



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Пусть первый член a , а разность d . Тогда:

$$\begin{cases} a + 3d = 6 - 9x & (1) \\ a + 5d = (x^2 - 2x)^2 & (2) \\ a + 9d = 9x^2 & (3) \end{cases}$$

$$(2) - (1):$$

$$2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 \quad (3) - (1):$$

$$4d = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 \quad \text{Значит } ((2) - (1)) \cdot 2 =$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12 = -x^4 + 4x^3 + 5x^2 \quad = (3) - (2)$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0 \quad |:3$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0 \quad \text{Заметим, что } x = 1 - \text{корень, т.к.}$$

$$1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0 - \text{верно. Разделим данную функцию на } (x - 1):$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -4 & 1 & 6 & -4 \\ \hline 1 & 1 & -3 & -2 & 4 & 0 \end{array} \quad \text{Тогда:}$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\text{т.к. } 1 - 3 - 2 + 4 = 0 - \text{верно. Разделим:}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -3 & -2 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Ответ: } x \in \{1; 1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases} \quad \sim 2$$

Пусть $3y + 6x = 3M$
 Тогда надо $3M \rightarrow \max$

$y = M - 2x$. Подставим: $M \rightarrow \max$

$$\begin{cases} |5x - 2M| \leq 2 & (1) \\ |4x - M| \leq 1 & (2) \end{cases}$$

Докажем (2) на ~~доказ~~ $\frac{5}{4}$:

~~$|8x + 2M| \leq 2$. При этом~~

~~$|\frac{5}{4} \cdot 4x - \frac{5}{4} \cdot M| \leq \frac{5}{4} \Rightarrow |5x - \frac{5M}{4}| \leq \frac{5}{4}$~~

т.е. ~~$|5x - \frac{5M}{4}| = |\frac{5M}{4} - 5x|$, то:~~

~~$|5x - 2M| \leq 2$~~

~~$|\frac{5M}{4} - 5x| \leq \frac{5}{4} \Rightarrow |4x - M| \leq 1$~~

① при $\begin{cases} 5x - 2M \geq 0 \\ 4x - M \geq 0 \end{cases} : (M \leq \frac{5x}{2})$:

$5x - 2M \leq 2$

$5x - \frac{5M}{4} \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$M \geq \frac{5x - 2}{2}$

$M \geq 4x^2 - 1$

Тогда $M_{\max} = \frac{5x}{2}$. Тогда:

$\frac{5x}{2} \geq 4x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

^{н 2}
Продолж.

$$\text{Тогда } x_{\max} = \frac{2}{3}, M_{\max} = \frac{5 - \frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{3}$$

$$(3M_{\max} = 5)$$

② при $5x - 2M \leq 0$ $M \geq \frac{5x}{2}$

$$\begin{cases} 5x - 2M \geq -2 \\ 5x - \frac{5M}{4} \geq -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \leq \frac{5x}{2} + 1 \\ M \leq 4x + 1 \end{cases}$$
$$4x - M \geq -1$$

Примем по условию, что в ② уже нашли M такой, что $M > 0$. Поэтому имеем также:

~~$\frac{5x}{2} + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{5}$~~

② $\begin{cases} 4x - M \geq 0 \\ 5x - 2M \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x \geq M \\ \frac{2x}{5} \leq M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x < \frac{2x}{5} \end{cases}$

$$M_{\max} = 4x$$

$$5x - 2M \geq -2$$

$$5x - 8x \geq -2 \Rightarrow 3x \leq 2$$
$$x \leq \frac{2}{3}$$

$$x_{\max} = \frac{2}{3}, M_{\max} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3M_{\max} = 5$$

③ $\begin{cases} 4x - M \leq 0 \\ 5x - 2M \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \geq 4x \\ M \geq \frac{5x}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x - M \geq -1 \\ 5x - 2M \geq -2 \end{cases} \Rightarrow M_{\max} = \frac{4x + 1}{2} \text{ или } M_{\max} = \frac{5x}{2} + 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m + 2n)^2 -$$

$$- 7(m + 2n) = (m + 2n)(m + 2n - 7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 8mn = mn(m + 2n + 8)$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} (m + 2n)(m + 2n - 7) = 11p^2 & (1) \\ mn(m + 2n + 8) = 75q^2 & (2) \end{cases}$$

из (1) ~~предположим~~ $m + 2n = kp^2, k \in \mathbb{N}$

Тогда: $kp^2(kp^2 - 7) = 11p^2$

$$k(kp^2 - 7) = 11$$

$\Leftrightarrow$ т.к. $k, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} k = 1 \\ kp^2 - 7 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 11 \\ kp^2 - 7 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p^2 = 18$$

