наибольшие значения. Из графика видно, что ~~среди~~ среди решений системы существует точка с наибольшим возможным значением x и y . Это точка пересечения $y = 2x - 1$ и $y = \frac{x}{2} + 1$. Найдем ее:

$$2x - 1 = \frac{x}{2} + 1$$

$$4x - 2 = x + 2$$

$$3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + 1 = \frac{5}{3} \quad \text{Это точка } \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + 3y = 6 \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{5}{3} = 8 + 5 = 13$$

Ответ: 13.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (m, n) - натуральные числа

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n-7)(m+2n)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

Одно из них $11p^2$, а другое $75q^2$, где p и q - простые числа

1) Пусть $A = 11p^2 \Rightarrow \begin{cases} m+2n-7 : 11 \\ m+2n : 11 \end{cases}$ Одновременно они делятся на 11 не могут, т.к. разница их разности: 11 $\Rightarrow 7 : 11$, это неправда

1. $m+2n : 11$

$\Rightarrow$ рассмотрим, какая из скобок $: p$ и p^2

1. $m+2n : p^2 \Rightarrow m+2n = 11p^2 \Rightarrow m+2n-7 = 1$ (иначе $A \neq 11p^2$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow m+2n = 8 \Rightarrow m+2n \not\equiv 11 \Rightarrow \text{нельзя}$

2. $m+2n : p$
 $m+2n-7 : p \Rightarrow \begin{cases} m+2n-(m+2n-7) : p \\ \Rightarrow 7 : p \Rightarrow p = 7 \text{ (} p \text{ - простое число)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{н.к. } A = 11p^2, \text{ то } m+2n = 11p \Rightarrow m+2n = 77 \Rightarrow \\ m+2n-7 = p \Rightarrow m+2n = 14 \Rightarrow \text{нельзя} \\ p = 7 \end{cases}$

3. $m+2n-7 : p^2 \Rightarrow m+2n = 11$
 $(m+2n \not\equiv p) \Rightarrow m+2n-7 = p^2 = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow A = 44$

$\Rightarrow$ при $m+2n = 11$ число A будет кратно 11. попробуем все пары натуральных m и n : $m+2n = 11$ и проверим подходят ли B по условию.

$(1; 5) \Rightarrow B = 1 \cdot 5 \cdot (1+10+9) = 100 \Rightarrow \not\equiv 75$

$(3; 4) \Rightarrow B = 3 \cdot 4 \cdot (3+8+9) = 20 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow \not\equiv 75$

$(5; 3) \Rightarrow B = 5 \cdot 3 \cdot (5+6+9) = 5^2 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow B = 75 \cdot 4 \rightarrow \text{подходит}$

$(7; 2) \Rightarrow B = 7 \cdot 2 \cdot (7+4+9) = 2 \cdot 2 \cdot 20 \Rightarrow \not\equiv 75$

$(9; 1) \Rightarrow B = 9 \cdot 1 \cdot 20 \Rightarrow \not\equiv 75$

2. $m+2n-7 : 11$

1. $m+2n-7 : p^2 \Rightarrow m+2n = 1 \Rightarrow m+2n-7 = -6 \Rightarrow \text{нельзя}$

2. $m+2n-7 : p \Rightarrow p = 7 \Rightarrow m+2n-7 = 77 \Rightarrow m+2n = 84 \Rightarrow \text{нельзя}$

3. $m+2n : p^2 \Rightarrow m+2n-7 = 11 \Rightarrow m+2n = p^2 = 18 = 2 \cdot 9 \Rightarrow \text{нельзя}$

Решение задачи разобран



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

2) Пусть $b = 11p^2$
 $b = m \cdot n (m+2n+g)$

1. $m=1$: $n(2n+10) = 11p^2$

$2n(n+5) = 11p^2 \Rightarrow p^2 : 2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow p^2=4$

$\Rightarrow n(n+5) = 22$; $n^2+5n-22=0$; $D=25+88=113$

Очевидно, что натуральных корней нет

2. $n=1$: $m(m+11) = 11p^2$

Пусть $m \not\equiv 11 \Rightarrow m+11 \not\equiv 11 \Rightarrow b \not\equiv 11 \Rightarrow b$

Пусть $m \equiv 11 \Rightarrow m+11 \equiv 11 \Rightarrow b \equiv 11^2 \Rightarrow b = 11^3$ ($p=11$)

