



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = -3x^2$$

$$\begin{cases} a_7 = (x^2 - 4x)^2 = a_5 + 2d = 6x + 18 + 2d \\ a_{11} = -3x^2 = a_5 + 6d = 6x + 18 + 6d \end{cases} \begin{cases} (x^2 - 4x)^2 = 6x + 18 + 2d \\ 2d = \frac{-3x^2 - 6x - 18}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - 4x)^2 = 6x + 18 - x^2 - 2x - 6 \quad (1) \\ 2d = -x^2 - 2x - 6 \end{cases}$$

$$(x^2 - 4x)^2 = -x^2 - 2x - 6$$

$$1) (x^2 - 4x)^2 = -x^2 - 4x + 12$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 12 = 0$$

$$\cancel{(x^2 - 4x)^2} \text{ Пусть } (x^2 - 4x) = t, \text{ тогда}$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t + 4)(t - 3) = 0$$

$$t = -4 \quad \text{или} \quad t = 3$$

$$x^2 - 4x = -4$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3}}{1} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$x = 2$$

$$\text{Ответ: } 2; 2 \pm \sqrt{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$14x + 7y = 14 \cdot \frac{(-48)}{7} + 7 \cdot \frac{(-50)}{7} = -96 - 50 = -146$$

Answer: -146



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

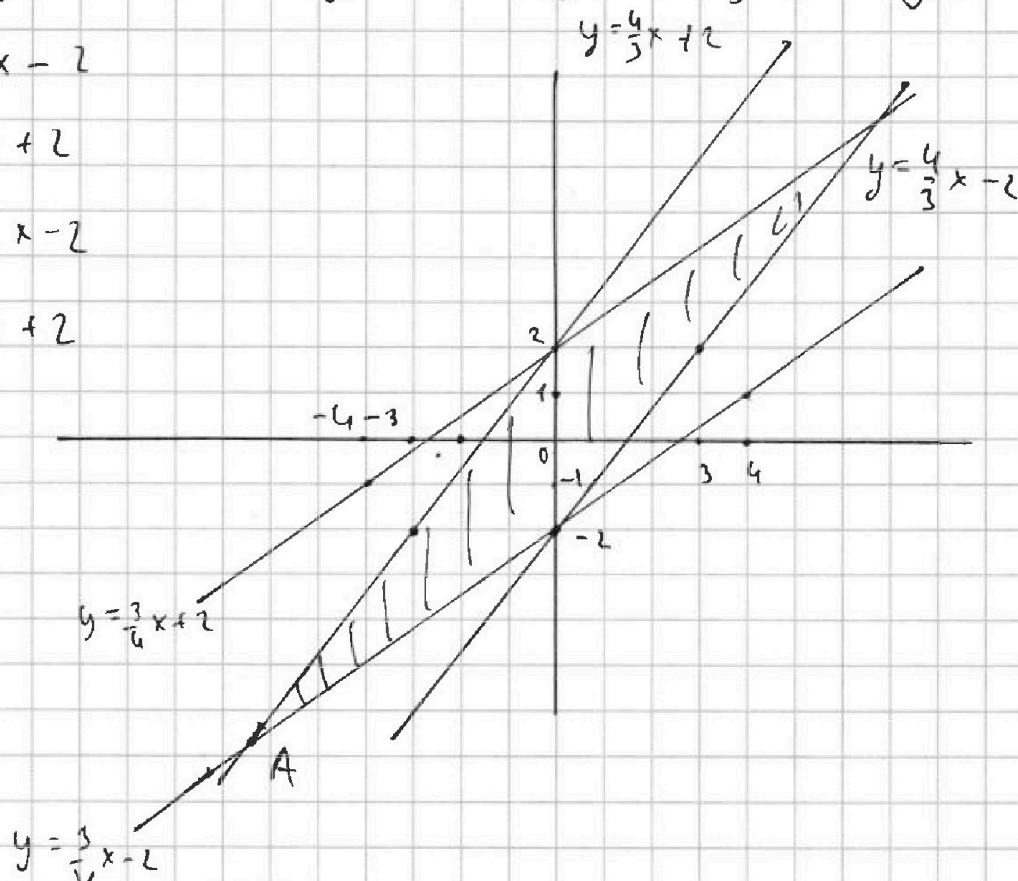
$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \\ & \begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} (4x-3y)^2 - 6^2 \leq 0 \\ (3x-4y)^2 - 8^2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (4x-3y-6)(4x-3y+6) \leq 0 \\ (3x-4y-8)(3x-4y+8) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$1) y = \frac{4}{3}x - 2$$

$$2) y = \frac{4}{3}x + 2$$

$$3) y = \frac{3}{4}x - 2$$

$$4) y = \frac{3}{4}x + 2$$



Найдем значение выражения $(14x + 7y)$ в точке А.

