МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8

1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x+18$, седьмой член равен $(x^2-4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x+7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x-3y| \leqslant 6, \\ |3x-4y| \leqslant 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задание 1

Пусть d - разность м/у соседними членами арифм. прогрессии

Тогда

$$\begin{cases} 6x+18+2d=(x^2-4x)^2 \quad (1) \\ 6x+18+6d=-3x^2 \quad (2) \\ (x^2-4x)^2+4d=-3x^2 \quad (3) \end{cases}$$

(1): $6x+18+2d = x^4-8x^3+16x^2$

$2d = x^4-8x^3+16x^2-6x-18$

(1) → (3)

$(x^2-4x)^2+2x^4-16x^3+32x^2-12x-36=-3x^2$

$x^4-8x^3+16x^2+2x^4-16x^3+32x^2-12x-36+3x^2=0$

$3x^4-24x^3+51x^2-12x-36=0 \quad \Big| :3$

$x^4-8x^3+17x^2-4x-12=0$

По т. Безу $x=2$ - корень.

$$\begin{array}{l|l} x^4-8x^3+17x^2-4x-12 & x-2 \\ \hline x^4-2x^3 & x^3-6x^2+5x+6 \\ \quad -6x^3+17x^2 & \\ \quad -6x^3+12x^2 & \\ \qquad 5x^2-4x & \\ \qquad 5x^2-10x & \\ \qquad\quad 6x-12 & \\ \qquad\quad 6x-12 & \end{array}$$

$x^3-6x^2+5x+6=0$

по теореме Безу $x=2$ - корень

$$\begin{array}{l|l} x^3-6x^2+5x+6 & x-2 \\ \hline x^3-2x^2 & x^2-4x-3 \\ \quad -4x^2+5x & \\ \quad -4x^2+8x & \\ \qquad -3x+6 & \\ \qquad -3x+6 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
X						

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - 4x - 3 = 0$

$D = 16 + 12 = 28$

$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = \boxed{2+\sqrt{7}}$

$x_2 = \boxed{2-\sqrt{7}}$

Проверим:

$x=2$ V – 30

VII $(4-3)^2 = 16$

~~VIII~~ XI = -12 ✓

$x = 2 \pm \sqrt{7}$

$a_5 = 30 \pm 6\sqrt{7}$

$a_7 = 9$ a_{11} $-33 \pm 12\sqrt{7}$ ✓

Ответ: $x_1 = 2+\sqrt{7}$, $x_2 = 2-\sqrt{7}$, $x_3 = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задание 2

$$\begin{cases} |4x-3y| \le 6 \\ |3x-4y| \le 8 \end{cases}$$

Заметим, что $4x-3y \in [-6;6]$

$3x-4y \in [-8;8]$

Также заметим

аналогично следует

$4x-3y-3x+4y = x+y \in [-14;14]$

т.к. нижняя граница $-6-8=-14$ (т.е. наименьшее значение min)

верхняя граница $=6+8=14$. (т.е. max)

Тогда

$4x-3y+3(x+y) = 7x \in [-48;48] \Rightarrow 14x \in [-96;96]$

$3x-4y-3(x+y) = -7y \in [-50;50] \Rightarrow 7y \in [-50;50]$

т.к. просто поменяли знак, а модуль не изменился.

Тогда $14x+7y \in [-146;146]$.

т.е. наименьшее значение $=-146$

достигается при $x = -\frac{48}{7} = -6\frac{6}{7}$

$y = -\frac{50}{7} = -7\frac{1}{7}$

Проверим

1) $\left|-\frac{4\cdot 48}{7} + \frac{150}{7}\right| \le 6$

$\left|-\frac{192}{7} + \frac{150}{7}\right| \le \frac{42}{7}$ ✓

2) $\left|-\frac{3\cdot 48}{7} + \frac{200}{7}\right| \le \frac{56}{7}$

$\left|-\frac{144}{7} + \frac{200}{7}\right| \le \frac{56}{7}$ ✓

Ответ: -146

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задание 3

Заметим, что:

$A=(m-n)^2+9(m-n)=(m-n)(m-n+9)$

$B=mn(m-n+3)$

Рассмотрим 2 случая

I $A=13p^2$, $B=3q^2$

II $A=3q^2$, $B=13p^2$

I:

