



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть это прогрессия $a_1, a_2, \dots$ с разностью d , тогда:

$$2(a_5 - a_7) = -4d = a_2 - a_{11}$$

$$2(6x + 18 - (x^2 - 4x)^2) = (x^2 - 4x)^2 + 3x^2$$

$$2(6x + 18) = 3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2$$

$$2(2x + 6) = (x^2 - 4x)^2 + x^2$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 12 = 0$$

по т. Виета:

$$\begin{cases} x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$D/4 = 4 + 3 = 7$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

Ответ: $2; 2 \pm \sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

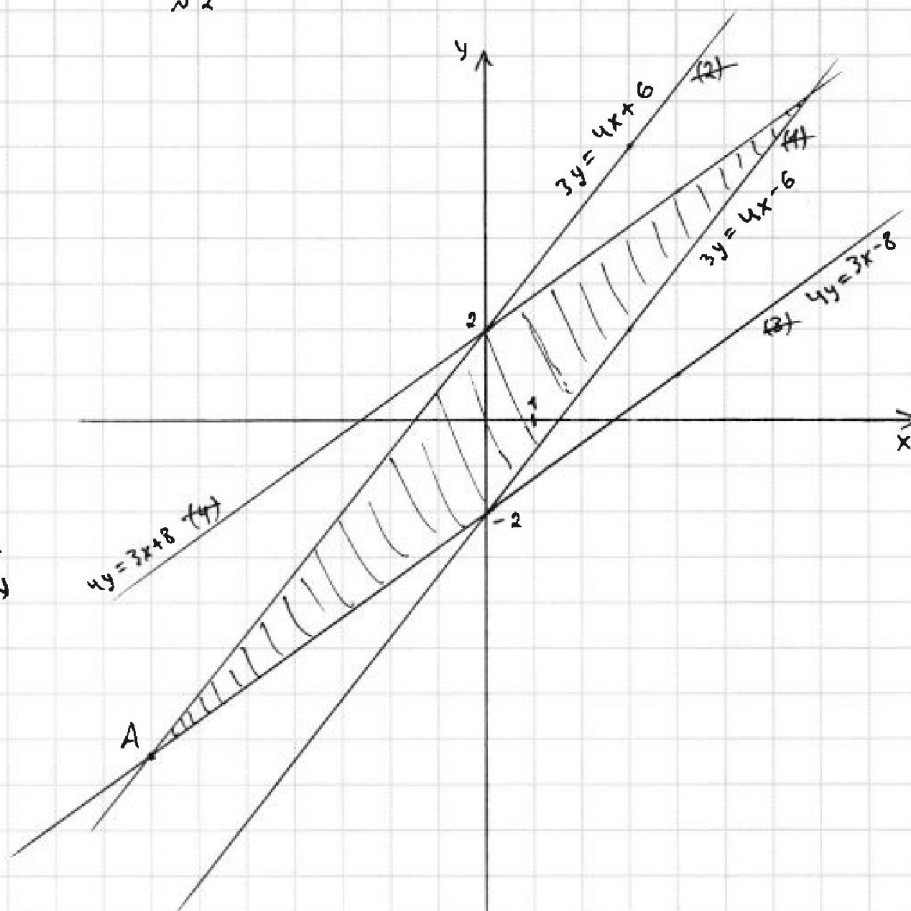
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y \geq 4x - 6 & (1) \\ 3y \leq 4x + 6 & (2) \\ 4y \geq 3x - 8 & (3) \\ 4y \leq 3x + 8 & (4) \end{cases}$$



В т. А x и y минимальны, значит, выражение и значение выражения $14x + 7y$ минимально. Найдём координаты

$$\text{т. А: } \begin{cases} 3y = 4x - 6 \\ 4y = 3x - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x + 24 - 9x + 24 = 0 \\ y = \frac{5}{3}x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{48}{7} \\ y = -\frac{50}{7} \end{cases}$$

$$\text{Итого: } 14x + 7y = -\frac{48}{7} \cdot 14 - 7 \cdot \frac{50}{7} = -146$$