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x - 2 = \frac{4}{3}x + 2 \\ \end{cases} \quad || \cdot 12$$

$$9x - 16x = 48$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) - 2 = -\frac{36}{7} - \frac{14}{7} = -\frac{50}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

(p, q) - простые числа

$$(m, n) \in \mathbb{N}$$

Пусть $x = m - n$, а $y = mn$, тогда

$$I) A = 13p^2$$

$$\begin{cases} x(x+9) = 13p^2 \\ y(x+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+9) = 13p^2 \\ y(x+3) = 3q^2 \end{cases}$$

Т.к. если $x \not\equiv 2 \Rightarrow p \equiv 2 \Rightarrow p = 2$; если $x \equiv 2 \Rightarrow (x+9) \equiv 2 \Rightarrow p \equiv 1 \Rightarrow p = 2$

$$\begin{cases} x^2 + 9x - 13 \cdot 4 = 0 \\ y(x+3) = 3q^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{или} \\ p = 2 \end{matrix} \quad \begin{cases} (x+13)(x-4) = 0 \\ y(x+3) = 3q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ 7y = 3q^2 \\ x = -13 \\ -10y = 3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ mn = \frac{3q^2}{7} \end{cases}$$

Т.к. $q \equiv 7 \Rightarrow q = 7$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} m-n=4 \\ mn=21 \end{cases} \begin{cases} m=4+n \\ n^2+4n-21=0 \end{cases} \begin{cases} m=4+n \\ (n+7)(n-3)=0 \end{cases} \begin{cases} m=4+n \\ n=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=4+n \\ n=-7 \end{cases}$$

или по формуле, т.к.
 $7 \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} m=7 \\ n=3 \end{cases}$$

$$\text{II) } A=3q^2$$

$$\begin{cases} x(x+9)=3q^2 \\ y(x+3)=13p^2 \end{cases}$$

т.к. если $x:2 \Rightarrow q:2 \Rightarrow q=2$; если $x \not\equiv 2 \Rightarrow (x+9):2 \Rightarrow q:2 \Rightarrow q=2$

$\downarrow$
 $q=2$

$$\begin{cases} x^2+9x-12=0 \\ y(x+3)=13p^2 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+48}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{129}}{2} \text{ — т.к. корни не целые}$$

$\downarrow$
 $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow (m,n) \notin \mathbb{N}$

Ответ: $m=7; n=3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} \text{ - по формуле биссектрисы}$$

$$\frac{\frac{2}{3}a}{\frac{4}{3}a} = \frac{AB}{12}$$

$$AB = 12 \cdot \frac{2}{4} = 6$$

$$\triangle ABX \sim \triangle YBM (\angle B; \angle BAX = \angle BYZ = \alpha)$$

$$\frac{AB}{BY} = \frac{AX}{YM} \Rightarrow \frac{AX}{4+ZM} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{ZM}{AX} = \frac{3}{4} \\ \frac{AX}{4+ZM} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{ZM}{4+ZM} = \frac{1}{2} \quad ZM = 4$$

По теореме косинусов в $\triangle M(Z)$:

$$MC^2 = 16 + ZM^2 + ZC^2 - 2 \cdot ZM \cdot ZC \cdot \cos \alpha = 16 + 81 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} = 97 - 48 = 49$$

$$\sqrt{\quad} \\ MC = 7$$

$$BC = 2MC = 14$$

Ответ: 14

$$Bx = Bm - xm = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{5}$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{s-y} + s = 2\sqrt{30-x-y} \quad (2)$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y \quad (1)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq -6 \\ y \leq s \\ 30-x-y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \in [0; s] \\ 30-x \geq y \end{cases}$$

$$1) 4x^4 - 4y^4 + x + y + 5\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[4]{y} = 0$$

$$4(x^4 - y^4) + (x - y) + 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) =$$

$$= (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2)$$

$$4(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2) + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) \cdot$$

$$(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(4(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5) = 0$$

$$\text{Второе слагаемое скобки} \geq 5, \text{ т.к. } \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{y}$$

$$x = y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$-x^2 - x + 30 = -(x^2 + x - 30) = -(x+6)(x-5) = (5-x)(x+6)$$

$$x+6 + 5-x = 11$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} - 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+6)} - 11$$

$$6 + \sqrt{5-x} - \sqrt{x+6} = 11 - 2\sqrt{(5-x)(x+6)}$$

$$6 + \sqrt{5-x} - \sqrt{x+6} = (\sqrt{5-x})^2 - 2\sqrt{(5-x)(x+6)} + (\sqrt{x+6})^2$$

$$(\sqrt{5-x} - \sqrt{x+6})^2 + (\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}) - 6 = 0$$

Пусть $\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = t$, тогда

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t+3)(t-2) = 0$$

$$t = -3$$

или

$$t = 2$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -3$$

$$\sqrt{5-x} = 3 + \sqrt{x+6}$$

$$5-x = 9 + 6\sqrt{x+6} + x+6$$

$$-10-2x = 6\sqrt{x+6}$$

$$-5-x = 3\sqrt{x+6}; x \leq -5$$

не подходит
т.к. $x \geq 0$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2$$

$$\sqrt{x+6} = 2 + \sqrt{5-x}$$

$$x+6 = 4 + 4\sqrt{5-x} + 5-x$$

$$2x-3 = 4\sqrt{5-x}; x \geq 1,5$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (4\sqrt{5-x})^2$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 80 - 16x$$

$$20x^2 - 12x - 71 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 71}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{72}}{4} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{18}}{4} = -0,5 \pm \sqrt{18}$$

$(-0,5 - \sqrt{18})$ — не подходит, т.к. $x \geq 0$

$-0,5 + \sqrt{18}$ — подходит по всем ОДЗ

Ответ: ~~-0,5~~ $x = y = -0,5 + \sqrt{18}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