$(m-n)(m-n+9)=13p^2$

Заметим, что $m-n$ и $m-n+9$ – разной четности

Докажем: $\blacktriangleleft$ n $\quad n+9=2$, $n=4$

2 $\quad 2+4=6$ $\blacktriangleright$

Значит: $(m-n)(m-n+9)\vdots 2 \Rightarrow 13p^2\vdots 2$, единственное четное простое это 2 $\Rightarrow 13p^2=13\cdot 4=52$

$52=2\cdot 26=4\cdot 13=1\cdot 52$

Один из делителей больше второго на 9, подходит пара $(4;13)$ $\Rightarrow m-n=4$, $m-n+9=13$

Тогда $B=7mn=3q^2 \Rightarrow$ т.к. $7\nmid 3$ и $3q^2\vdots 7 \Rightarrow q\vdots 7$, значит $q=7 \Rightarrow B=3\cdot 49=147 \Rightarrow mn=\frac{147}{7}=21$

Б $\begin{cases} mn=21 \\ m-n=4 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$m = 4 + n$

$(4+n) \cdot n = 21$

$n^2 + 4n - 21 = 0$

$D = 16 + 84 = 100$

$n_1 = \frac{-4+10}{2} = 3$

$n_2 = -7$ – неуд т.к. только натуральные.

$n = 3 \quad m = 7$

$A = 52 \quad B = 147$

②: $A = 3q^2$

$B = 13p^2$

$(m-n)(m-n+9) = 3q^2$

Аналогично $3q^2 \vdots 2 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow 3q^2 = 12$

$(m-n)(m-n+9) = 12$

$m - n = t$.

$t^2 + 9t - 12 = 0$

$D = 81 + 48 = 129$ ~~дискр~~, корень из дискриминанта ~~не выделяется~~ иррациональн $\Rightarrow$ т.к q - целое, то корни будут иррациональными (целое + иррац = иррац) $\Rightarrow$ ~~нет~~ m и n иррационально - противоречие, т.к. натурально - натурально = натурально.

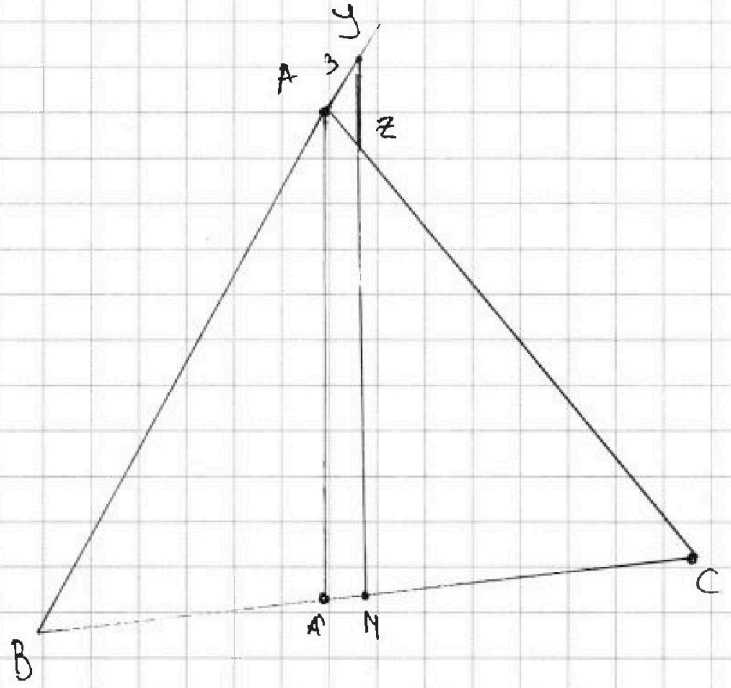
Ответ: $m = 7$, $n = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Решение: Пусть $\angle BAC = 2\alpha \Rightarrow \angle A'AZ = \alpha = \angle AZY$ (как накрест лежащие). $\angle YAZ = 180 - 2\alpha$, $\angle AZY = \alpha$ (сумма углов в $\Delta = 180$) Значит $\angle AYZ = \alpha \Rightarrow \Delta AYZ$ - равнобедренный $\Rightarrow AY = AZ = 3$. Найдем $\cos(180-2\alpha)$ по теореме косинусов для ΔAYZ

$16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos(180 - 2\alpha)$

$16 = 18 - 18 \cdot \cos(180 - 2\alpha)$

$\cos(180 - 2\alpha) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

Воспользуемся теоремой для пропорциональных отрезков (теорема Фалеса обобщенная)

$$\frac{AZ}{ZC} = \frac{A'M}{MC} = \frac{AZ}{AC - AZ} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $MC=3x$, $AM=x \Rightarrow BM=MC=3x$, $BA'=2x$.