$m(m+11) = 11^3$ решим в натуральных числах

1	11^3
11	11^2
11^2	11
11^3	1

Очевидно, что ни одна из этих пар не является решением

3. $m+2n+g=1$ — это невозможно, т.к. $m, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ все множители $> 1 \Rightarrow \forall$ из них это 11 , p или p
 т.к. $n, m \in \mathbb{N}$, то $m+2n+g > m, n \Rightarrow m+2n+g=11$
 $m+2n=2$

то при $m=1, n=1$: $m+2n=3$, то $g=2 \Rightarrow$ нет решений

Аналогично разобран.

Ответ: (5; 3)

1 2 3 4 5 6 7

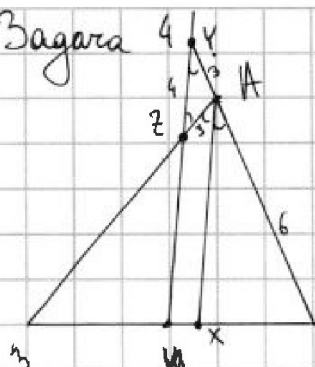
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Zagara 4/4
1 2 3 4



Dato: 1. $MC: AX - Suc-a$; 1. $M-ap. MC$; 2. $M \cup AX$;
1. $z \in M$; 1. $y \in MC$; $AC=6$, $Az=3$, $yz=4$

Haar-TM: $\mathbb{H}_3C$

Решение: 1) $AX \perp BC \Rightarrow \angle BAX = \angle XAC$
 2) $AX \parallel YM \Rightarrow \angle MYC = \angle XAC$ (голова, YA -вершина) (об-голова)
 $\angle MYC = \angle XAC$ (накрест. ветв.; YA -вершина)

$$\Rightarrow \angle AYZ = \angle YZA \Rightarrow \text{side } YZ - \text{p18 (no hypoten.)} \Rightarrow AY = AZ = 3 \quad (\text{given hyp.})$$

2) ΔX и Δy (усл.) $\Rightarrow$ по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{AC}{YA} = \frac{XC}{XU} = \frac{2}{1} \Rightarrow \begin{array}{l} XC = 2 \text{ cm} \\ XC + XU = CU = \frac{1}{2} BC \\ \Rightarrow 2 \text{ cm} + CU = \frac{1}{2} BC \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{②} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \text{ cm} + CU = \frac{1}{2} BC \\ CU = \frac{1}{2} BC \end{array}$$

$$\textcircled{1} \frac{h^2}{1^2} = \frac{h_1^2}{x_1^2} \Rightarrow \frac{h^2}{3} = \frac{3 \times 4}{x_1^2} \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 12$$

3) A_{ges} $x_{\text{H}} = y \Rightarrow$ (43 n. 2) $x_{\text{C}} = 2y$; $h_{\text{X}} = 4y$; $h_{\text{C}} = 6y$

Уравнение Шварцшильда: $\Delta x^2 = A_{13} \cdot A_{31} - x_1 x_3 = 72 - 8y^2$

4) $AX \sim Y_{\text{м.}}$ $\Rightarrow \Delta M \sim \Delta X \sim \Delta Y$ (по длине стороны) $\Rightarrow \frac{AX}{BY} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$
 $\Rightarrow \frac{AX}{(2M+4)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
 $\Rightarrow \frac{2M+4}{3} = 2 \Rightarrow 2M+4 = 2 \cdot 3$
 $\Rightarrow 2M+4 = 6$

$$\Rightarrow \frac{2u+4}{2u} = 2 \Rightarrow 2u+4 = 2 \cdot 2u$$
$$2u+4 = 2 \cdot 2u$$
$$2u = 4 \Rightarrow u = \frac{16}{3}$$

$$5) \begin{cases} x^2 = 72 - 8y^2 & (h.3) \\ x = \frac{16}{3} & (h.4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 72 - 8y^2 = \frac{256}{9} \\ 8(9 - y^2) = \frac{256}{9} \Rightarrow 9 - y^2 = \frac{32}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y^2 = 81 - 32 \\ y^2 = 49 \Rightarrow y = \pm 7 \end{cases}$$

Other: 14



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} & (1) \\ x^3+3x-\sqrt{2}y = y^3-\sqrt{2}x+3y & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим ограничения: в системе есть $\sqrt{2}x, \sqrt{2}y, \sqrt{7-x} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases}$$