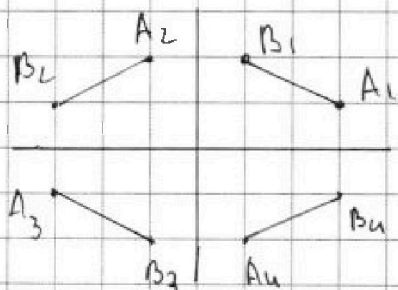
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√6

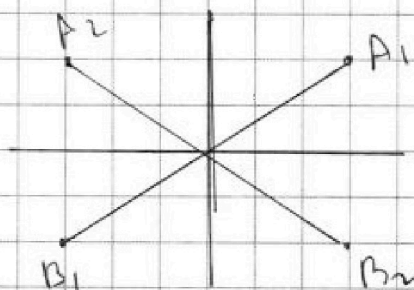
Квадрат переходит в себя относительно центра только при поворотах на 90° ; 180° ; 270°

Чтобы получить количество симметричных относительно центра пар узлов, нужно разделить на 4 общее количество несимметричных относительно центра пар узлов, поскольку при поворотах 90° , 180° , 270° таких пар узлов образуется 4, а при поворотах на 90° и 270° они переходят в новые пары узлов.

Чтобы получить количество симметричных относительно центра пар узлов, нужно разделить на 2 общее количество несимметричных относительно центра пар узлов, поскольку при поворотах на 180° пара переходит в другую, а при поворотах на 90° и 270° образуются две новые пары узлов.



4 не симметричных
относительно центра
пар узлов



2 не симметричных
относительно центра
пар узлов

~~Общее количество несимметричных относительно центра пар узлов без учета поворотов:~~

Т.к. квадрат $9 \times 9 \Rightarrow$ количество узлов 10×10



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Общее количество симметричных обхватов ушей
пар узлов ~~равно~~ без учета поворотов равно:

$$\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$$

С учетом поворотов: $\frac{50}{2} = 25$

Общее количество несимметричных обхватов ушей
пар узлов без учета поворотов равно:

$$C_{100}^2 - 50 = \frac{100 \cdot 99}{2} - 50 = 50 \cdot 98 = 4900$$

С учетом поворотов: $\frac{4900}{4} = 1225$

$$1250 + 25 = 1275$$

Ответ: 1275

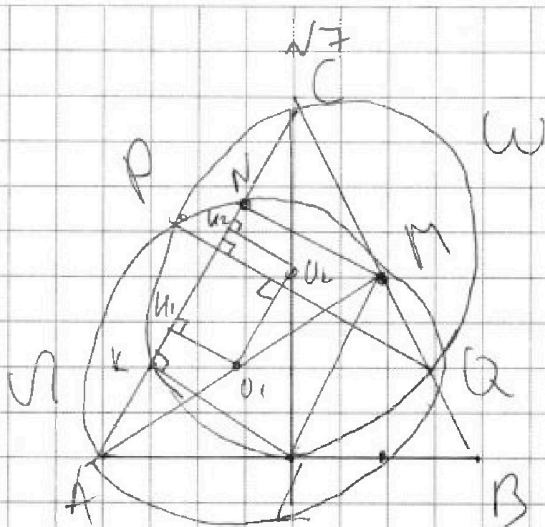


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AB = 20$; $AN = 20$; $PQ \parallel$ высоте из B

Т.к. $PQ \parallel$ высоте из $B \Rightarrow PQ \perp AC$ (высота из $B \perp AC$)

Пусть центр окружности $\Omega - O_1$, а $\omega - O_2$

$O_2 O_1 \perp PQ$, т.к.

$\triangle PO_2 O_1 = \triangle QO_2 O_1$
(по 3 сторонам)

$PO_2 = QO_2$ - радиусы

$PO_1 = QO_1$ - радиусы

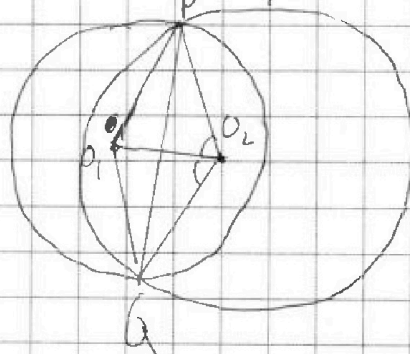
$O_2 O_1$ - общая

$\angle PO_2 O_1 = \angle QO_2 O_1 \Rightarrow O_2 O_1$ - биссектриса $\Rightarrow O_2 O_1$ - высота
(т.к. $PO_2 O_1$ - равнобедренный)

$PQ \perp O_2 O_1 \Rightarrow O_2 O_1 \parallel AC$ (т.к. $PQ \perp AC$)

Проведем $O_2 U_2$ и $O_1 U_1$ ($O_2 U_2 \perp AC$ и $O_1 U_1 \perp AC$)

$O_2 U_2 \parallel O_1 U_1$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

O_1, O_2, O_1O_2 - прямоугольник ($O_1O_2 \parallel O_1O_2; O_1O_2 \parallel O_1O_2$,
 $O_1O_2 \perp AC$)

$$O_2O_1 = O_1O_2$$

Проведем KL (K - точка пересечения AC)

$\angle MNK = 90^\circ$ ($\angle$ опирается на диаметр AM)