Тогда

$$\frac{BA'}{BM}=\frac{BA}{BA+AM}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{BA}{BA+3}=\frac{2}{3}$$

$BA=6$.

Воспользуемся теоремой косинусов в $\triangle ABC$

$BC^2=144+36-2\cdot12\cdot6\cdot\cos(2\alpha)$ (Заметим, что $\cos(180-2\alpha)=-\cos2\alpha$ $\Rightarrow \cos2\alpha=-\cos(180-2\alpha)$)

$BC^2=180+144\cdot\frac{1}{9}$

$BC^2=180+16$

$BC^2=196$

$BC=14$

Ответ: $BC=14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задание 5

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} & (1) \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y & (2) \end{cases}$$

ОДЗ

$y \in [0;5]$

$x \in [0;30]$ — если $x > 30$, то ~~корень~~ подкоренное < 0

Запишем (2) по-другому

$4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + 5\sqrt[4]{y} + y$

Предположим $x \neq y$, пусть $x > y$ (безограничений общности)

тогда $4x^4 > 4y^4$, $x > y$, $\sqrt[4]{x} > \sqrt[4]{y}$ => ~~если~~ не равно. Значит

$x = y$.

Тогда (1) ур-ие запишется так:

$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$

$$\begin{cases} a = \sqrt{x+6} \\ b = \sqrt{5-x} \end{cases}$$

$a - b + 5 = 2ab$

$a - b = 2ab - 5 \quad | \wedge 2$

$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 20ab + 25$

$a^2 + 12ab + b^2 = 4a^2b^2 + 25$

Заметим ~~ab~~ - восстановим

$x - 6 + 12ab + 5 - x = 4a^2b^2 + 25$

$12ab + 11 = 4a^2b^2 + 25$

Пусть $q = ab$

~~$12q + 1 = 4q^2 + 25$~~ $12q + 11 = 4q^2 + 25$

$4q^2 - 12q + 14 = 0$

~~$4q^2 - 12q + 26 = 0$~~ $2q^2 - 9q + 7 = 0$

~~$2q^2 - 9q + 13 = 0$~~ $D = 81 - 56 = 25$

~~$D = 81 -$~~

$q_1 = \frac{9+5}{4} = 3{,}5$

$q_2 = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab = 1 \quad (1) \\ ab = \frac{7}{2} \quad (2) \end{cases}$$

(1): $\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{(5-x)} = 1$

$(x+6)(5-x) = 1$

$5x - x^2 + 30 - 6x = 1$

$-x^2 - x + 30 = 1$

$x^2 + x - 29 = 0$

$D = 1 + 29 \cdot 4 = 1 + 116 = 117 \left((3\sqrt{13})^2\right)$

$x_1 = \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$

$x_2 = \frac{-1 - 3\sqrt{13}}{2}$ – неуд т.к $x \geq 0$

$\frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2} \vee 5$

$-1 + 3\sqrt{13} \vee 10$

$11 \vee 3\sqrt{13}$

$121 \vee 117 \Rightarrow \frac{3\sqrt{13} - 1}{2}$ входит в ОДЗ

(2): $\sqrt{-x^2 - x + 30} = \frac{7}{2}$

$-x^2 - x + 30 = 12\frac{1}{4} \quad | \cdot 4$

$-4x^2 - 4x + 120 = 49$

$-4x^2 - 4x + 71 = 0$

$4x^2 + 4x - 71 = 0$

$D = 16 + 16 \cdot 71 = 16 \cdot 72 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 8 \left((24\sqrt{2})^2\right)$

$x_1 = \frac{4 + 24\sqrt{2}}{8}$ $\quad x_2 = \frac{4 - 24\sqrt{2}}{8}$ – неуд $x \geq 0$

$\overbrace{\underbrace{3\sqrt{2}}_{\approx 1{,}42} + \frac{1}{2}}^{\approx 4{,}76} \vee 5$