(2) $x^3+3x+\sqrt{2}x = y^3+3y+\sqrt{2}y$ $x, y \geq 0$ из ограничений
 Очевидно, что $f(x) = x^3+3x+\sqrt{2}x$ строго возрастает на $x \in [0; +\infty)$

$\begin{cases} f(x) = f(y) \\ x \in [0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = y$ (т.к. $\forall$ знач. аргумента соотв. ровно одно знач. ф-ции)

(1) $\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} \quad (0 \leq x \leq 7)$

1) Пусть $\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t \Rightarrow t^2 = x+2+7-x-2\sqrt{14+5x-x^2}$
 $2\sqrt{14+5x-x^2} = 9-t^2$

2) $t+7=9-t^2, t^2+t-2=0$
 $\begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$
 Обратная замена
 $\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 1 \\ 0 \leq x \leq 7 \end{cases}$

3) Обратная замена: 1. $2\sqrt{14+5x-x^2} = 9-1=8 \quad (x \leq 7)$
 $14+5x-x^2 = 16$
 $x^2-5x+2=0; D=25-8=17$
 $\begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} & (x > 0; \sqrt{17} < \sqrt{15} = 5 \Rightarrow x < \frac{5+5}{2} = 5 < 7) \\ x = \frac{5-\sqrt{17}}{2} & (5 > \sqrt{17} \Rightarrow x > 0; 5 < 7 \Rightarrow x < 7) \end{cases}$
 $\Rightarrow$ решения $(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}); (\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2})$

2. $2\sqrt{14+5x-x^2} = 5 \quad (x \leq 7)$
 $4(14+5x-x^2) = 25$
 $4x^2-20x-31=0; D=400+484=884=16 \cdot 55 \Rightarrow x = \frac{20 \pm 4\sqrt{55}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{55}}{2}$
 $x = \frac{5+\sqrt{55}}{2}; \sqrt{55} < \sqrt{4} = 8 \Rightarrow x < \frac{5+8}{2} = 6.5 < 7 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{5+\sqrt{55}}{2}$
 $y = \frac{5-\sqrt{55}}{2}; 5 \neq \sqrt{25} < \sqrt{55} \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ не подходит
 $\Rightarrow$ Решения: $(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}); (\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}); (\frac{5+\sqrt{55}}{2}; \frac{5+\sqrt{55}}{2}); (\frac{5-\sqrt{55}}{2}; \frac{5-\sqrt{55}}{2})$

Ответ: $(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}); (\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}); (\frac{5+\sqrt{55}}{2}; \frac{5+\sqrt{55}}{2}); (\frac{5-\sqrt{55}}{2}; \frac{5-\sqrt{55}}{2})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

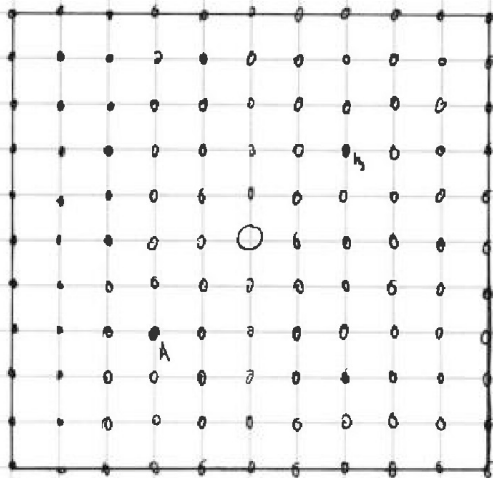
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6



Всего узлов $(10+1)(10+1) = 121$ штука
 $\Rightarrow$ всего способов выбрать 2 узла из них

$C_{121}^2 = \frac{121 \cdot 120}{2}$ - это количество раскрасок, которые могут отличаться друг от друга на поворот, но не совпадают изначално

Если 2 узла сетки лежат на ^{одинаковом} расстоянии до центрального узла (обозначен большими кружками) и ~~они соединены~~ на одной прямой с ним (все три точки на одной прямой) - например как точки a и b на рисунке - то при повороте на 180° ~~они перейдут в b и a~~ ~~и все остальные раскраски~~ ~~они a и b не перейдут~~ ~~а b - в a~~ . Если a и b не подходят под описание выше условия, то ~~нет~~ нет такого поворота, при котором ~~они~~ узлы переходят друг в друга (кроме этого случая поворот на 180° и симметрии отк. центра вращения, т.е. центрального узла).