$\angle CLK = 90^\circ$ - опирается на диаметр CL

$$MN \parallel O_1O_2, KL \parallel O_1O_2$$

O_1O_2 - средняя линия $\triangle ANM$ ($MO_1 = AO_1$ - радиусы; $O_1O_2 \parallel AM$)

O_1O_2 - средняя линия $\triangle KCL$ ($CO_2 = O_2L$ - радиусы; $O_1O_2 \parallel KL$)

$$NM = 2O_1O_2 = 2O_1O_2$$

$$KL = 2O_1O_2 = 2O_1O_2$$

$$MN = KL$$

$MNKL$ - прямоугольник ($NM = KL; NM \parallel KL; MN \perp KN$)

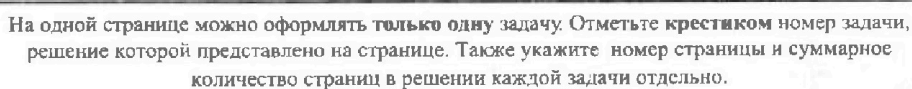
$$ML \parallel KN \text{ и } ML = KN$$

LM - средняя линия $\triangle ABC$ ($ML \parallel AC; LM = MB$)

$$AC = 2ML$$

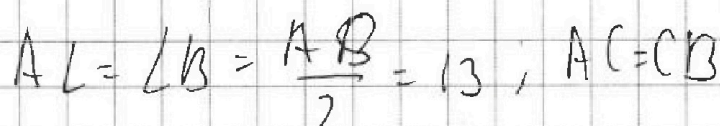
$$AL = LB$$

CL - биссектриса и медиана $\Rightarrow \triangle ABC$ равнобедрен



СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Нужно $d = \angle ACL$, а $x = NC$, тогда

$$ML = \frac{4l}{2} = \frac{20 + x}{2} = Nk$$

$$AK = AN - WK = 20 - \frac{20+x}{2} = \frac{20-x}{2}$$

$$\angle CAL = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle AKL = \alpha$$

$$\sin d = \frac{AK}{AL} = \frac{AL}{AC}$$

$$\frac{20-x}{26} = \frac{13}{20+x}$$

$$2100 - x^2 = 169 \cdot 2$$

$$x^2 = 2(200 - 160) = 231 - 62$$

$$x = \sqrt{G}$$

$$AC = CB = \sqrt{62} + 20$$

Output: $20 + \sqrt{62}$

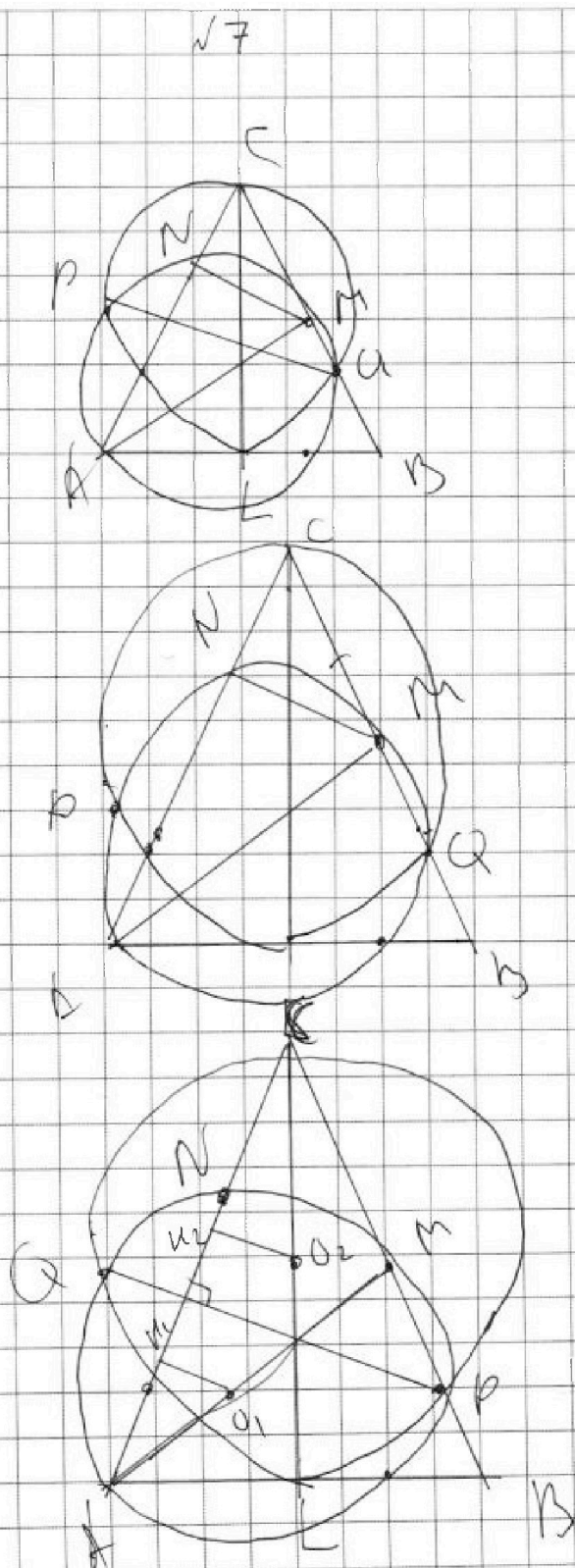


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Квадрат переходит в себе только при поворотах на 90° и 180°
 Общее количество симметричных пар узлов
 нужно подсчитать на 4, так как при поворотах
 на 90° , 180° , 270° образуется новые пары узлов