Ответ: -146



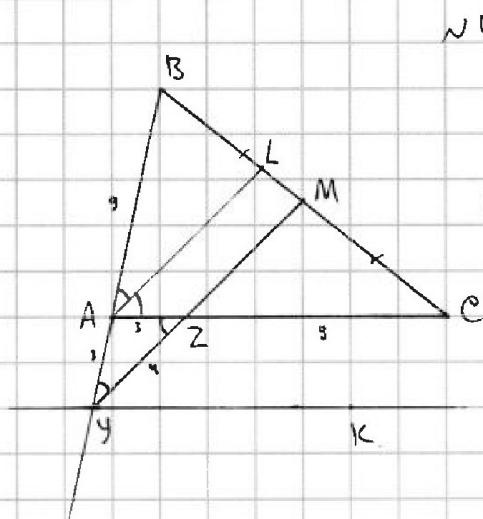
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

Д.н.: $YK \parallel AC$, AL - биссектриса

угла $\angle BAC$

$\angle LAZ = \angle AZY$ как накрест лежащие углы

$\angle BAL = \angle AYZ$ как соответственные углы

Значит, $\angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle AYZ$ - равнобедренный по признаку

т.е. $AY = AZ = 3$

По т. Менелая в $\triangle BCA$ и секущей: $M-Z-Y$: $\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{BY} = 1$

$$BY = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot 3 = 9$$

По т. косинусов в $\triangle AYZ$: $16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \angle YAZ$

$$\cos \angle YAZ = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}, \quad \cos \angle BAC = -\cos (180^\circ - \angle BAC) = -\cos \angle YAZ = -\frac{1}{3}$$

По т. косинусов в $\triangle ABC$: $BC^2 = 81 + 144 + 2 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \frac{1}{3}$

$$BC^2 = 225 + 24$$

Ответ: $\sqrt{249}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Решение:

Разобьём квадрат на 4 равных квадрата по 16 клеток, они не пересекаются. В каждом таком квадрате 25 урнов.

Есть 3 варианта расположения белых урнов:

1) они находятся в противоположных кв-х

$$\frac{24 \cdot 24}{2} + 1 = 239 \text{ способов} \quad (**)$$

2) они находятся в одном квадрате: $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ спос.

3) они находятся в соседних квадратах: $25 \cdot 25 = 625$ спос.

* т.к. при повороте только цинпированный урн перейдет в себя

$$\text{Всего: } 239 + 300 + 625 = 1164 \text{ } 1264$$

Ответ: ~~1164~~ способа 1264



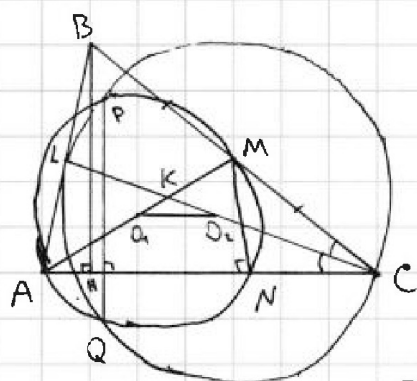
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



Решение:

Д.п.: O_1 - центр Ω , O_2 - центр ω
 $K = AM \cap CL$

$O_1 O_2 \perp PQ$ (т.к. PQ - хорда, соединяющая т. пересечения окр-ст)

Значит, $O_1 O_2 \parallel AC$

$$\left. \begin{array}{l} \angle KO_1 O_2 = \angle KAC \\ \angle KO_2 O_1 = \angle KCA \\ \text{как накрест лежащ.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle KO_1 O_2 \sim \triangle KAC \text{ по 2-м углам} \Rightarrow$$