не целое

$$\Leftrightarrow 11p^2 = 8$$

не целое

2) Заметим $m + 2n \equiv 0 \pmod{p}$

$$m + 2n - 7 \equiv 0 \pmod{p}$$

$\downarrow$ вычитаем

$$7 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$p = 7$$

Тогда: заменим $m + 2n = t$

$$t^2 - 7t = 11 \cdot 49$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 7t - 539 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. ② не является полным квадратом
то $t \notin \mathbb{N}$

3). $m + 2n - 7 = kp^2$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$(m + 2n) \cdot kp^2 \equiv \pm p^2$$

$$(kp^2 + 7) \cdot kp^2 \equiv \pm p^2$$

$$(kp^2 + 7) \cdot k \equiv \pm 1$$



$$\begin{cases} k=1 \\ kp^2 + 7 = \pm 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k=11 \\ kp^2 + 7 = \pm 1 \end{cases}$$

$$p^2 + 7 = 11$$

$$[p=2], \text{ ил.}$$

т.к. $kp^2 \geq 1$
то

Теперь второе: $\pi m \geq 50m$
т.к.

$$m + 2n - 7 = 4$$

$$m + 2n = 11$$

Подставим $m + 2n = 11$ во второе ур-е:

$$mn(20) = 75q^2$$

$$mn = 15q^2$$

$$n(N - 2n) = 15q^2$$

т.к. q - простое,
то $q^2 \equiv 0 \pmod{4}$, т.к.

$mn \equiv 0 \pmod{4}$, ил. $q^2 \equiv 4 \pmod{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3
 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 79, 82, 85, 88, 91, 94, 97, 100, 103, 106, 109, 112, 115, 118, 121, 124, 127, 130, 133, 136, 139, 142, 145, 148, 151, 154, 157, 160, 163, 166, 169, 172, 175, 178, 181, 184, 187, 190, 193, 196, 199, 202, 205, 208, 211, 214, 217, 220, 223, 226, 229, 232, 235, 238, 241, 244, 247, 250, 253, 256, 259, 262, 265, 268, 271, 274, 277, 280, 283, 286, 289, 292, 295, 298, 301, 304, 307, 310, 313, 316, 319, 322, 325, 328, 331, 334, 337, 340, 343, 346, 349, 352, 355, 358, 361, 364, 367, 370, 373, 376, 379, 382, 385, 388, 391, 394, 397, 400, 403, 406, 409, 412, 415, 418, 421, 424, 427, 430, 433, 436, 439, 442, 445, 448, 451, 454, 457, 460, 463, 466, 469, 472, 475, 478, 481, 484, 487, 490, 493, 496, 499, 502, 505, 508, 511, 514, 517, 520, 523, 526, 529, 532, 535, 538, 541, 544, 547, 550, 553, 556, 559, 562, 565, 568, 571, 574, 577, 580, 583, 586, 589, 592, 595, 598, 601, 604, 607, 610, 613, 616, 619, 622, 625, 628, 631, 634, 637, 640, 643, 646, 649, 652, 655, 658, 661, 664, 667, 670, 673, 676, 679, 682, 685, 688, 691, 694, 697, 700, 703, 706, 709, 712, 715, 718, 721, 724, 727, 730, 733, 736, 739, 742, 745, 748, 751, 754, 757, 760, 763, 766, 769, 772, 775, 778, 781, 784, 787, 790, 793, 796, 799, 802, 805, 808, 811, 814, 817, 820, 823, 826, 829, 832, 835, 838, 841, 844, 847, 850, 853, 856, 859, 862, 865, 868, 871, 874, 877, 880, 883, 886, 889, 892, 895, 898, 901, 904, 907, 910, 913, 916, 919, 922, 925, 928, 931, 934, 937, 940, 943, 946, 949, 952, 955, 958, 961, 964, 967, 970, 973, 976, 979, 982, 985, 988, 991, 994, 997, 1000

Значит $q^2 : 4 \Leftrightarrow q = 2$
 q - простое

Тогда: $\begin{cases} m + 2n = 11 \\ mn = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2n = 11 \\ mn = 15 \end{cases}$

тогда $m + 2n = 11$, $m \leq 11$
 $n \leq 5$

Тогда $mn = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 3 \end{cases}$ (больше)

2) $(m + 2n) \cdot (m + 2n - 7) = 75q^2$
 $(m + 2n + 3) \cdot mn = 11p^2$

1) $m + 2n = k \cdot q^2$
 $kq^2(kq^2 - 7) = 75q^2$

$k(kq^2 - 7) = 75 = 5^2 \cdot 3$

$\begin{cases} k = 1 \\ kq^2 - 7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow q^2 = 82 \text{ не цел}$
 $\begin{cases} k = 3 \\ kq^2 - 7 = 25 \end{cases}$

