



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12-12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a_i - член арифметической прогрессии; d - разность.

$$a_2 = 12 - 12x$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = 12 - 12x + 2d = a_2 + 2d$$

$$a_8 = -6x^2 = a_4 + 4d = (x^2 + 4x)^2 + 4d$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (x^2 + 4x)^2 = 12 - 12x + 2d \\ -6x^2 = (x^2 + 4x)^2 + 4d \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + 8x^3 + 16x^2 = 12 - 12x + 2d \\ (x^2 + 4x)^2 = 12 - 12x + 2d \quad (1) \\ (x^2 + 4x)^2 = -6x^2 - 4d \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } 12 - 12x + 2d = -6x^2 - 4d \quad | :2$$

$$6 - 6x + d = -3x^2 - 2d$$

$$3d = -3x^2 + 6x - 6 \quad | :3$$

$$d = -x^2 + 2x - 2. \text{ Подставим}$$

в (1):

$$(x^2 + 4x)^2 = 12 - 12x + 2(-x^2 + 2x - 2)$$

$$(x^2 + 4x)^2 = 12 - 12x - 2x^2 + 4x - 4$$

$$(x^2 + 4x)^2 = -2x^2 - 8x + 8$$

$$(x^2 + 4x)^2 = -2(x^2 + 4x - 4)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $t = x^2 + 4x$. Получаем:

$$t^2 = -2(t - 4)$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 8 = 9$$

$$t_1 = \frac{-1 - 3}{1} = -4$$

$$t_2 = \frac{-1 + 3}{1} = 2$$

$$x^2 + 4x = -4 \quad \text{или} \quad x^2 + 4x = 2$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x = -2$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 2 = 6$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

Ответ: $-2 \pm \sqrt{6}$; -2 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 & (1) \\ |3x-2y| \leq 4 & (2) \end{cases}$$

(1) $|2x-3y| \leq 6$

Раскроем модуль:

1°. $2x-3y \geq 0$ (1.1)

$$3y \leq 2x$$

$$y \leq \frac{2}{3}x. \text{ Построим график } y = \frac{2}{3}x.$$

(0; -1): $-1 \leq 0$ - верно. решение $y \leq \frac{2}{3}x$ - обл.

над пр. $y = \frac{2}{3}x$.

$$2x-3y \leq 6$$

$$y \geq \frac{2}{3}x - 2 \quad (1.2)$$

(1.1) - образуют
(1.2) систему.

0; 0: $0 \geq -2$ - верно.

Построим $y = \frac{2}{3}x - 2$. Решение этого

н-ва - обл. над пр. $y = \frac{2}{3}x - 2$. Зашири-
м обл., явл. реш. системы (1.1)(1.2).

2°. $2x-3y \leq 0$ (1.3)

$$y \geq \frac{2}{3}x$$

решение - обл. над

прямой $y = \frac{2}{3}x$.

(1.4) $3y-2x \leq 6$ решение - обл. под

прямой $y = \frac{2}{3}x - 2$. Система (1.3)(1.4) реше-
ний не имеет, т.к. обл. не пересекаются.