по т. Фалеса:
 обобщенной

$$\frac{KO_1}{AO_1} = \frac{KO_2}{O_2 C}$$

$$\text{т.е. } \frac{KO_1}{\frac{AM}{2} - KO_1} = \frac{KO_2}{\frac{LC}{2} - KO_2} \Rightarrow$$

$$\angle LKM = \angle O_1 KO_2 \text{ как вертик.}$$

$$\Rightarrow \triangle O_1 KO_2 \sim \triangle MKL \text{ по 2-м пропорц. сторонам и углу между ними}$$

$$\text{Значит, } \angle KO_1 O_2 = \angle KML \Rightarrow LM \parallel O_1 O_2 \parallel AC, \quad M - \text{сер. } BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ML - \text{средняя линия } \triangle ABC \text{ по признаку } \Rightarrow L - \text{сер. } AB$$

$$\left. \begin{array}{l} CL - \text{биссектриса} \\ \text{угла } \angle ACB \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABC - \text{равнобедренный по признаку } (AC = BC)$$

Д.п.: $BH \perp AC$, $H \in AC$, пусть $AH = x$, тогда:

$$HN = 20 - x; \quad \angle MNA = 90^\circ, \text{ т.к. опущен на диам. } AM, \text{ значит,}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$MN \parallel BH$
 M -сер. BC } $\Rightarrow MN$ - средняя линия $\triangle BCH$ по признаку $\Rightarrow$

$$\Rightarrow HN = CN = 20 - x$$

По св-ву ~~к~~ квадратов проекций наклонных: $AB^2 - AH^2 = BC^2 - CH^2$

$$26^2 - x^2 = (40 - x)^2 - (40 - 2x)^2$$

$$676 - x^2 = 1600 - 80x + x^2 - (1600 - 160x + 4x^2)$$

$$676 - x^2 = 1600 - 80x + x^2 - 1600 + 160x - 4x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 80x + 676 = 0$$

$$x^2 - 40x + 338 = 0$$

$$\Delta/4 = 400 - 338 = 62$$

$$x = 20 \pm \sqrt{62}$$

$$AC = BC = 40 - x = 40 - 20 \pm \sqrt{62} = 20 \pm \sqrt{62}$$

Ответ: $20 \pm \sqrt{62}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть первый член арифм. прогрессии равен a_1 , тогда разность d

$$\begin{cases} 6x+18 = a_1 + 4d \\ (x^2-4x)^2 = a_1 + 6d \\ -3x^2 = a_1 + 10d \end{cases}$$

$$d \leq 0$$

~~$$8x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 = 2d$$~~

$$\begin{cases} 6x+18 = a_1 + 4d \\ x^4 - 8x^3 + 16x^2 = a_1 + 6d \\ -3x^2 = a_1 + 10d \end{cases}$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 6x + 18 + 3x^2 = a_1$$

$$2(6x+18 - (x^2-4x)^2) = (x^2-4x)^2 + 3x^2$$

$$2(6x+18) = 3(x^2-4x)^2 + 3x^2$$

$$2(2x+6) = (x^2-4x)^2 + x^2$$

$$4(x+3) = x^4 - 8x^3 + 17x^2$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x^2-4x)^2 + (x^2-4x) - 12 = 0$$

$$x^2-4x = -4; 3$$

$$\begin{cases} x^2-4x+4=0 \\ x^2-4x-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=2 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 2 \pm \sqrt{7}$$

~~$$8x=4; 42=0=-42$$~~

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$238+1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$4x = (\frac{1}{2} - 2)^2$$

$$x = -2$$

$$30 - 16 = 14$$

$$x \geq -3$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 25 \\ \times 24 \\ \hline 100 \\ 50 \\ \hline 600 \end{array}$$