Общее количество симметричных пар узлов
 нужно подсчитать на 2, так как при повороте
 на 180° пары переходят сами в себя, а при по-
 вращениях на 90° и 270° образуется новые пары

т.е. квадрат 9×9 , в котором узлы 10×10

Общее количество симметричных пар узлов образу-
 ется поворотом:

$$\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$$

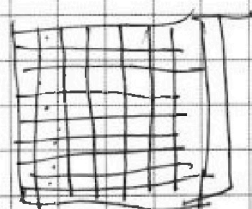
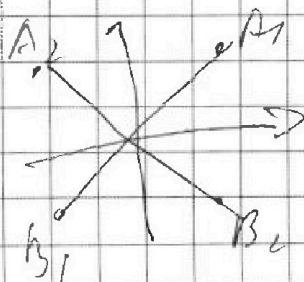
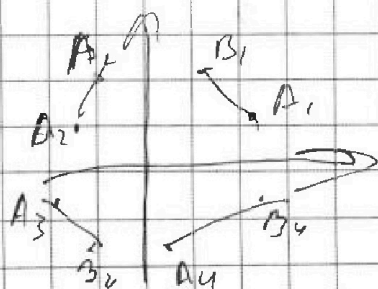
С учетом поворотов: $\frac{50}{2} = 25$

Общее количество несимметричных пар узлов бу-
 дется поворотом:

$$100 - 50 = \frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99$$

С учетом поворотов: $\frac{50 \cdot 99}{4} = \frac{4950}{4} = 1237.5$

$$1237.5 + 25 = 1262.5$$



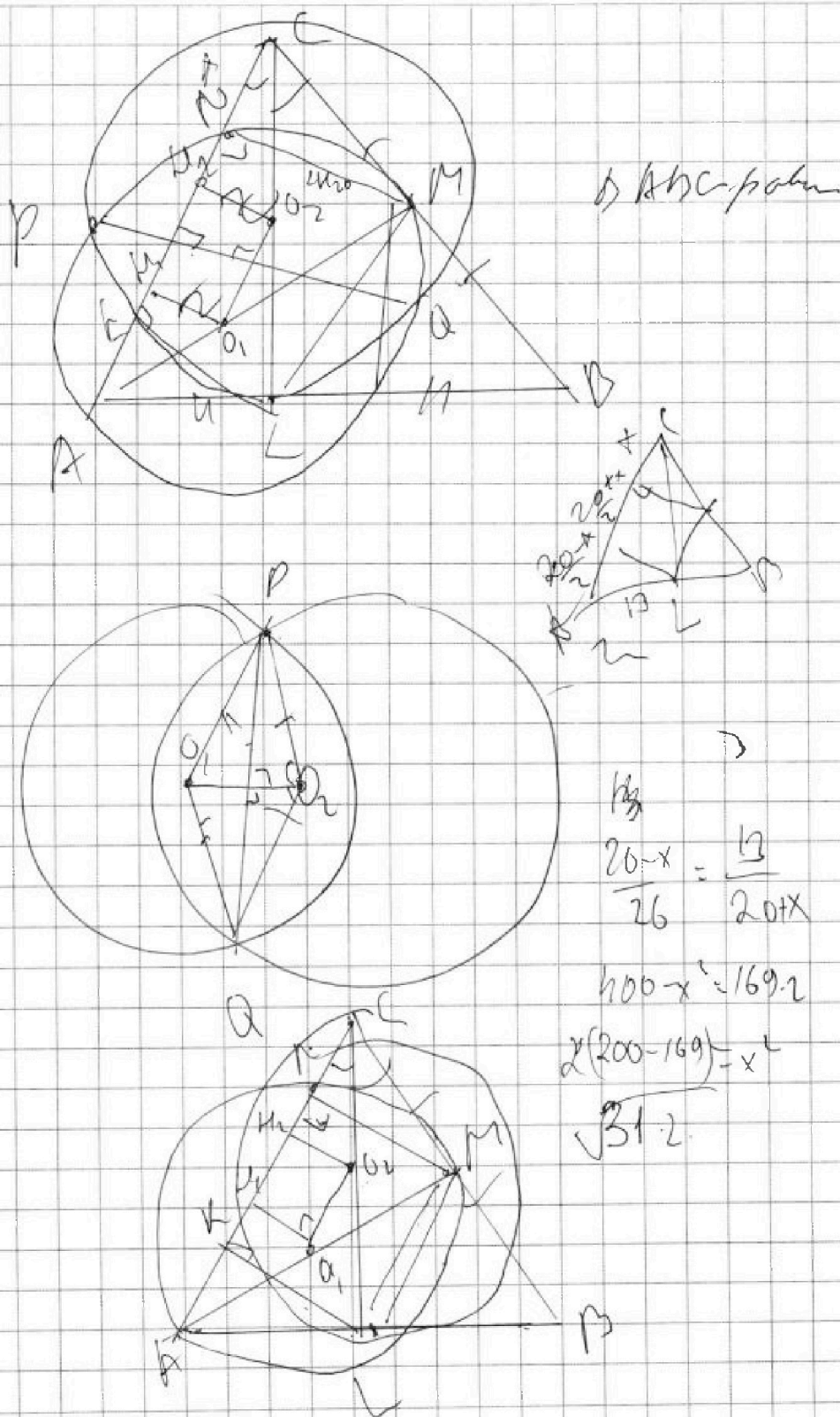


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$20x^2 - 12x - 71 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 71 \cdot 20}}{20} = \frac{6 \pm 2\sqrt{9 + 71 \cdot 5}}{20} = \frac{3 \pm \sqrt{364}}{10}$$