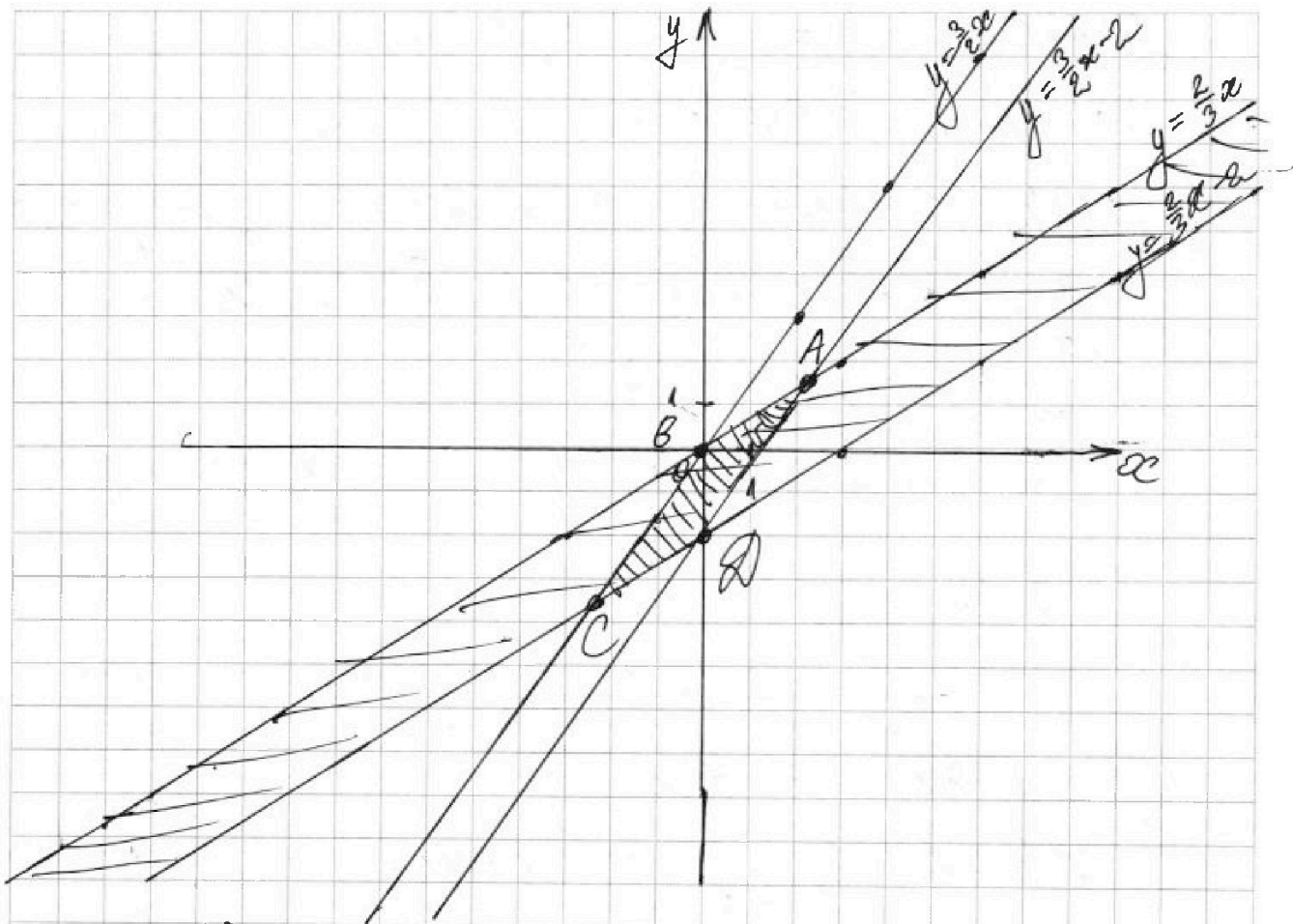


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



(2) $|3x - 2y| \leq 4$.

Раскроем модуль:

1°. $3x - 2y \geq 0$

$2y \leq 3x$

(2.1) $y \leq \frac{3}{2}x$. Построим $y = \frac{3}{2}x$.

Решение (2.1) - обл. под прямой $y = \frac{3}{2}x$

(2.2) $3x - 2y \leq 4$

$2y \geq 3x - 4$

$y \geq \frac{3}{2}x - 2$. Построим.

$\begin{cases} (2.1) \\ (2.2) \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение 4-ва - обл. над прямой $y = \frac{3}{2}x - 2$

Решение системы (2.1)(2.2) - обл.

между этими прямыми. ~~Закрасим~~
~~эту область~~. Закрасим эту область.

2°. $3x - 2y \leq 0$

(2.3) $y \geq \frac{3}{2}x$ решение - над прямой

$y = \frac{3}{2}x$

(2.4) $2y - 3x \leq 4$ решения - под
прямой $y = \frac{3}{2}x - 2$.

Решений у системы (2.3)(2.4)

нет, т.к. области не пересекаются.

Получаем, что решение системы
параллельна ABCD и все т. внутри него.

$S = 10x + 5y$. Минимальное значение S
принимает при минимальных x

и y . В т. пересечения пр. $y = \frac{3}{2}x$ и
 $y = \frac{3}{2}x - 2$ x и y минимальны (м.с)

$\frac{1}{3}x - 2 = \frac{3}{2}x \quad | \times 6$

$4x - 12 = 9x \Rightarrow x = -\frac{12}{5}$

$y = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) = -\frac{36}{10} = -3,6$

$S_{\min} = 10 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) + 5 \cdot (-3,6) =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдём координаты $m.c$:

$$\frac{2}{3}x_c - 2 = \frac{3}{2}x_c \quad | \times 6 \quad C(x_c, y_c)$$

$$4x_c - 12 = 9x_c$$

$$x_c = -\frac{12}{5}$$

$$y_c = \frac{3}{2}x_c = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) = -\frac{36}{10} = -\frac{18}{5}$$

$$S = 10x + 5y$$

$$S_{\min} = 10 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) + 5 \cdot \left(-\frac{18}{5}\right) = -24 - 18 = -42$$

Ответ: -42 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) $t = 9$
 $9(9+13) = 159^2$
 $9+13 = 159$
 $13 = 149$
невозможно.

5) $t = 39$
 $39(39+13) = 159^2$
 $39+13 = 59$
 $13 = 29 \Rightarrow 9 \notin \mathbb{N}$
противоречие.

6) $t = 59$
 $59(59+13) = 159^2$
 $59+13 = 39 \Rightarrow 29 = -13$
невозможно

7) $t = 9^2$
 $9^2(9^2+13) = 159^2$
 $9^2+13 = 15$
 $9^2 = 2$ - невозможно, $9 \in \mathbb{N}$

8) $t = 39^2$
 $159(159+13) = 159^2$
 $159+13 = 9$
 $149 = -13$
невозможно

9) $t = 39^2$
 $39^2(39^2+13) = 159^2$
 $39^2+13 = 5$
 $39^2 = -8$
невозможно

10) $t = 59^2$
 $59^2(59^2+13) = 159^2$
 $59^2+13 = 13$
 $59^2 = -10$
невозможно.

11) $t = 159^2$
 $159^2(159^2+13) = 159^2$
 $159^2+13 = 1$
 $159^2 = -12$
невозможно.

12) $t = 1$
 $14 = 159^2$
невозможно.

Ответ: (10; 3)

5! · 3! · 9! (всего 2 · 2 · 3 = 12 раз)
Здесь при $t \leq 0$ все аналогично, $9 \notin \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$B = 2mn = 15q^2 \Rightarrow q^2 = 2, \text{ м.к. } 15 \neq 2; q - \text{простое.}$$

$$2mn = 60$$

$$\begin{cases} mn = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n = m-2n = 4 \Rightarrow m = 2n+4 \end{cases}$$

$$n(2n+4) = 30$$

$$2n^2 + 4n = 30 \quad | :2$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$D_1 = 1 + 30 = 31$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{2} \notin \mathbb{N} - \text{противоречие.}$$

$$mn = 30 \Rightarrow m = 10$$

~~Итого:~~

$$(3; 10; 3)$$

$$\omega. A = 15q^2, B = 17p^2$$

$$t(t+13) = 15q^2. \quad \tau(15q^2) = \tau(5 \cdot 3 \cdot q^2) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 - \text{кол-во делителей числа.}$$