$$8/4 = 4 + 3 = 7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

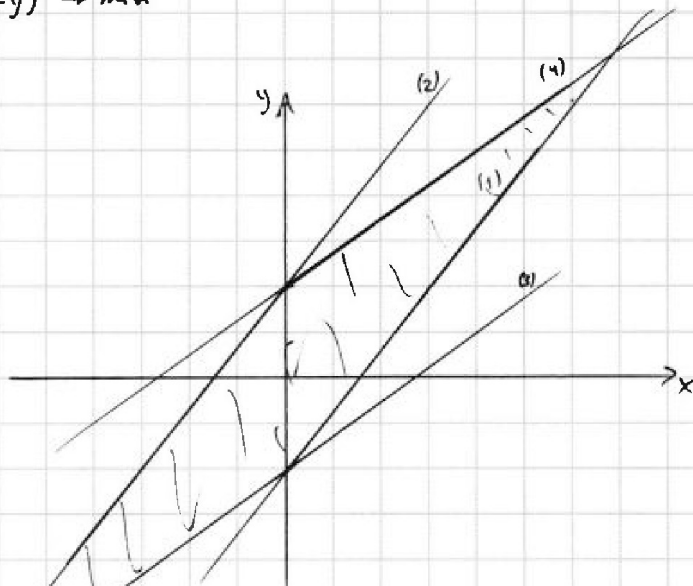
$$14x + 7y \rightarrow \min$$

$$7(2x + y) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y \geq 4x - 6 \\ 3y \leq 4x + 6 \\ 4y \geq 3x - 8 \\ 4y \leq 3x + 8 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3y = 4x + 6 \\ 4y = 3x - 8 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 4 \\ \cdot (-3) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 16x + 24 - 9x + 24 = 0 \\ 7x - 7y = -42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = -48 \\ y = \frac{5}{7}x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{48}{7} \\ y = -\frac{64}{7} + 2 = -\frac{50}{7} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 7y + 14x &= 7x + 14y - 42 \\ 7x - 7y &= -42 \\ x - y &= -6 \end{aligned}$$

$$7y \geq 7x - 14$$

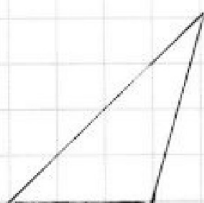
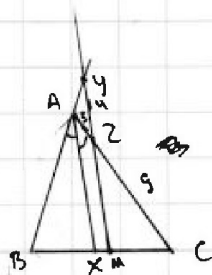
$$7y \leq 7x + 14$$

$$3y \geq 4x - 6$$

$$14x + 28 \geq 14y$$

$$7y + 14x \geq 7x + 14y - 42$$

$$14x + 7y = -\frac{48}{7} \cdot 14 - 7 \cdot \frac{50}{7} = -96 - 50 = -146$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разобьем квадрат на 4 рав-
ных квадрата по 25 углов или 16 кв.

Есть 3 варианта расп. белых кв:

в 1 кв., в соседних и в центр.