$q^2 = \frac{32}{3} \text{ не цел}$

$\begin{cases} k = 5 \\ kq^2 - 7 = 15 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \frac{22}{5} \text{ не цел}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3
Продолжить

$$\begin{cases} k = 15 \\ kq^2 - 7 = 5 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \frac{12}{15} \text{ не целое}$$

$$\begin{cases} k = 25 \\ kq^2 - 7 = 3 \end{cases} \text{ не целое} \quad \begin{cases} k = 75 \\ kq^2 - 7 = 1 \end{cases} \text{ не целое}$$

~~Положим $(m, n) = 200 \cdot 75q^2$.~~

$$2). m + 2n \equiv 0 \pmod{q}$$

$$m + 2n - 7 \equiv 0 \pmod{q}$$

$$\Downarrow$$

$$7 \equiv 0 \pmod{q} \quad q = 7$$

Заменим $m + 2n = 7$

$$t^2 - 7t = 75 \cdot 7^2$$

$$D = 7^2 + 4 \cdot 75 \cdot 7^2 = 7^2(1 + 300)$$

$$3). m + 2n - 7 = kq^2, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{не полный квадрат}$$

$$kq^2(kq^2 + 7) = 75q^2$$

$$k(kq^2 + 7) = 75 = 5^2 \cdot 3$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} k = 1 \\ kq^2 + 7 = 75 \end{cases}$$

$$q^2 = 68$$

не целое

$$\begin{cases} k = 3 \\ kq^2 + 7 = 25 \end{cases}$$

$$q^2 = 6$$

$$\begin{cases} k = 5 \\ kq^2 + 7 = 15 \end{cases}$$

$$q^2 = \frac{8}{5}$$

не целое



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нз

Продолж.

Далее рас-н не нужно, тем.

$$kq^2 + 7 \geq 1, \text{ т.е. } q \geq 2$$

$$k \geq 5$$

Значит таких (m, n) , то $A = 75q^2$
нет.

Ответ: $m = 5; n = 3$

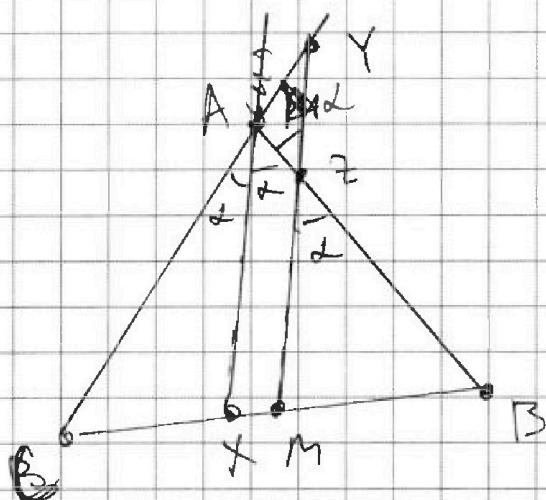


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$AZ = 3$$

$$AC = 6$$

$$YZ = 4$$

Найти:

BC

Р-е

Пусть $\angle = \alpha$, угол между биссектрисой AX и AC
и по условию $YM \parallel AX \Rightarrow \angle AYZ = \alpha$

$$\angle MZB = \alpha$$

Тогда $\angle AZY = \alpha$ (верт.) $\Rightarrow \triangle AYZ$ - р.с

$AY = AZ = 3$. Тогда по т. косинусов в

$$\triangle AYZ: 3^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$\cos \alpha = \frac{2}{3}$. По т. Менелая для $\triangle CYM$
и сеч AB:

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{4}{YM} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow YM = 4. \text{ По т. Менелая}$$

для $\triangle ABC$ и сеч YM:

$$1 \cdot \frac{BZ}{3} \cdot \frac{3}{9} = 1 \Rightarrow BZ = 9. \text{ Значит по}$$

т. косинусов для $\triangle BZM$:

$$MB^2 = 4^2 + 9^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \cos \alpha = 16 + 81 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4

Продолж.

$$MB^2 = 16 + 81 - 2 \cdot 8 = 97 - 16 = 81$$

$$MB = 9 \Rightarrow BC = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} \\ x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y} \end{cases}$$

Введём функцию $f(t) = t^3 + 3t + \sqrt{2t}$.