$\Rightarrow$ Почки, симметричные отк. центра вращения при повороте C_{121}^2 дают по 2 раскраски в обш. число 100. 2 с ними совпадают, всего раскрасок, которые дают 2 точки - 4, т.е. 4 поворота: на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$. Остальные пары точек дают по 4 раскр. - общее число. Ответ будет суммарное кол-во пар.

Посчитаем количество пар, которые дают по 2 раскраски. Это несложно сделать по рисунку (разными парами считаются пары, у которых хотя бы один узел разный) $\Rightarrow$ их 36 но если любую из них повернуть на 90° , то получится пара, которая тоже входит в эти 36 $\Rightarrow$ в соотв. с усл. задачи эти 36 пар дадут 18 различных раскрасок.

$\Rightarrow C_{121}^2 - 36 = 7224$ пар, которые дают по 4 раскраски $\Rightarrow$ различных из них $\frac{7224}{4} = 1806 \Rightarrow$ всего раскр. $1806 + 18 = 1824$ Ответ: 1824 разн. раскрасок



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение

①

$$a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9x + 6}{2} = a_5 = 6 - 9x + d$$

$$2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$a_4 > a_6 > a_{10}$$

$$6 - 9x > 9x^2$$

$$\begin{cases} 6 - 9x > x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\ 6x^4 - 4x^3 + 4x^2 > 9x^2 \end{cases}$$

$$9x^2 + 9x - 6 < 0$$

$$3x^2 + 3x - 2 < 0$$

$$x \in$$

$$-3 \Rightarrow d = 2$$

$$1$$

$$9$$

$$x^2(x-5)(x+1) > 0$$

$$\sqrt{33} < 6$$

$$D = 9 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 33$$

$$x \neq 0; x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}$$

$$(-\infty; -1) \cup [5; +\infty)$$

$$x \in [-1; \frac{1}{2}]$$

$$d < 0; \text{ но } a_{10} > 0$$

$$\Rightarrow 6 - 9x + 6d = 9x^2$$

$$x = -1: a_4 = 15$$

$$a_6 = 9$$

$$a_{10} = 9$$

$$6 - 9x > 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6) = 9x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 18x - 12 = 9x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x = 1: 1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \mid x^2 - 2x + 1$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2$$

$$x^2 - 2x - 4$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$\frac{56}{4} = 14$$

$$-2x^3 + 16x$$

$$-2x^3 + 4x^2 - 2x$$

$$-4x^2 - 8x - 4$$

$$\begin{array}{r} 896 \overline{) 57} \\ 57 \overline{) 57} \\ \hline 326 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 896 \overline{) 16} \\ 80 \overline{) 16} \\ \hline 86 \end{array}$$

$$96 = 8 \cdot 7 =$$

$$16 \cdot 4 = 64 = 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3+3x-\sqrt{2x} = y^3-\sqrt{2y}+3y \\ x^3+3x+\sqrt{2x} = y^3+3y+\sqrt{2y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases}$$

это же строго возр. ф-ция
($x \geq 0; y \geq 0$)

$$\Rightarrow x=y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} \quad (x+2)(7-x) = 14+5x-x^2$$

$$\frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2}{2\sqrt{14+5x-x^2}} = \frac{x+2+7-x-2\sqrt{14+5x-x^2}}{2\sqrt{14+5x-x^2}} = \frac{-(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 + 9}{2\sqrt{14+5x-x^2}}$$

$$9-t^2 = t+7 \Rightarrow t^2+t-2=0$$

$$\begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$$

$$\sqrt{7-x}$$

кр. нмнм.

$$\begin{aligned} 2) \sqrt{x+2} &= 1 + \sqrt{7-x} \\ x+2 &= 1 + 2-x + 2\sqrt{7-x} \\ x\sqrt{2+7-x} + 2\sqrt{14+5x-x^2} &= 1 \\ 2\sqrt{14+5x-x^2} &= 3 \\ 14+5x-x^2 &= 16 \\ x^2-5x+2 &= 0 \\ D &= 25-8=17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7224 \cdot 1806 \\ 4 &= 1806 \\ 1806 &+ 18 \\ 1824 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 6-4x \\ a_2 &= (x^2-2x)^2 \\ a_3 &= 4x^2 \\ x &? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2+3x-6 &: 6 \\ 3x^2+3x-2 &: 2 \\ 3x(x+1) &: 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2-4x^3-5x^2 &: 4 \\ x^4-4x^3-5x^2 &: 4 \\ x^2(x+1)(x-5) &: 4 \\ D &= 1+4-5=0 \end{aligned}$$