$3\sqrt{2} \approx 4{,}26$ входит в ОДЗ

Ответ: $\left(\frac{3\sqrt{2}+1}{2}; \frac{3\sqrt{2}+1}{2}\right)$

$\left(\frac{3 \cdot \sqrt{3} - 1}{2}; \frac{3\sqrt{13} - 1}{2}\right)$

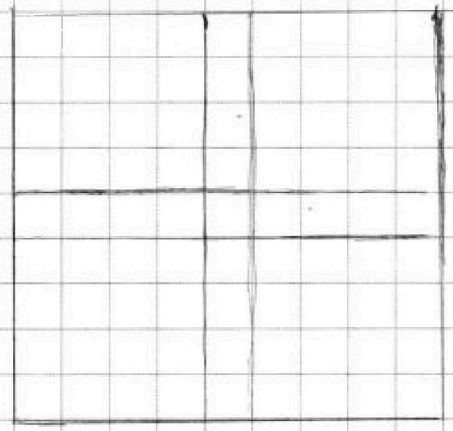
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задание 6



Заметим, что всего узлов - 100

Также заметим, что повернуть пару узлов мы можем 4 раза ~~дости-~~ на 5 раз вернемся в исходное положение. Значит всего пар 99·100, на каждую можем повторить 4 раза => 99·25 = 2475

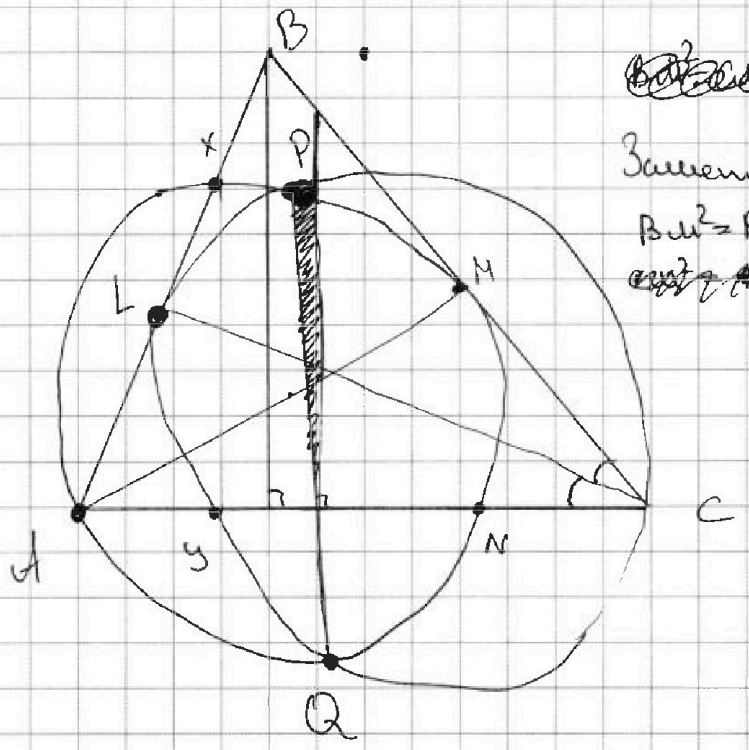
~~Повторение = отрицание~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что

$BM^2 = Bx \cdot AB$

$CM^2 = CQ \cdot CN$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [x] 5 [x] 6 [x] 7 [x]