При этом $t \geq 0$. Заметим, что каждая из функций монотонно возрастает, т.е. t^3 монотонно возрастает, $3t$ монотонно возрастает, $\sqrt{2t}$ монотонно возрастает. Значит имеем:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y. \text{ Тогда:}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} \quad x \geq 0$$

$$14 + 5x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 \leq 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 14 = 25 + 56 = 81$$

$$x_1 = \frac{5+9}{2} = 7 \Rightarrow x \in [0; 7]$$

$$x_2 = \frac{5-9}{2} = -2 \quad \text{Тогда:}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

Введём замену: $\sqrt{x+2} = \alpha$

$$\sqrt{7-x} = \beta$$

$$\alpha - \beta + 7 = 2\alpha\beta$$

$$\beta(2\alpha + \beta) = \alpha + 7 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + 7}{2\alpha + 1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5

Продолж.

$$\sqrt{x+2} = a; \sqrt{2-x} = b:$$

$$a - b + 7 = 2ab \Rightarrow b = \frac{a+7}{2a+1}$$

$$a + 7 = b \cdot (2a + 1)$$

$$a^2(4b^2 - 1) + 49 - b^2 = a^2(4b^2 - 1) + 49 - b^2$$

$$a^2(4b^2 - 1) + 49 - b^2 = a^2(4b^2 - 1) + 49 - b^2$$

$$a - b = 2ab - 7$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 28ab + 49$$

$$a^2(4b^2 - 1) - 26ab + 49 - b^2 = 0$$

$$26ab = (x+2)(6-x) + 42 + x$$

$$26ab = -x^2 + 9x + 54$$

$$26^2 \cdot (x+2)(6-x) = (-x^2 + 9x + 54)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



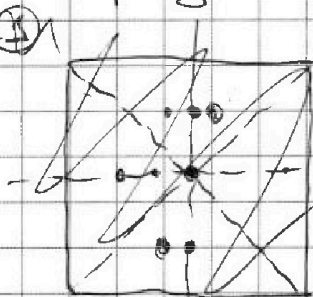
СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если бы условие поворота не было, то вер. C_{121}^2 . Рас-м как можно повернуть один способ раскраски.

①



как указ. при повороте раскраски поворачиваются положения вершин

②



Все точки симметрич. через центр будут давать две раскраски при повороте (которые раньше считались за одну)

Точки не симм. через центр — 4 раскрас.

Выберем одну точку: 121 вер. —

симметричная ей — 1 вер. 3 точки

$$\begin{array}{r} C_{121}^2 - 120 \\ \hline 24 \end{array} + \frac{120}{2} = \text{Ответ.}$$

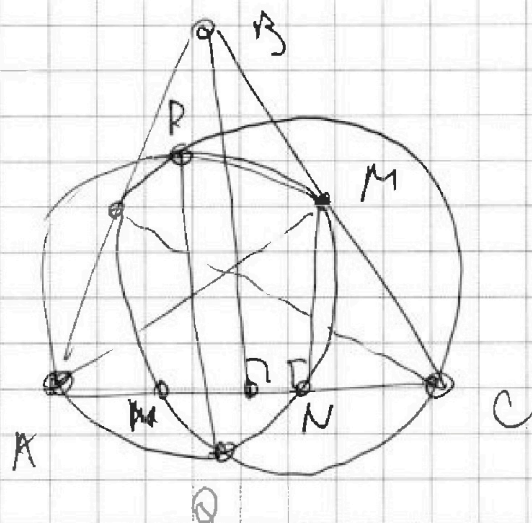


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$MN \parallel PQ$, т.к.
 $\angle ANM = 90^\circ$
 $\Downarrow$
 $PMNQ$ - р/б трап



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☒3
☒4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит: $\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1}$ $2 = \frac{\sqrt{5+7}}{2\sqrt{5} + 1}$

$\sqrt{7-x} \cdot (2\sqrt{x+2} + 1) = \sqrt{x+2} + 7$ $\sqrt{5+7} = \sqrt{5+7}$
 $3\sqrt{5} = \sqrt{5}$

т.к. обе части ≥ 0 , то $\Leftrightarrow$ заменим

$(7-x)(2\sqrt{x+2} + 1) = \sqrt{x+2} + 7$ $\sqrt{x+2} = \alpha$
 $\sqrt{7-x} = \beta$

$\beta(2\alpha + 1) = \alpha + 7$ $| \cdot 12$ $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{6+7}}{2\sqrt{6} + 1}$

$\beta^2(4\alpha^2 + 2\alpha + 1) = \alpha^2 + 14\alpha + 49$

$\alpha^2(4\beta^2 - 1) + \alpha(4\beta^2 - 14) + \beta^2 - 49 = 0$

$(x+2)(4(7-x) - 1) + \sqrt{x+2}(4(7-x) - 14) + 7 - x - 49 = 0$ $2\sqrt{18} + \sqrt{3} = \sqrt{6+7}$