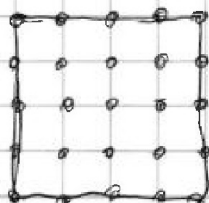
$$x^2-4x-5$$

$$\begin{aligned} 3x^2+3x-6 &= 6d \\ 3x^2+3x-2 &= 2d \\ x^2(x+1)(x-5) &: 4 \end{aligned}$$

$$x^4-4x^3+4x^2+3x-2 = 2d \quad 1) x:2; 2) x:2; 3) x:4$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3424}}{6}$$

$$\begin{aligned} 25 \\ \times 12 \\ 50 \\ + 250 \\ 300 \end{aligned}$$



$(a+1)^2$ 1) квадрат центрального: 4 см.

2) если точки находятся друг и друга (обе) или какой-то стороне, то точек 2 со стороны раскр. → таких пар 12

3) если нет, то 4

$$C^2 = \frac{25-24}{2} \text{ см. выбрать 2 точки (с полн. раскр.)}$$

$$\begin{aligned} 300-24 &= 276 \\ \frac{276}{4} &= 69 \end{aligned}$$

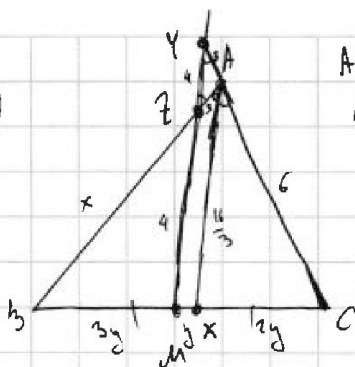


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(4)



$$AC = 6$$

$$AZ = 3$$

$$YZ = 4$$

$$\frac{b_m}{m_x} = \frac{x}{3} \Rightarrow$$

$$b_m = y; m_x = 3y \Rightarrow b_x = (x+3) \cdot y$$

$$\frac{b_x}{x_c} = \frac{b_a}{a_c} = \frac{x+3}{6}$$

$$\frac{256}{y} = 8(9-y)^2$$

$$32 = 81 - 16y^2; y^2 = 4y; y = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow b_c = 6y = 7 \cdot 2 = 14$$

$$6b_x = (x+3) \cdot x_c; 6y(x+3) = (x+3) \cdot x_c$$

$$\Rightarrow x_c = 6y$$

$$AX^2 = 12 \cdot 6 - 8y^2 = 8(9-y^2)$$

$$\frac{AX}{2u-4} = \frac{2}{3}; \frac{AX}{2u} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3AX = 2u-4$$

$$3AX = 2u-4 \Rightarrow 2u = 4$$

$$3uX = 12u \cdot 6(x+3) \Rightarrow uX = \frac{16}{3}$$

$$b_c = (x+9) \cdot y$$

$$AX^2 = AB \cdot b_c - b_x \cdot x_c = 6x + 18 - y^2(6x + 18) = 6(x+3)(1-y^2)$$

$$\frac{b_m}{m_x} = y$$

$$\frac{AX}{u_m} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3AX}{2} = 4 + 2u \quad \frac{AX}{2u} = \frac{x+3}{x}$$

$$AX = \frac{2u+8}{3}$$

$$p = \frac{6+6}{2} = 6$$

$$S_{Azy} = \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} = 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

$$AX \cdot u_m : \frac{1}{2}(AX + 2u + 4) \cdot h = \frac{1}{2}(AX + 2u) \cdot h + S_{Azy}$$

$$(AX + 2u + 4)h = (AX + 2u) \cdot h + 4\sqrt{5}$$

$$\frac{x_c}{x(x+u)} = \frac{2}{3}; \frac{y-2}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{b_m}{b_m + m_x} = \frac{3}{4}; \frac{y}{y+2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{y-2}{y+2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2(2u+4)}{32u} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow 2x(2u+4) = 32u \cdot x + 92u$$