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$6x+18+2d = x^4-8x^3+16x^2$

$6x+18+6d = -3x^2$

$4d = x^4-8x^3+16x^2-(-3x^2)$

$4d = x^4-8x^3+19x^2$

$6x+18 + \frac{x^4-8x^3+19x^2}{2} = x^4-8x^3+16x^2$

$12x+36 + x^4-8x^3+19x^2 = 2x^4-16x^3+32x^2$

$12x+36 = x^4-8x^3+13x^2$

$x^4-8x^3+13x^2-12x-36=0$

$(x^2-4x)^2-(x-6)^2-2x^2=0$

$6x+18+2d=(x^2-4x)^2$

$6x+18+6d=(-3x^2)$

$(x^2-4x)^2+4d=-3x^2$

$6x+18+2d = x^4-8x^3+16x^2$

$2d = x^4-8x^3+16x^2-6x-18$

$(x^2-4x)^2+2x^4-16x^3+32x^2-12x-36=-3x^2$

$x^4-16x^3+16x^2+2x^4-16x^3+32x^2-12x-36+3x^2=0$

$3x^4-24x^3+51x^2-12x-36=0$

$x^4-8x^3+17x^2-4x-12=0$

$5 \to +4d$

$11 \to +10d$

$12+6\sqrt{7}+18 = 30+6\sqrt{7}$

$(2+\sqrt{7})^2 = 8+4\sqrt{7}$

$4+4\sqrt{7}+7-8-4\sqrt{7} =$

$11-8=3$

$2d = 27-(-27-6\sqrt{7})$

$-3x^2 =$

$-3(11+4\sqrt{7}) = -33-12\sqrt{7}$

$-3x^2-x^2$

$30 \quad 16 \quad 8 \quad 2 \quad -5 \quad -12$

$23 \quad 9$

$x^4-8x^3+17x^2-4x-12 \mid x-2$

x^4-2x^3

$-6x^3+17x^2$

$-6x^2+12x^2$

$5x^2-4x$

$5x^2-10x$

$6x-12$

x^3-6x^2+5x+6

$x=2$ ✓

x^3-6x^2+5x+6

$8 \quad -24 \quad 10 \quad 6$

$x^3-6x^2+5x+6 \mid x-2$

x^3-2x^2

$-4x^2+5x$

$-4x+8x^2$

$-3x$

$x^2 \quad -4x \quad -3$

$D=16+12=2\sqrt{7}$

$x_1=\frac{4-2\sqrt{7}}{2}=2\pm\sqrt{7}$

$x-4x-3$

$(x-2)^2-1=(x-3)(x-1)$

$x=2$ подо ✓

$(x^2-4x)^2+(x-\frac{4}{2})^2=16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [x] 5 [x] 6 [x] 7 [x]

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$|4x-3| \le 6$

$|3x-4y| \le 8$

$x \le |x|$

$|4x-3y| \le |4x-3y| \le 6$

$-3x+4y \le -|3x-4y| \ge -8$

$4x-3y \le 6$

$-3x+4y \ge -8$

$4x-3y \ge -6$

$-3x+4y \ge -8$

$14x+7y$

$(x+y)$

$4x-3y \in [-6;6]$

$3x-4y \in [-8;8]$

$x+y \in [-14;14]$

$4x-3y+3(x+y)=7x$

$\in [-48;48] \Rightarrow 14x \in [-96;96]$

$3x-4y \in [-8;8]$ $-3(x+y)$

$-7y \in [-50;50] \Rightarrow 7y$

$\in [-50;50] \Rightarrow 14+x+y$

$\in [-146;146]$

$7 \cdot -14 + (-62) = \boxed{-160}$

$3y-4x|$

$4x-3y$ $+3x-4y$

$(x-7y)$

$4x+3y-3x+4y=$

$\boxed{x+7y}$

$7(2x+y)$

$4x-3y+3x-4y=7(x-y)$

$4x-3y=6$

$-3x+4y \ge -8$

$4x-3y=-6$

$4y-3x=-8$

$x+y=-14$

$4(-14-y)-3y=-6$

$-42-4y-3y=-6$

$-42-7y=-6$

$42+7y=6$

$y=-\frac{36}{7}=-5\frac{1}{7} \Rightarrow x=-8\frac{6}{7}=-\frac{62}{7}$

$\begin{cases} 4x-3y \\ 3y-4x \\ 3x-4y \\ 4y-3x \end{cases} \Rightarrow 14x+7y$

$(x+y)+(x-y)$

$\boxed{7(x+y)}+3,5(x+y-x+y)$

$\boxed{4x-3y-3x-y}$ $4x-3y-3x+4y$

$\boxed{x-7y}$ $\boxed{x+7y}$

7 раз

$7x+7y$ $10x+0y$ $13x+7y$

$8x+14y$ $11x-7y$

$9x+7y$ $12x+0y$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [x] 5 [x] 6 [x] 7 [x]

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)\underbrace{(m-n+9)}$

$B = mn(m-n+3)$ $m-n$ и $m-n+9$ одно из чисел $\vdots 13$.

Рассмотрим 2 случая

$A = 13p^2$, $B = 3q^2$

$A = 3q^2$ $B = 13p^2$.

$A = 13p^2$

$B = 3q^2$.

если $m-n \not\vdots 3$, то $m-n+9 \vdots 3 \Rightarrow$

Значит $mn \vdots 3$

$13p^2 \vdots 3 \Rightarrow \boxed{p=3}$

$\Rightarrow 13p^2 = 117$ $3 \cdot 49$

$147 = 7mn$

$mn = 21$

~~$3 \cdot 9 = 3 \cdot 13$~~

~~$39 = 1 \cdot 39$~~

$117 = 9 \cdot 13 = 3 \cdot 39 = 117 \cdot 1$ не т. р-ий.

743

$A = 3q^2$.

остатки одинаковы.

Значит $m-n$ или $m-n+9 \vdots 3$

если $m-n \vdots 3$, ~~то~~ $\Rightarrow 3q^2$ содержит 3 2 в степени

$3 \Rightarrow q = 3$

$(m-n)(m-n+9) = 27$

$3 \cdot 9$.