$\sqrt{7-x}$ т.к. обе части ≥ 0 , то $\Leftrightarrow$ $4 \cdot 18 + 3 + 4\sqrt{18 \cdot 3} =$

$(7-x)(4(x+2) + 4\sqrt{x+2} + 1) = 4x + 28 + 4\sqrt{x+2} + 14\sqrt{x+2}$ $75 \neq 12\sqrt{6} = 55 + 14\sqrt{6}$

$28(x+2) + 28\sqrt{x+2} + 7 - x(4(x+2) + 4\sqrt{x+2} + 1) =$
 $= x + 51 + 14\sqrt{x+2}$ $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{7+7}}{2\sqrt{7} + 1}$

$28 - 12 + 28x + 14\sqrt{x+2} = x(4(x+2) + 4\sqrt{x+2} + 1)$ $2\sqrt{14} + \sqrt{2} = \sqrt{7+7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

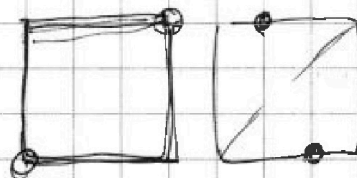
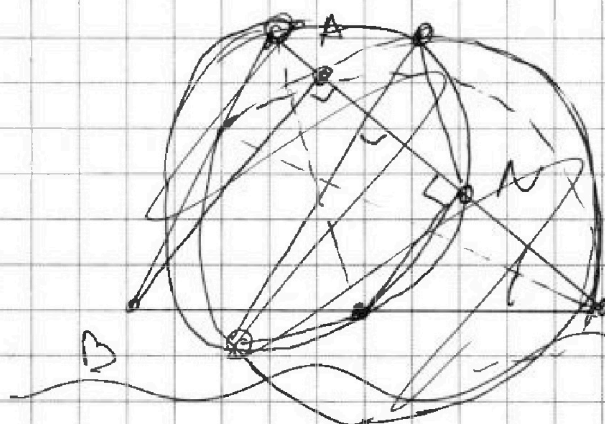
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)}$$

$$x+2 + 49 + 14\sqrt{x+2} = 4(x+2)(7-x) +$$

$$+ 4(7-x)\sqrt{x+2} + 7-x$$

$$x+51 + 14\sqrt{x+2} = 4(14 + 5x - x^2) +$$

$$+ 4(7-x)\sqrt{x+2} + 7-x$$

$$2x + 12 + 14\sqrt{x+2} = 20x - 4x^2 + 4(7-x)\sqrt{x+2}$$

$$4x^2 + 18x$$

$$4x^2 + 18x + \sqrt{x+2} \cdot (x-14) + 12 = 0$$

$$2x^2 + 9x + 6$$

$$D = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 81 - 48$$

$$x^2 + 13x + 42$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5 Продолж.

$$-12 + 27x + 14\sqrt{x+2} = 4x^2 + 8x + 4\sqrt{x+2} + x$$

$18x$

$$-6 + 9x + 7\sqrt{x+2} = 2x^2 + 2x \cdot \sqrt{x+2}$$

$$x=2 \quad -6+18+14=8+14$$

Т.е. при $x \geq 0$ правая функция строго возрастает и левая функция строго возрастает, то попробуем корни: $x=2$:

$$-6 + 18 + 7 \cdot 2 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \text{ верно}$$

Ответ: $x=2; y=2$

$$\sqrt{7-x} (2\sqrt{x+2} + 1) = \sqrt{x+2} + 7$$

$$\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1}$$

$$x=1$$

$$x=0$$

$$\sqrt{7} = \frac{\sqrt{4+7}}{\sqrt{2+1}}$$

$$\sqrt{7} + \sqrt{7} = \sqrt{2} + 7$$

$$\sqrt{7}(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 7$$

$$4\sqrt{7} + 7 + 2\sqrt{14} \cdot 7 = 2 + 49 + 2$$

$$\sqrt{6} = \frac{\sqrt{3+7}}{2\sqrt{3+1}}$$

$$2\sqrt{18} + \sqrt{6} = \sqrt{3} + 7$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x - 2M \geq -2 \\ 4x - M \geq -1 \end{cases}$$