~~t=3 или t=5 или t~~

$$1) t=3$$

$$3 \cdot 16 = 15q^2$$

$$16 = 5q^2$$

невозможно,
 $q \notin \mathbb{N}$.

$$2) t=5$$

$$5 \cdot 18 = 15q^2$$

$$18 = 3q^2$$

$6 = q^2$ - невозм.
 $q \notin \mathbb{N}$.

$$3) t=15$$

$$15 \cdot 28 = 15q^2$$

$$q^2 = 28$$

невозможно,
 $q \notin \mathbb{Z}$

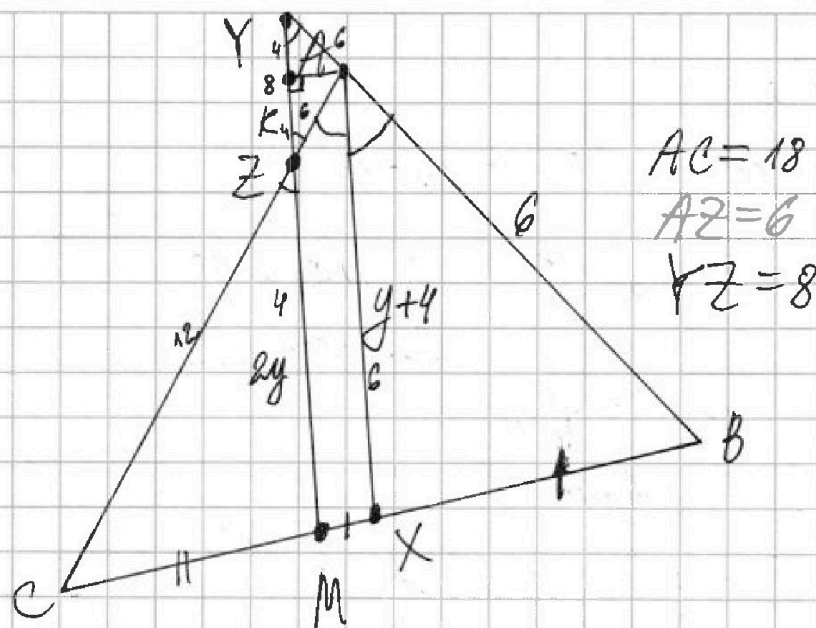


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение.

1. $MY \parallel AX \Rightarrow \angle CZM = \angle CAX$ - соответственные при $MY \parallel AX$ и секущую AZ .
2. $\angle AZY = \angle CZM$ - вертикальные.
3. $\angle Y = \angle BAX$ - соотв. при $AX \parallel MZ$ и секущую AY .

4. $\angle BX \angle BAX = \angle CAX$ т.к. AX - бис-са. (1)

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAX = \angle CZM \text{ (п. 1)} \\ \angle CZM = \angle AZY \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AZY = \angle CAX \text{ (2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle Y = \angle BAX \text{ (3)} \\ \angle AZY = \angle BAX \end{array} \right\} \Rightarrow \angle Y = \angle AZY \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle AYZ$ равнобедренный $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow AX = AZ = 6.$$

$$5. CZ = AC - AZ = 18 - 6 = 12$$

$$6. \text{П.р. } AX \parallel MZ, \text{ то по } \Delta \text{ Паллеса } \frac{AZ}{XM} = \frac{ZC}{MC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AZ}{CZ} = \frac{XM}{MC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow XM = \frac{1}{2} MC$$

$$7. \text{П.р. } M - \text{середина } BC, \text{ то } CM = BM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XM = \frac{1}{2} BM \Rightarrow X - \text{середина } BM. \quad BM = \frac{1}{2} BC \Rightarrow$$

$$= BM = XM = \frac{1}{2} BM = \frac{1}{4} BC \Rightarrow \frac{BX}{CX} = \frac{1}{3}$$

$$8. \text{По } \Delta \text{ Бис-сы } \frac{CX}{AC} = \frac{BX}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BX}{CX} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6$$

9. По Δ Паллеса, т.к. $AX \parallel MY$, то:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{BY}{XM}$$

$$9. AX - \text{средняя линия } \Delta BMY \text{ (} BX = MY, AX \parallel MY) \Rightarrow AX = \frac{1}{2} MY.$$

$$\text{Пусть } MZ = 2y. \text{ Тогда } MY = 2y + 8 \Rightarrow AX = y + 4$$

$$10. \Delta CMZ \sim \Delta CXA \text{ по 2-м углам } (\angle C - \text{общ.}, \angle CZM = \angle CAX) \Rightarrow \frac{CZ}{AC} = \frac{MZ}{AX}.$$

$$\frac{12}{18} = \frac{2y}{y+4} \Rightarrow 12y + 48 = 36y \quad | : 12$$

$$y + 4 = 3y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2y = 4 \Rightarrow y = 2.$$

$$AX = 2 + 4 = 6; MY = 2AX = 12; MZ = 8y = 4.$$

11. Проведем АК - высоту $\triangle AZY$. АК - медиана $\triangle AZY$, т.к. $\triangle AZY$ - равнобедренный. Тогда $YK = KZ = \frac{8}{2} = 4$.

$$\cos \angle Y = \cos \angle BAX = \frac{KY}{AY} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

12. По Δ косинусов для $\triangle BAX$:

$$BX^2 = AB^2 + AX^2 - 2AB \cdot AX \cdot \cos \angle BAX$$

$$BX^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 72 - 72 \cdot \frac{2}{3} = 72 - 2 \cdot 24 = 72 - 48 = 24$$

$$BX = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$BC = 4BX = 8\sqrt{6}$$

Ответ: $8\sqrt{6}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 + 4y^2 - \sqrt[4]{3x}$$

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt[4]{3y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \quad (1) \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\text{ОДЗ: } \left\{ \begin{array}{l} x+4 \geq 0 \\ 3-y \geq 0 \\ 12-x-y^2 \geq 0 \\ 3y \geq 0 \\ 4y \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad 2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt[4]{3y}$$

$$f(x) = 2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x}$$

$$D(f) = [0; +\infty)$$

Заметим, что $f(x)$ монотонно возрастает на $D(f)$. Действительно, если $x_1 \geq 0$, то $2x_1^5 > 2x_2^5$, $4x_1^2 > 4x_2^2$, $\sqrt[4]{3x_1} > \sqrt[4]{3x_2}$ при $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ при $x_1 > x_2$ (если проинтегрировать).