$$= 3 \pm 1$$

~~$$4x^2 - 4x - 71 = 0$$~~

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 71}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{18}}{4} = -0,5 \pm \frac{\sqrt{18}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{18}}{4} = -0,5 \pm \sqrt{18}$$

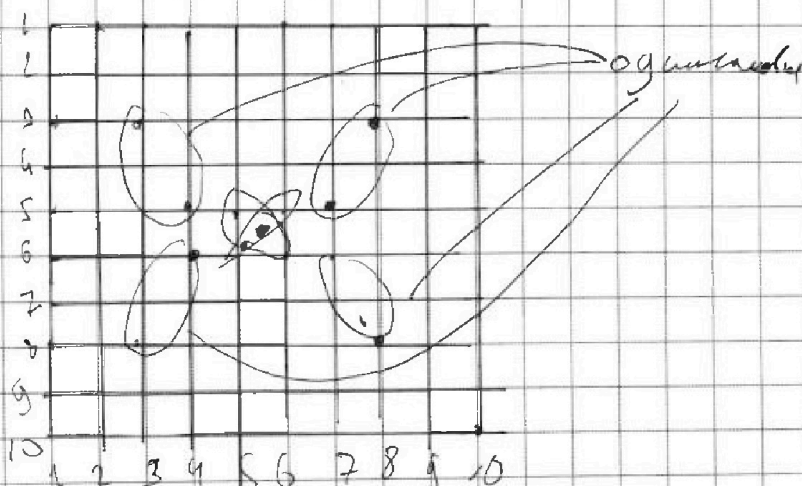
$$-0,5 - \sqrt{18} \text{ не подходит, т.к. } x \neq 0$$

$$\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$$

$$\frac{50}{2} = 25$$

$$\frac{2}{100} = 50 =$$

$$\frac{100 \cdot 998}{2} = 50 \cdot 998$$



$$\frac{50 \cdot 998}{2} = \frac{49900}{2} = 24950$$
$$24950 + 25 = 24975$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

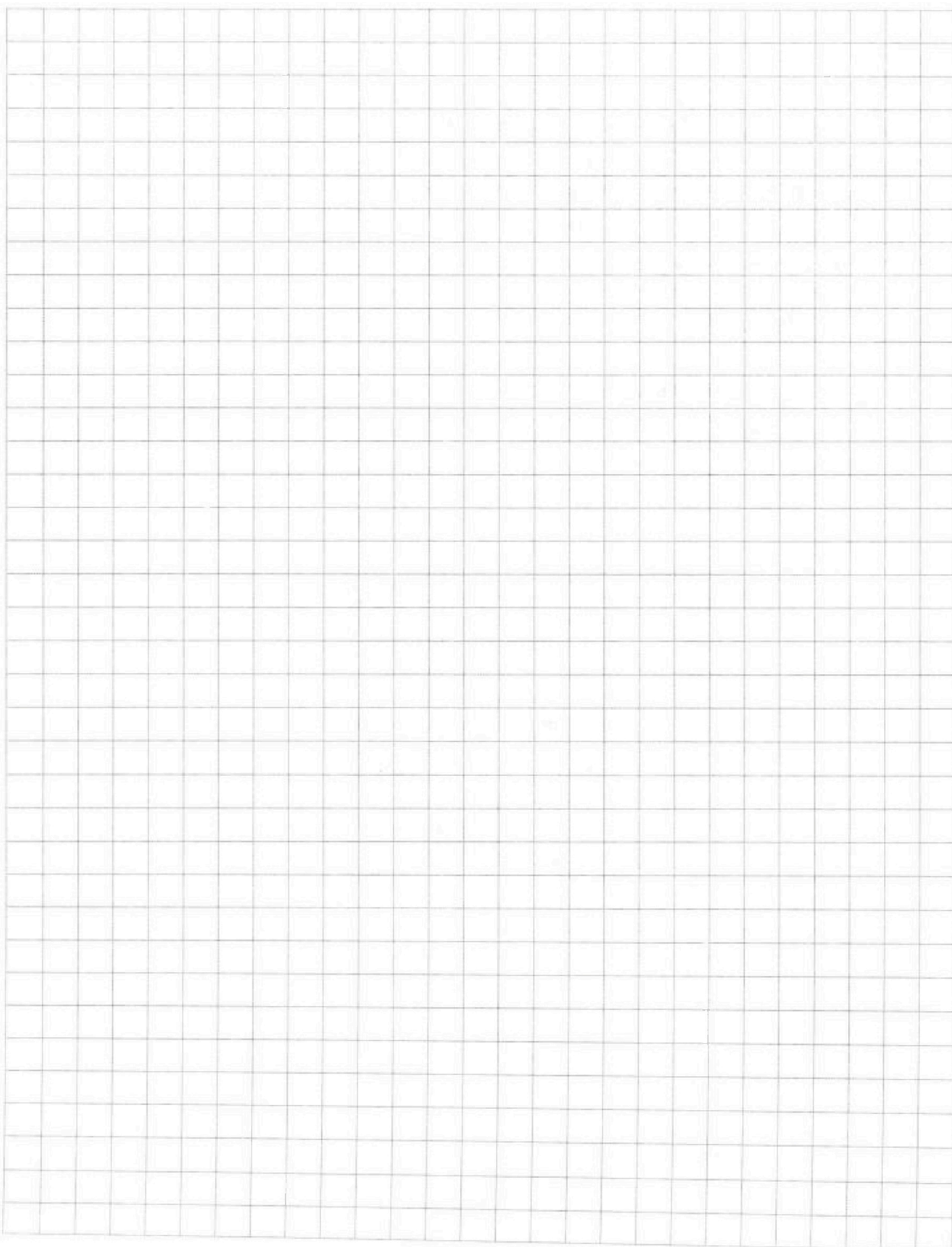
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