$$M \leq \frac{5x}{2} + 1$$

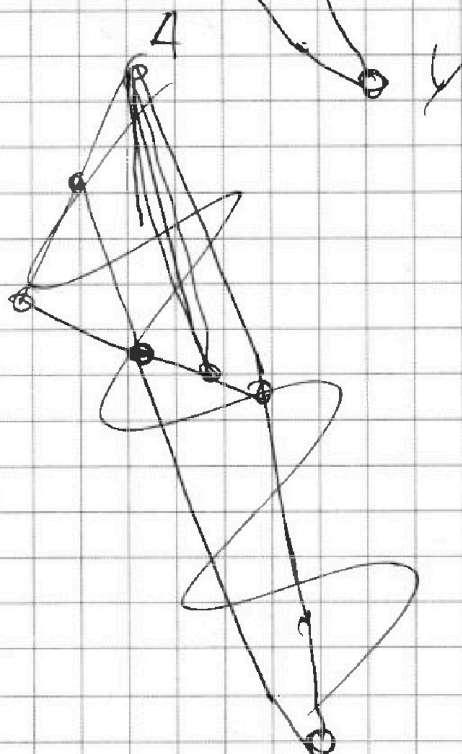
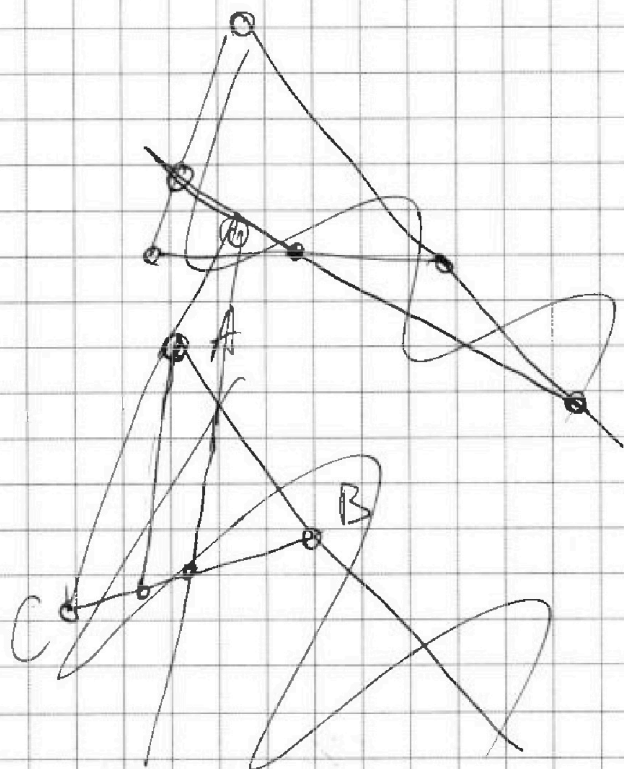
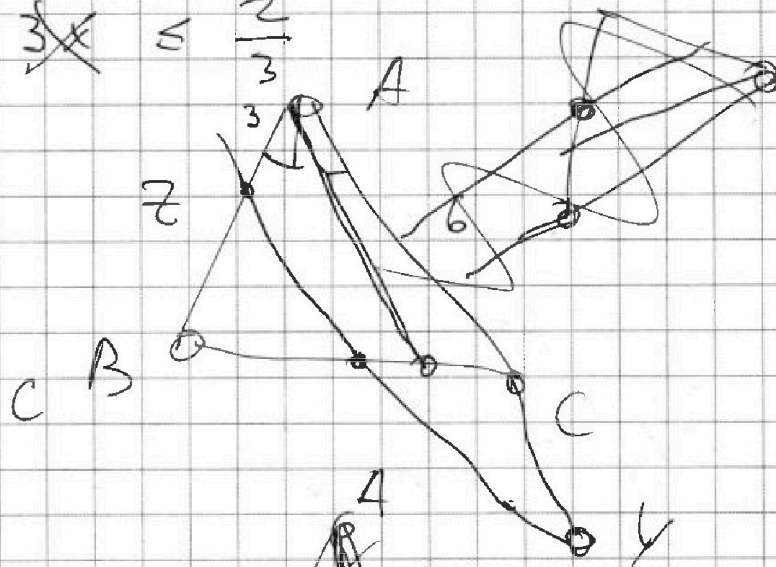
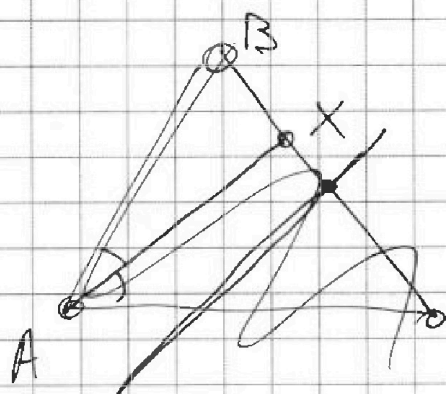
$$M \leq 4x + 1$$

$$5x - 8x + 2 \geq -2 \quad M_{\max} = 4x + 1$$

$$\frac{5x}{2} + 1 \geq 4x \quad | \cdot 2$$

$$M_{\max} = \frac{5x}{2} + 1$$

$$\frac{5x}{2} \leq \frac{2}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
5 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подготовим все из ^{н2} точек:

$$\begin{cases} 4x + 1 \geq \frac{5x}{2} \\ \frac{5x}{2} + 1 \geq 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\max} = \frac{2}{3} \\ 3x_{\max} = 5 \end{cases}$$