$$x \cdot 2u + 8x - 32u = 0 \quad 2u \cdot x + 92u = 8x$$

$$2u = \frac{8x}{x+9}$$

$$AX = \frac{\frac{16x}{x+9} + 8}{3} = \frac{24x + 72}{3(x+9)} = \frac{8x + 24}{x+9} = \frac{8(x+3)}{x+9}$$

$$6(x+3)(1-y^2) = \frac{64(x+3)^2}{(x+9)^2}$$

$$6(x+9)^2(1-y^2) = 64(x+3)$$

$$3(x+9)^2(1-y^2) = 32(x+3)$$

$$\frac{m_x}{3} = \frac{x_c}{6}$$

$$\frac{x_c}{6} = \frac{b_m}{x}$$

$$\frac{m_x}{x_c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2m_x = m_c; m_x = \frac{1}{3} b_m$$

$$\frac{m_x}{3} = \frac{b_m}{x}$$

$$\frac{m_x}{x_c} = \frac{m_x}{b_m} = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 9$$

$$\frac{57}{3} = 19$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① *Числовая*

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

$$a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

$$a_6 = a_4 + 2d$$

$$a_{10} = a_6 + 4d$$

$$a_{10} = a_4 + 6d$$

$$9x^2 = 6 - 9x + 6d$$

$$3x^2 + 3x - 2 - 2d = 0$$

$$D = 9 + 3 \cdot 4 \cdot 2(1+d) = 9 + 24 + 24d = 33 + 24d$$

$$9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4d$$

$$x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 4d = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$\frac{9x^2}{2} = 3^2$$

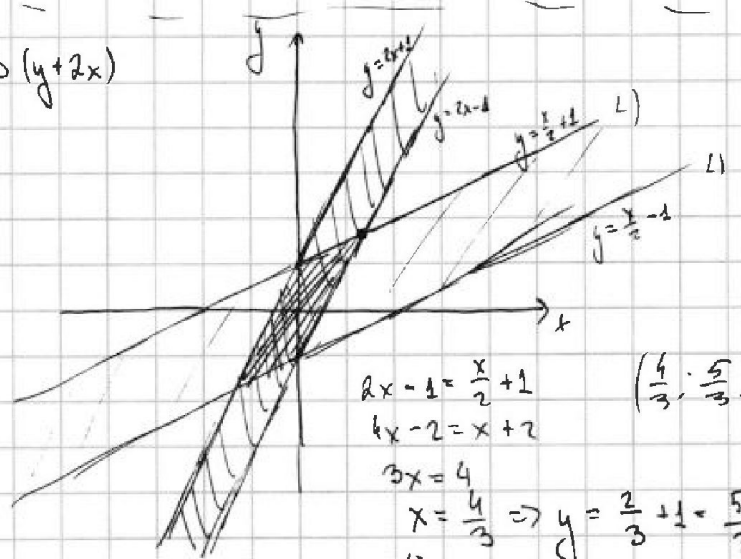
② $\max (3y + 6x) = 3(y + 2x)$

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$-2 \leq x - 2y \leq 2$$

$$\begin{cases} -2 \leq x - 2y \\ 2 \geq x - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \geq \frac{x}{2} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq 2x - y \\ 1 \geq 2x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 2x + 1 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 2x - 1 &= \frac{x}{2} + 1 \\ 4x - 2 &= x + 2 \\ 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$3\left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right) = 13$$

③ $(m, n) \in \mathbb{N}$ $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$

$$B = m^2n + 2m^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

Одн. (1p), другое 75q² (p, q - простые) $75 = 5 \cdot 15 = 25 \cdot 3$

1) $A = 11p^2 \Rightarrow \begin{cases} m+2n:11 \\ m+2n-7:11 \end{cases}$ (оба факт не могут) 1) $m+2n:11 \Rightarrow x = 11, 22, 33, 44, \dots$

$m+2n:11$ (каждо проверяет B, аналогично)

или $m+2n:p^2 \Rightarrow m+2n-7:11 \Rightarrow y$
 $m+2n:p \Rightarrow p=2$
 $m+2n=7 \Rightarrow m+2n-7=0 \Rightarrow y$
 $m+2n-7=p^2 \Rightarrow m+2n-7=4 \Rightarrow p=2$
 $m+2n=11$