$$1) : \cancel{25 \cdot 25 = 625} \quad \frac{24 \cdot 24}{2} + 1 =$$

$$3) \quad 25 \cdot 24 = 600$$

$$= 239$$

$$2) \quad 25 \cdot 25 = 625$$

$$\begin{array}{r} 1225 \\ + 239 \\ \hline 1464 \end{array}$$

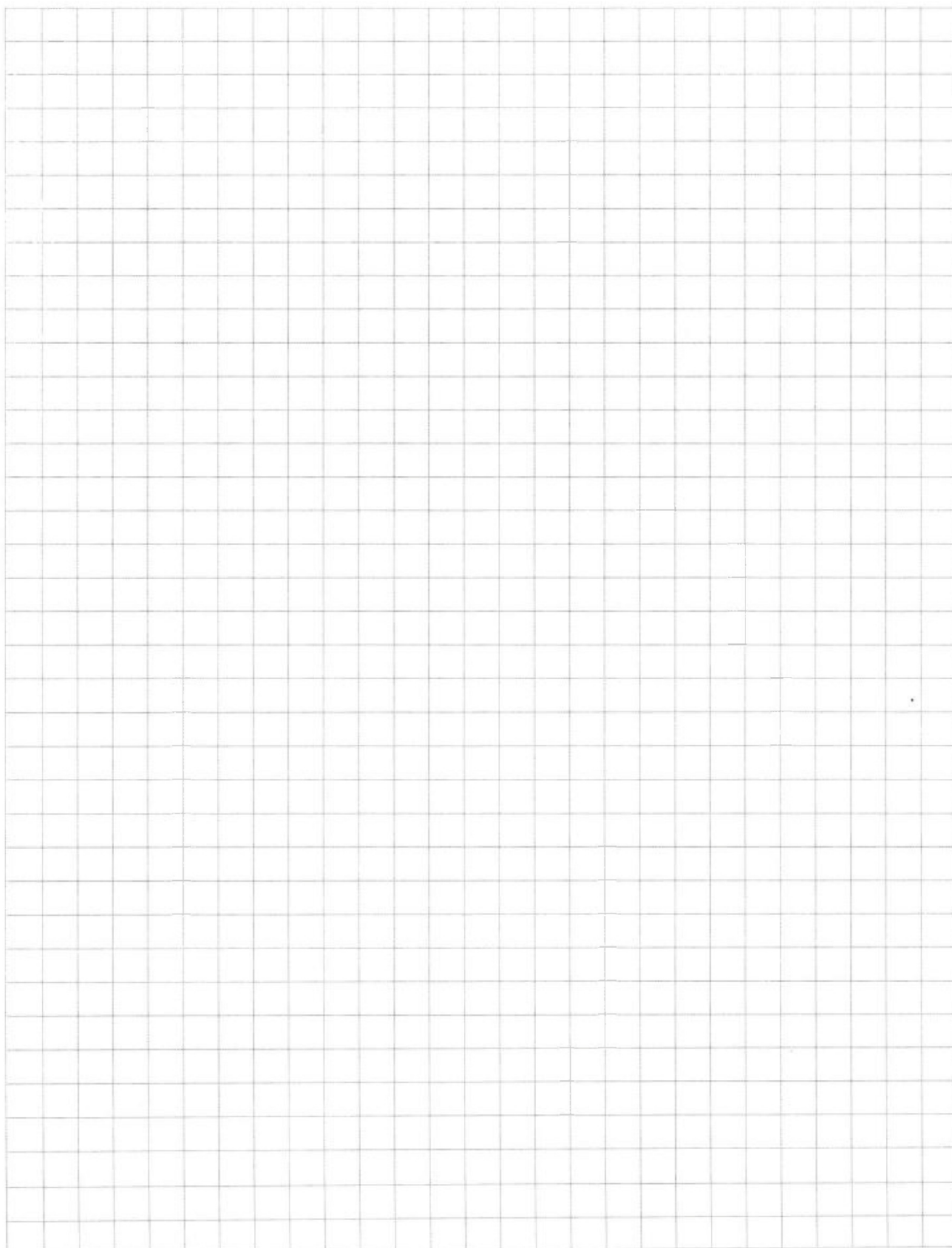


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

24

Решение:

Д.н.: $YK \parallel AC$, ℓ -биссектриса угла A

$YM \parallel \ell$, тогда $\angle(AB; \ell) = \angle AYM$,

$\angle(\ell; AC) = \angle AZY$ как н.п. уг.

$\triangle AYZ$ - $\triangle$ по углу. $\Rightarrow AY = 3$

по т. Менелая для $\triangle ABC$ и
сек: $M-Z-Y$:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{ZY}{BY} = 1$$

$$BY = \frac{1}{1} \cdot \frac{9}{3} \cdot 3 = 9$$

по т. кос-аб в $\triangle AYZ$: $16 = 18 - 2 \cdot 9 \cdot \cos \angle YAZ$

$$\cos \angle YAZ = \frac{2}{2 \cdot 9} = \frac{1}{9}$$

по т. кос-аб в $\triangle ABC$: $BC^2 = 81 + 144 + 2 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9}$

$$BC^2 = 225 + 24 = 249 = 3 \cdot 83$$

Ответ: $\sqrt{249}$

23

$m, n \in \mathbb{N}'$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9); \quad B = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} m-n = 13 \\ m-n+9 = 24 \neq p^2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} m-n+9 = 13 \\ m-n = 4 \\ m-n+3 = 7 \end{cases} \quad \checkmark$$