Ответ: 5

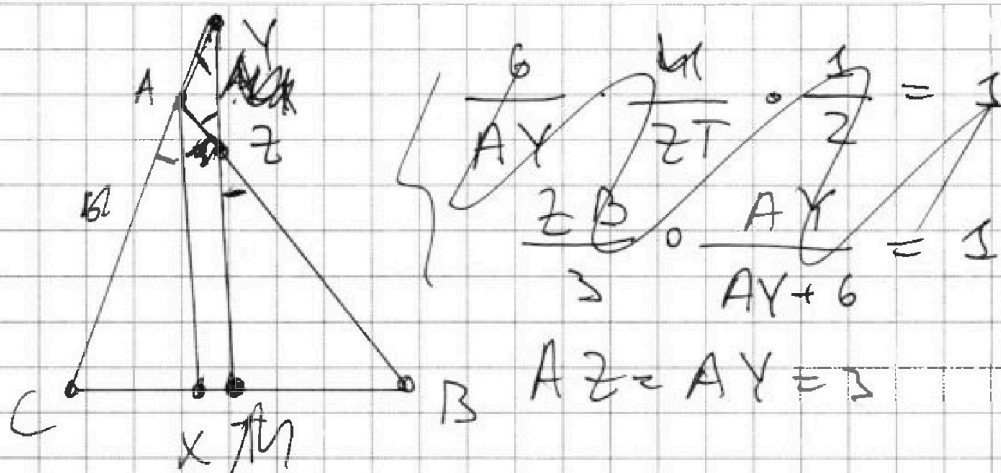


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AZ = AY = 3$$

$$2 + \sqrt{5} + 7 = 2\sqrt{20}$$
$$2 + \sqrt{5} + 7 = 4\sqrt{5} = 2 \cdot 5\sqrt{5} = 10$$

$$\sqrt{5} - 2 + 7 = 2 \cdot 2\sqrt{5}$$
$$x = 6$$

$$2\sqrt{2} - 1 + 7 = 2 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$2 - 1 + 7 = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4$$

$$\beta = \frac{2 + 7}{2}$$

$$\sqrt{7-x} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{\sqrt{x+2} + 7}$$

$$2\sqrt{x+2} + 1$$

$$7-x = \frac{x+2+49+14\sqrt{x+2}}{4x+8+1+4\sqrt{x+2}}$$



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

$$x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$$

$$x=y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2$$

$$\sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{x+2} = 0$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{5x + (2-y)(2+y)}$$

$$2x^2 + 3 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{x^3 + 3x + \sqrt{2x}}{x \geq 0}$$

$$1, 3, 5 \oplus \frac{2}{\sqrt{2x}} + 3 + \frac{1}{\sqrt{2x}} \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$3y + 6x \rightarrow \max$$

$$f(a, b) = a - 2b$$

$$\begin{cases} |y - 2x| \leq 2 \\ |x - 2y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |f(y, x)| \leq 2 \\ |f(x, y)| \leq 1 \end{cases}$$

$$3y + 6x = 3M$$

$$y = M - 2x$$

$$y = f(M, x)$$

$$|x| \leq 3$$

$$M \geq 0$$

$$x \in [-3; 3]$$

$$\begin{cases} |5x - M| \leq 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим каждую из корней:

$x = 1$. Тогда: $a_n = -3$

$a_6 = 1$

$a_{30} = 9$

верно

$kp^2(kp^2 - 2) =$

$= 11 \cdot 3$

$x = 1 + \sqrt{5}$

Отсюда: $x = 1; 1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}$

$t = m + 2n$

$A = t(t - 7); B = mn(\frac{1}{2} + 16)$

$t(t - 7) = 11p^2$

$75 = 25 \cdot 3 =$

$= 5^2 \cdot 3$

$t(t - 7) = 11p^2$

$mn(t + 16) = 75q^2$

$t \equiv 0 \pmod{11}$

$t \equiv 7 \pmod{11}$

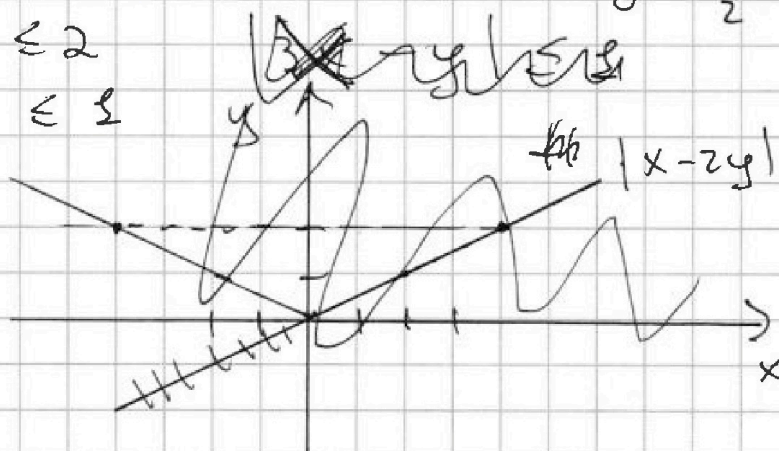
$t \equiv 0 \pmod{p^2}$

$t \equiv$

$y = \frac{x}{2}$

$|x - 2y| \leq 2$

$|2x - y| \leq 1$





1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

$$\begin{cases} a+3d=6-9x \\ a+5d=(x^2-2x)^2 \\ a+9d=9x^2 \end{cases}$$

$$2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x$$

$$4d = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12 = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$3y+6x \Rightarrow M \rightarrow \max$$

$$3y+6x=3M$$

$$y=M-2x$$

$$\begin{cases} |x-2M+4x| \leq 2 \\ |2x-M+2x| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |5x-2M| \leq 2 \\ |4x-M| \leq 1 \end{cases}$$

$$3 \geq |5x-2M| + |4x-M| \geq |9x-3M|$$

$$\left| \frac{3M}{4} \right| \leq \frac{13}{4}$$

$$|M| \leq \frac{13}{3}$$

$$\begin{cases} 5x-2M \leq 2 \\ 5x-2M \geq -2 \\ 4x-M \leq 1 \\ 4x-M \geq -1 \end{cases}$$



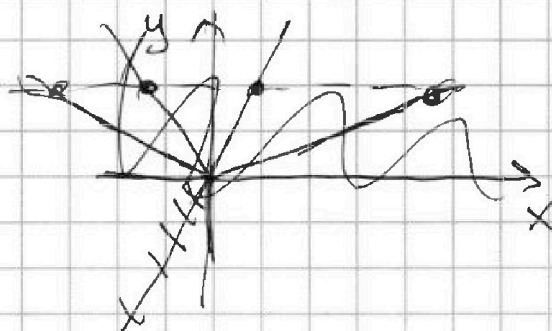
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$



$$y = \frac{2}{5}x$$

$$3y + 6x = 3M$$

$$y = M - 2x$$

$$\begin{cases} |5x - 2M| \leq 2 \\ |4x - M| \leq 1 \end{cases}$$

$$M \leq \frac{5x}{2}$$

$$x \geq \frac{2M}{5}$$

$$\begin{cases} 5/x - 2M \leq 2 \\ 4x - M \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2M + 2 \geq 5x \\ M + 1 \geq 4x \end{cases}$$

$$|9x - 3M| \leq 3$$

$$|3x - M| \leq 3$$

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n =$$

$$= (m + 2n)^2 - 7(m + 2n) = (m + 2n) \cdot$$

$$(m + 2n - 7)$$

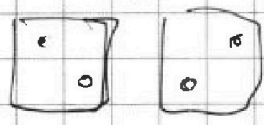
$$m + 2n = x$$

$$m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m + 2n + 9)$$

$$A = x(x-7); \quad B = mn(x+16)$$

$$x = 1, (-3)$$

$$9, 7, 3)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{x+2} \sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1}$~~ Заметим, что $\sqrt{7-x}$ убывает. $\frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1}$ тоже убывает
 $\downarrow$
одно переменное. Попробуем переобратить $x=5$

~~$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{7+2}}{2\sqrt{7+2}+1}$~~ $\sqrt{7+2} = 2\sqrt{7+2} + 1$
 $7+2 = 4\sqrt{7+2} + 1$
 $7+2 = 4\sqrt{7+2} + 1$
 $\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1} \cdot \frac{(\sqrt{x+2} - 7)}{(\sqrt{x+2} - 7)} =$
 $= \frac{x+2-49}{(2\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}-7)} = \frac{x-47}{2x+4-12\sqrt{x+2}-7}$
Заметим $x+2 = \alpha$; $\sqrt{7-x} = \beta$:

~~$\alpha - \beta + 7 = 2\alpha\beta$~~ т.е. одно переменное α
 $\alpha = 5$
 $\beta = \sqrt{7-x}$