Тогда возможен лишь 1 случай: $x=y$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим в (1):

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

Заметим, что $(x+4)(3-x) = 12-x-x^2$.

$$t = \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x}$$

$$t^2 = x+4 + 3-x - 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$t^2 = 7 - 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$2\sqrt{12-x-x^2} = \frac{-t^2+7}{2}$$

$$t+5 = \frac{-t^2+7}{2}$$

$$2t+10 = -t^2+7$$

$$t^2+2t+3=0$$

$$t^2+t-2=0$$

$$t_1=1 \quad \text{или} \quad t_2=2$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 1$$

$$\sqrt{x+4} = \sqrt{3-x} + 1$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x+4 = 3-x+1+2\sqrt{3-x} \\ x+4 = (\sqrt{3-x}+1)^2 \end{cases}$$



$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2$$

$$\sqrt{x+4} = \sqrt{3-x} + 2$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x+4 = 3-x+4+4\sqrt{3-x} \\ (x+4) = (\sqrt{3-x}+2)^2 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+4 = -x+4+2\sqrt{3-x} \end{cases} \\ & \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x = 2\sqrt{3-x} \end{cases} \\ & \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ x^2 = 3-x \end{cases} \\ & \begin{cases} x \leq 3 \quad (1) \\ x \geq 0 \quad (2) \\ x^2+x-3=0 \end{cases} \\ & D = 1+12=13 \\ & x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < 0 - \text{не уга. (2)} \\ & \boxed{x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}} \sqrt{3} - \text{уг. (1) и (2).} \\ & \sqrt{13} \vee \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+4 = -x+3+4\sqrt{3-x} \end{cases} \\ & \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x-3 = 4\sqrt{3-x} \end{cases} \\ & \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ 4x^2 = 9+16(3-x)+24\sqrt{3-x} \\ 4x^2 = 9+48-9x+24\sqrt{3-x} \\ 2x-3 = 4\sqrt{3-x} \end{cases} \\ & \begin{matrix} g(x) & k(x) \end{matrix} \\ & g(x) \text{ возрастает на } D(g) - \text{прямая;} \\ & k(x) \text{ убывает на } D(k). \\ & \text{По Д/О корне: ур-е имеет 1 корень или не имеет корней.} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение системы (1):

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2x-3 = 4\sqrt{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x-3 \geq 0 \\ (2x-3)^2 = 16(3-x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \quad (3) \\ 4x^2 - 12x + 9 = 48 - 16x \quad (4) \end{cases}$$

$$4x^2 + 4x - \overset{39}{27} = 0$$

$$D_1 = 4 + 39 \cdot 4 = 4 \cdot 40 = (4\sqrt{10})^2$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4\sqrt{10}}{4} < \frac{3}{2} \quad \text{не угод. (3)}$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4\sqrt{10}}{4} \geq \frac{3}{2} \quad | \times 4 \quad \text{угод. (3)}$$

$$\begin{array}{l} -2 + 4\sqrt{10} \geq \sqrt{6} \\ 4\sqrt{10} \geq 8 \\ \sqrt{10} \geq 2 \end{array} \quad \frac{-2 + 4\sqrt{10}}{4} = \frac{-1 + 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-2 + 4\sqrt{10}}{4}, \frac{-1 + 2\sqrt{10}}{2} \right);$$
$$\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right).$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n =$$

$$= (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) =$$

$$= (m - 2n)(m - 2n + 13) = 17p^2$$

$$\begin{cases} m - 2n = 17 \\ m = 5 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn =$$

$$= mn(m - 2n - 2) = 15q^2 \quad 5 \cdot 3 \cdot q^2$$

$$\begin{cases} m - 2n = 17 \\ m - 2n + 13 = p^2 \\ m - 2n = p \\ m - 2n + 13 = 17p \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-xy} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2 \end{cases}$$

$$t = \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y}$$

$$t^2 = x+4 - 3-y$$

$$x, y \geq 0$$

$$(x+4)(3-y) = 12$$

$$2x^5 - 2y^5 - \sqrt{3y} + \sqrt{3x} + 4x^2 - 4y^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

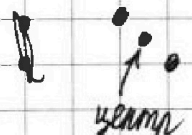
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего у нас $8 \cdot 8 = 64$ узла (по 8 на каждой линии, 8 линий).

Затем нужно выбрать 2 узла. Возможны 2 случая:

1) выбраны 2 симметричных относительно центра квадрата узла. При повороте на 180° они придут сами в себя, и каждая пара центр. симметр. узлов повторится 2 раза:  - сама пара и поворот на 90° .

64 точки, для каждой ровно одна центр. симметр. точка $\Rightarrow \frac{64}{2} = 32$ способа выбрать такую пару (64 точки, каждая точка имеет дванесет). Способов записать: $\frac{32}{2} = 16$ (каждая пара повторяется при повороте на 90°).

2) выбраны 2 не симм. отн. центра точки.

Всего способов выбрать 2 узла $\binom{64}{2}$, 32 симм. - симметричные.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Всего } C_{64}^2 - 32 = \frac{64 \cdot 63}{2} - 32 = 32 \cdot 63 - 32 =$$
$$= 32 \cdot 62 \text{ способа выбрать пару.}$$

Одна такая пара повторится 4 раза: при повороте на 90° , 180° и 270° , и + сама пара $\Rightarrow$ надо делить на 4.

$$\text{Всего } \frac{32 \cdot 62}{4} = 8 \cdot 62 = 496 \text{ способов.}$$

И суммарно:

$$16 + 496 = 512 \text{ способов.}$$

Ответ: 512 способов.