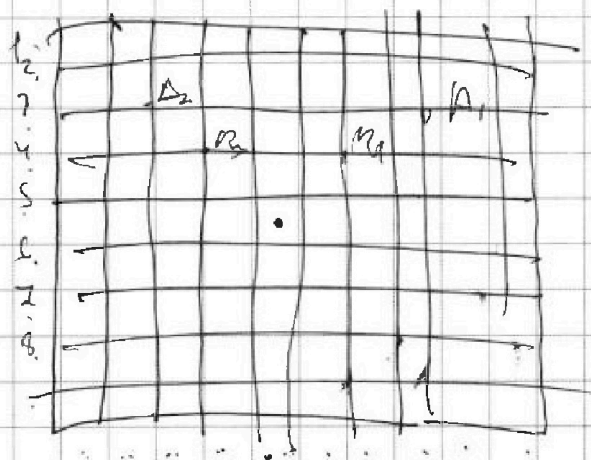
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq -6 \\ y \leq 5 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y \quad (a) \quad 2. \end{cases}$$

$$a) 4x^4 - 4y^4 + x - y - 5(\sqrt[4]{y}x - \sqrt[4]{x}y) = 0$$

$$\sqrt[4]{x} = a, a \sqrt[4]{y} = b, 6 \text{ or } 24$$

$$4(a^4 - b^4)$$

$$4(x-y)(x+y)(x^2+y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - 5.$$

$$(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$4(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + y^2) + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - 5.$$

$$(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$4(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) + (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + y^2)(x + y)$$

$$4x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y).$$

$$(x^2 + y^2) = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2)$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \cdot 5 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$364 = 2 + 88 \cdot 91.4$$

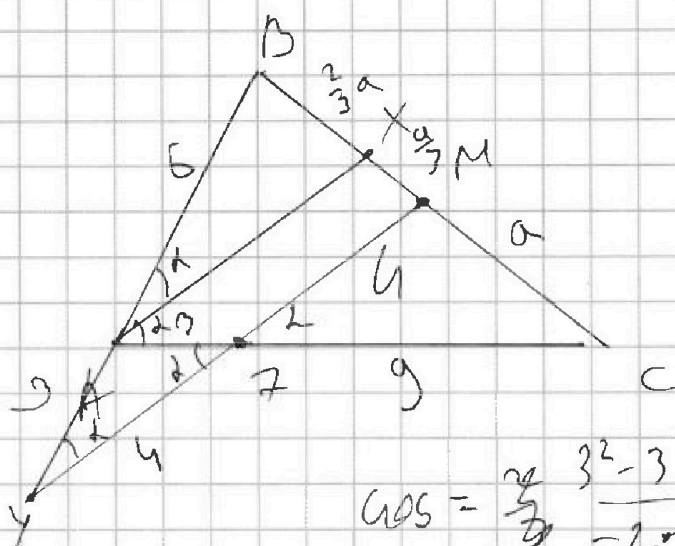


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos = \frac{3^2 - 3^2 - 4^2}{-2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 4}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{AN}{12} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{4}{3}a} = \frac{1}{2} \quad AB = 5$$

$$\frac{CM}{CX} = \frac{CZ}{CA} \Rightarrow \frac{a}{4+XM} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$4a = 3a + 3XM$$

$$XM = \frac{a}{3}$$

$$\frac{6}{3} = \frac{2}{3} = \frac{AX}{4+7M}$$

$$\frac{AX}{4+7M} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad MC = 7$$

$$\frac{\frac{4}{3}7M}{4+7M} = \frac{2}{3}$$

$$27M = 4 + 20 \quad 7M = 4$$

$$AX = \frac{4}{3}7M \quad BC = 14$$

$$MC^2 = 16 + 81 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} = 92 - 48 = 44$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n+9)(m-n)$$

$$B = m^2n^2 - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$m-n = x, mn = y$$

$$(x+9)x = A$$

$$y = y(x+3)$$

$$x:2 \Rightarrow A:2$$

$$x/2 \Rightarrow A/2$$

$$D) (x+9)x = 13n^2$$

↓

$$p \neq 2 \Rightarrow \text{т.к. } p - \text{простое число} \Rightarrow p \neq 2$$

$$x^2 + 9x - 13n^2 = 0$$

$$x = -13; x = 4$$

$$\begin{cases} m-n = -13 \\ mn = 10 \end{cases}$$

$$mn = 10$$

⇒ нет решений

$$\begin{cases} m-n = 4 \\ 4mn = 3q^2 \end{cases}$$

$$q = 2$$

$$\begin{cases} m-n = 4 \\ mn = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4+n \\ (4+n)n = 21 \end{cases}$$

$$n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$n = -7$$

не подходит

$$\begin{cases} n = 3 \\ m = 7 \end{cases}$$

(p,q) ∈ N

3, 5, 7, 11, ...