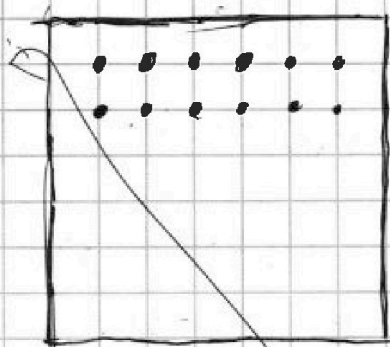
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

~~1~~ ИЗ ~~1~~

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Черновик~~

~~Всего $8 \cdot 8 = 64$ узла.~~

~~Способов покрасить~~

~~2 узла в белый~~

~~ответ: $C_{64}^2 = \frac{64!}{62! \cdot 2!} = \frac{64 \cdot 63}{2} = 32 \cdot 63.$~~

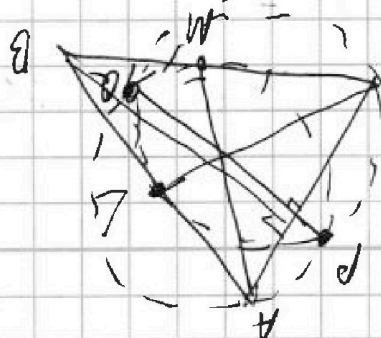
~~Чтобы учесть поворот, нужно по-делить на 4, т.к. каждая покраска учитывается 4 раза при повороте.~~

~~$\frac{32 \cdot 63}{4} = 8 \cdot 63 = 504$ способа.~~

~~Ответ: 504.~~

1) т. на диагоналях на большой

2) т. в других местах.



$$x + 4 + 25 + 10x + 4 = 12 - x - x + 3x + 2 = 12 - 2x + 3x + 2 = 14 - x + 2 = 16 - x$$

$$x - 5 + 2x - x - 2 = 5 + 4x - 2 = 3 + 4x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
4 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n =$$

$$= (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = (m - 2n) \cdot$$

$$\cdot (m - 2n + 13) \geq 0, \text{ иначе не равно } 159^2 \text{ и } 17p^2$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m - 2n - 2) \geq 0$$

$$\text{Пусть } t = m - 2n \in \mathbb{Z}, t \neq 0, \text{ иначе } A = 0 \neq 17p^2$$

$$A = t(t + 13)$$

$$t < 0 \Rightarrow t + 13 < 0 \Rightarrow t < -13; \quad \text{или } 159^2$$

$$B = mn(t - 2)$$

$$t < 0 \Rightarrow B < 0, \text{ т.к.}$$

$$1^\circ. A = 17p^2, B = 159^2$$

$$\text{Тогда } t > 0 \text{ всегда,}$$

$$t(t + 13) = 17p^2. \text{ Возможные сл.}$$

$$1) t = 17$$

$$\text{или}$$

$$2) t = p \text{ или}$$

$$3) t = p^2 \text{ или}$$

$$4) t = 17p^2$$

$$17(17 + 13) = 17p^2$$

$$p^2 = 30 - \text{не}$$

кв. целого,
противоречие.
квадрат простого
числа.

$$p(p + 13) = 17p^2$$

$$p + 13 = 17p$$

$$13 = 16p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \notin \mathbb{Z},$$

$$\text{противоречие}$$

$$p^2(p^2 + 13) = 17p^2$$

$$p^4 + 13p^2 = 17p^2$$

$$p^2(p^2 - 4) = 0$$

$$p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$p = 0 - \text{неверно,}$$

$$p - \text{простое;}$$

$$p^2 - 4 = 0 \Rightarrow p \notin \mathbb{N}.$$

$$5) t = 1.$$

$$14 = 17p^2 - \text{невозможно.}$$

$$6) t = 17p$$

$$17p(17p + 13) = 17p^2$$

$$p = 17p + 13 -$$

$$\text{невозможно.}$$

$$\Rightarrow p = 2$$

$$(p \in \mathbb{N}).$$

Всего $2 \cdot 3 = 6$ делителей

Возможно лишь $p = 2, t = p^2 = 4.$

$$m - 2n = 4.$$

$$B = mn(4 - 2) = 2mn$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т. на бол. диагональ учитыва-
ются 2 раза, ост. - 4 раза.

Обе на бол. диагональ:

$$\frac{C_{16}^2}{2} + \frac{C_{64}^2}{4} + \frac{C_{16}^1 \cdot C_{48}^1}{4} + \frac{C_{48}^2}{4}$$

$2x = 3y$ $y = 2x - 3y$

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$y = \frac{2x - 6}{3} = \frac{2}{3}x - 2$$

$$1^\circ \begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 4 \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ 2y - 3x \leq 4 \\ -x - y \leq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x - 3y)^2 \leq 36 \\ (3x - 2y)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$3^\circ \begin{cases} 3y - 2x \leq 6 \\ 2y - 3x \leq 4 \end{cases}$$

$$4^\circ \begin{cases} 3y - 2x \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 12xy + 9y^2 \leq 36 \\ 9x^2 - 12xy + 4y^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$13x^2 - 24xy + 13y^2 \leq 52$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t = -p^2$$

$$-p^2(-p^2+13) = 17p^2$$

$$p^2 - 13 = 17p^2$$

$$t < 0 \Rightarrow t + 13 < 0$$

$$t < -13$$

$$t = -17$$

$$-17(-4) = 17p^2$$

$$p = 2 \quad \text{and} \quad t = -17$$

$$-17mn =$$

$$-19mn = +15q^2$$

$$q = 19$$

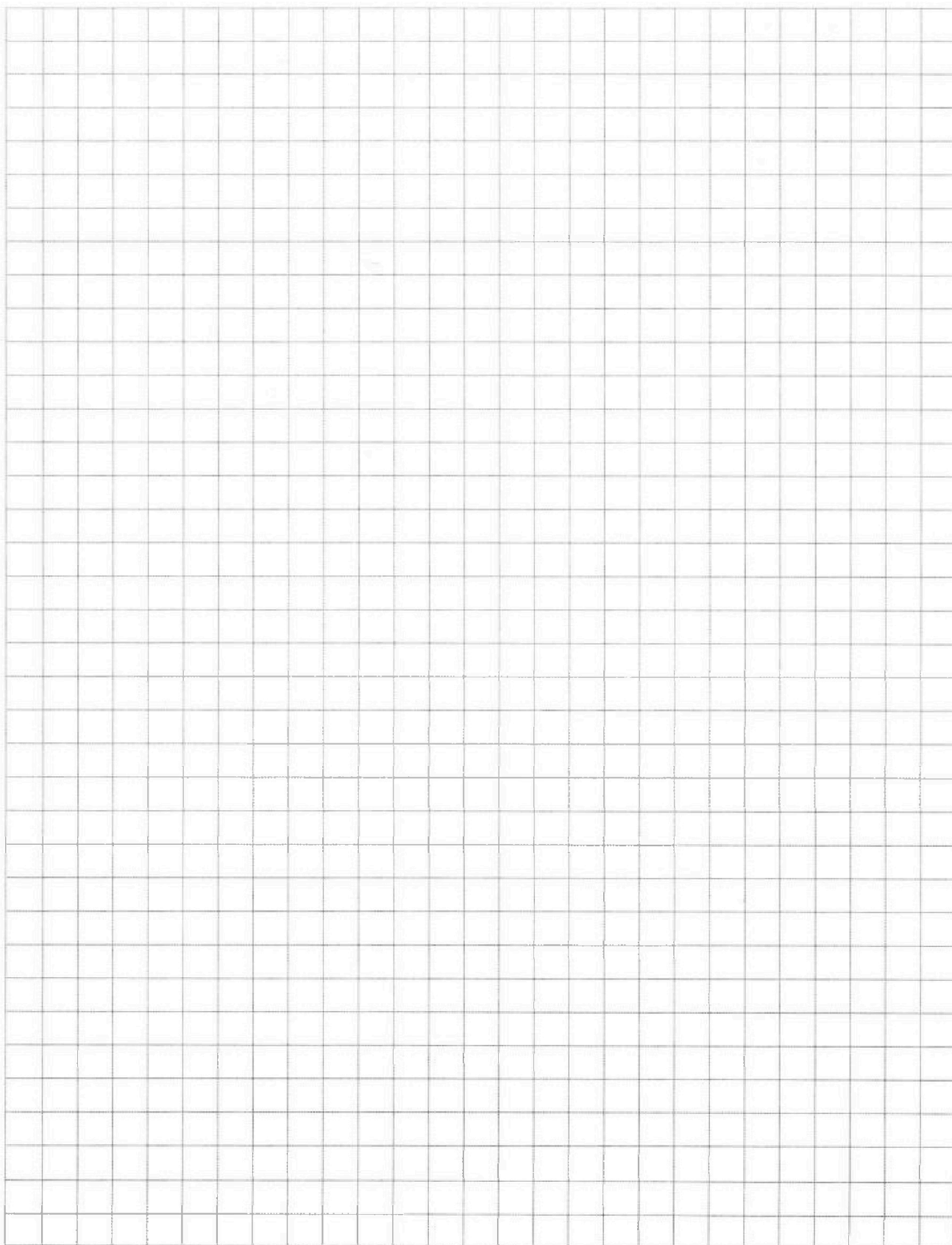


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ОДЗ: $x > -4, y \leq 3, 12 - xy \geq 0$
 $x \geq 0, y \geq 0$

$$(2) \quad 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2$$

$$2(x^5 - y^5) + 4(x^2 - y^2) - \sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$2(\sqrt{x} - y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) +$$

$$+ 4(x - y)(x + y) - \sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^4 - x^3y +$$

$$+ x^2y^2 - xy^3 + y^4) + 4(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) - \sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$x = y$ или $\frac{2(x^5 - y^5)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{4(x^2 - y^2)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \sqrt{3} = 0$

$$\sqrt{16 - y^2 - (4 + x)} = \sqrt{(4 - y)(4 + y) - (4 + x)} \quad (2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3x})$$

$$\cancel{2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3x}} = 2y^5 + 4y^2 - \sqrt{3x}$$

$f(a) = f(b) \quad 2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt{3y}$

$$\cancel{2x^5 + 4x^2 +}$$

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x} - 2y^5 - 4y^2 - \sqrt{3y} = 0$$

$$2x^5 + 4x^2 + x^{\frac{2}{3}} - 2y^5 - 4y^2 - y^{\frac{2}{3}} = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$12 - x - y^2$
 $\frac{1 + \sqrt{x+4}}{5 + \sqrt{x+4}} = \frac{x-5}{5+y}$
 $\frac{1+y}{5+y} = \frac{p}{q}$
 $5+y = (1+y)p$
 $p + y = 5 + p$
 $y = 5 + p$
 $p + y = 5 + p - y$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y}$
 $(3y)^2 = 3x$
 $(3y)(x+4) = 12 - xy + 3x$

$AB^2 + AC^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2}$

$BX \cdot AB = BM \cdot BL$
 $CN \cdot AC = CK \cdot CM$
 $CBX = \frac{1}{2} AB \cdot BL$
 $CN(CN+5) = \frac{1}{2} AB(AB-BL)$