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$14x + 7y = -\frac{64}{7} \cdot 14 + 7 \cdot \frac{(-62)}{7} = -128 - 62 = -190$$

$$\text{II) } A = 3q^2$$

$$\text{из } X(x \in q) = 3q^2$$

$$q = 2$$

$$x^2 + 9x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 48}}{2}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{129}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

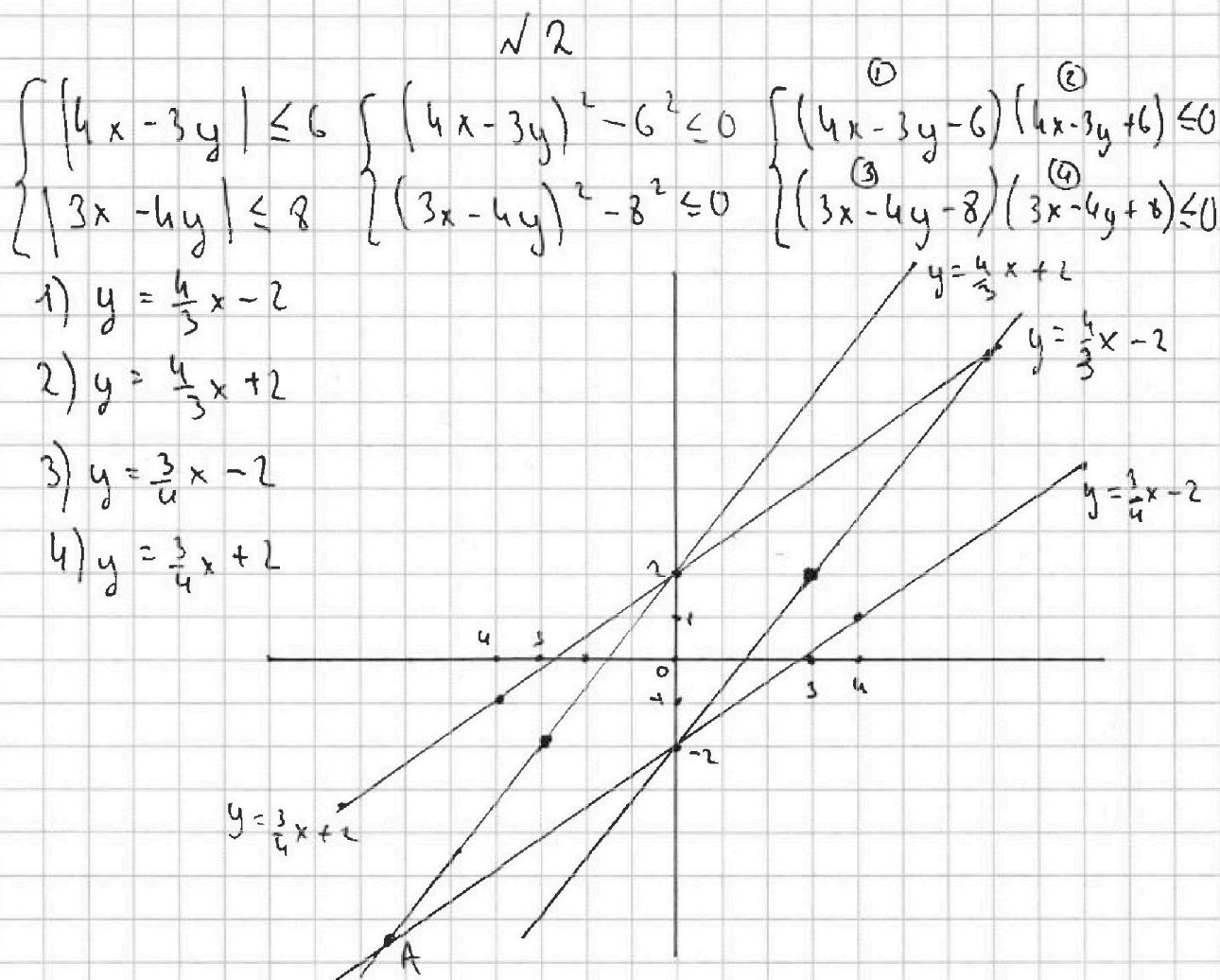
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Наименьшее значение выражения $(14x + 7y)$ будет в точке A.

$$\frac{3}{4}x - 2 = \frac{4}{3}x + 2 \quad | \cdot 12$$

$$9x - 16x = 4 \cdot 12$$

$$-7x = 4 \cdot 12$$

$$x = -\frac{4 \cdot 12}{7} = -\frac{48}{7}$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) - 2 = -\frac{48}{7} - 2 = -\frac{48 - 14}{7} = -\frac{62}{7}$$