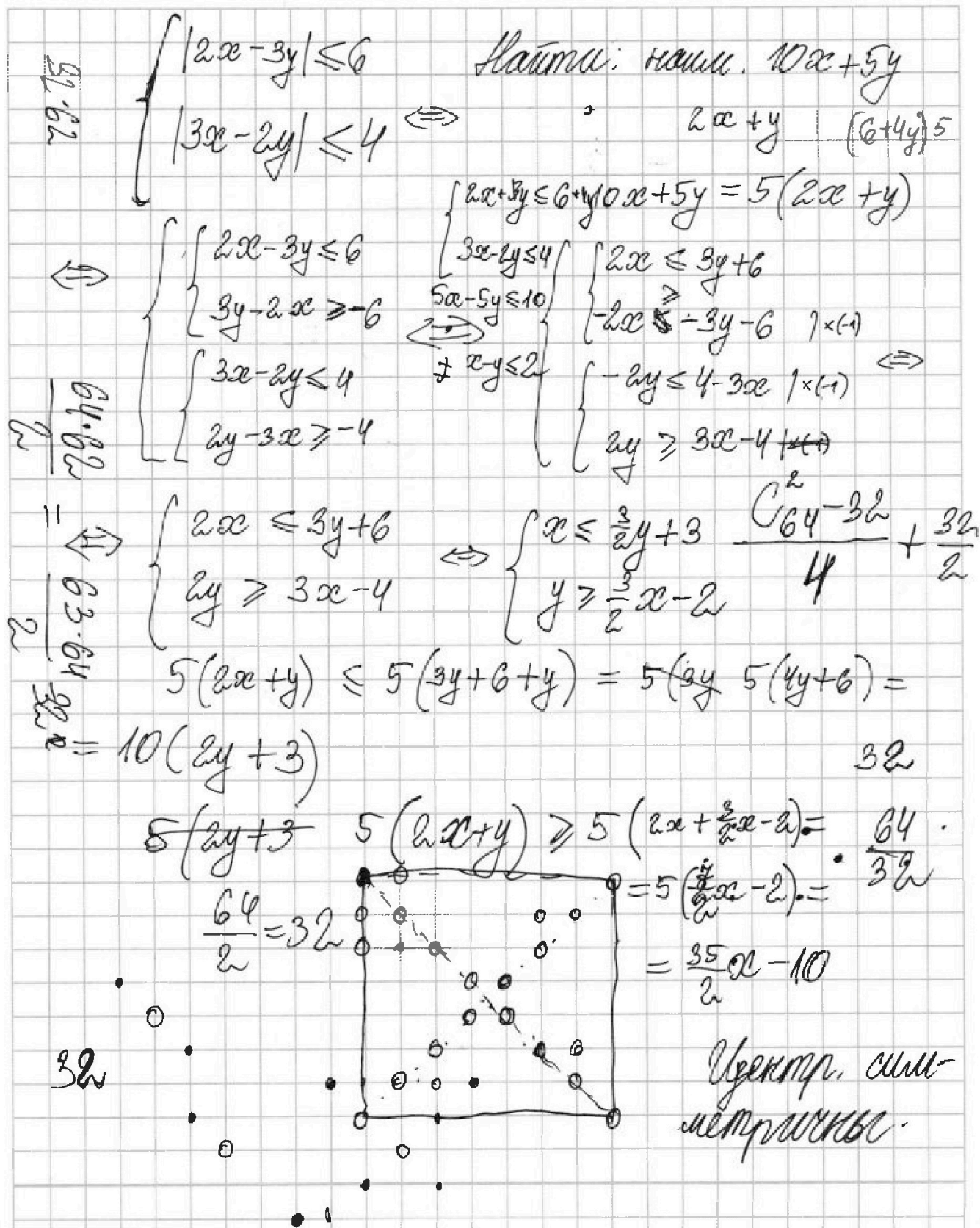
$\sqrt{x+4} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} + \sqrt{3-y}$
 $x+4+25+10\sqrt{x+4} = 4(12-x-y^2) + 3y + 4\sqrt{3-y}$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-2n)(m-2n+13) \quad 12+24=36 \quad 36 \quad -10$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2) \quad (4-8)^2=16 \quad 16 \quad -24$$

Одно из них $17p^2$, другое $15q^2$, p и q - простые.
 $-6 \cdot 4 = -24$

$$(m-n)(m-2n+13) = 17p^2$$

2 множ. $\Rightarrow$ либо один 17, другой p^2 , либо

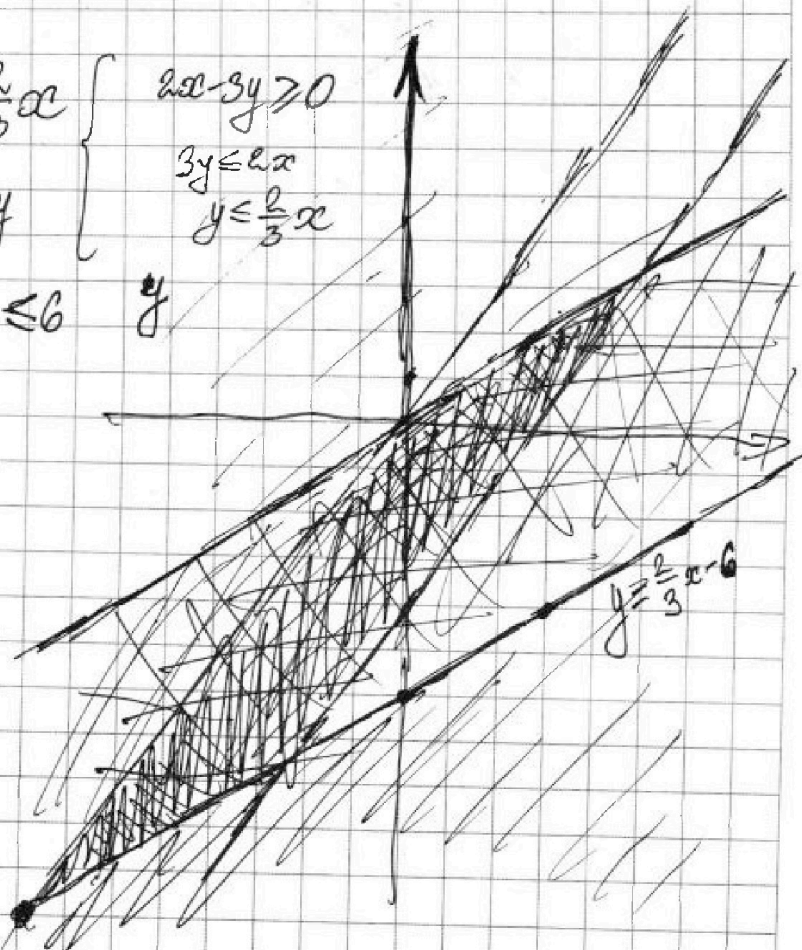
$$mn(m-2n-2) = 15p^2 = 5 \cdot 3p^2$$

3 множ.

$$\begin{cases} y > \frac{2}{3}x \\ 2x < 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3y > 0 \\ 3y \leq 2x \\ y \leq \frac{2}{3}x \end{cases}$$

$$|2x-3y| \leq 6$$

$$\begin{aligned} 1^\circ. & \begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 3y = 2x-6 \\ y = \frac{2}{3}x-2 \end{cases} \\ 2^\circ. & \begin{cases} 2x < 3y \end{cases} \end{aligned}$$



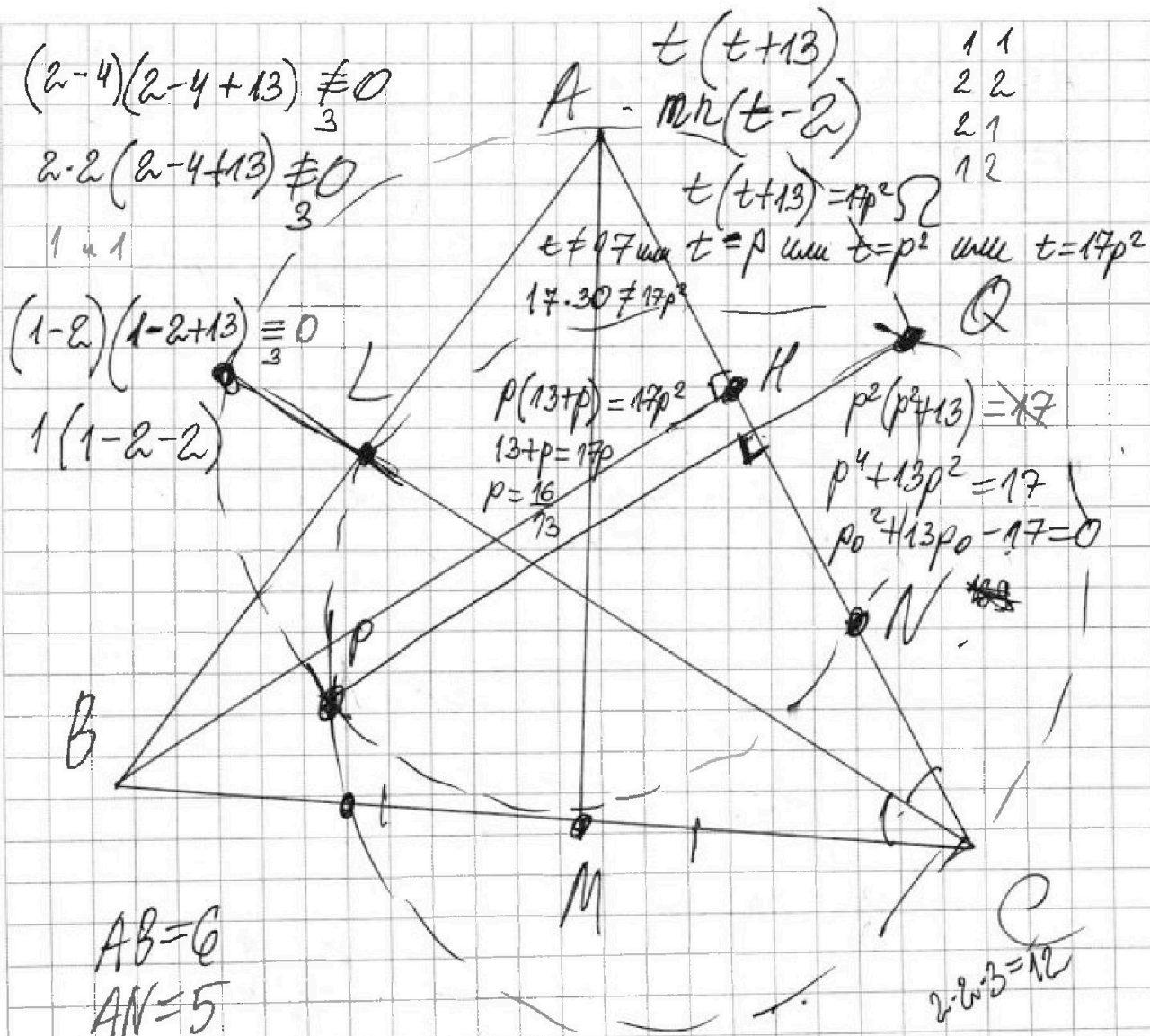


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$t(t+13) = 68$$

$$t=4$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$x=y$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2 \end{cases}$$

$$2(x-y)(x^4 + y^4) + \sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 4(x-y)(x+y) = 0$$

$$2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^4 + y^4) - \sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 4(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) = 0$$