$27 \cdot 1$

$(m-n)(m-n+9)$ разной четности, значит четное.

$13p^2 = \boxed{52}$

$13 \cdot 4$

$m-n = 4$

$B =$

$3q^2 = 7mn$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

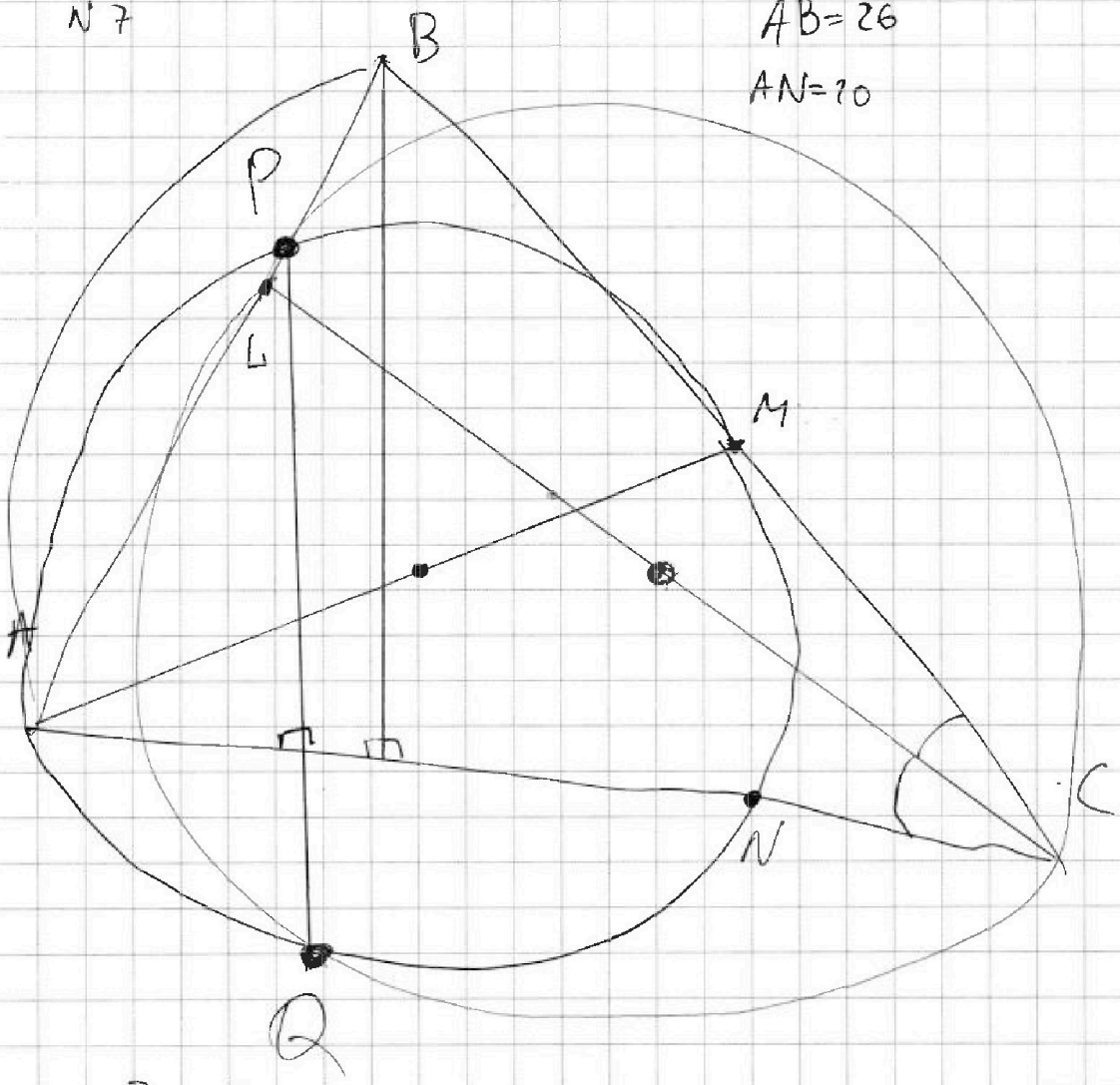
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7

$AB = 26$

$AN = 20$



$BM^2 = CM^2 = AP \cdot \underbrace{AB}_{26} = CN \cdot \underbrace{AN}_{20}$

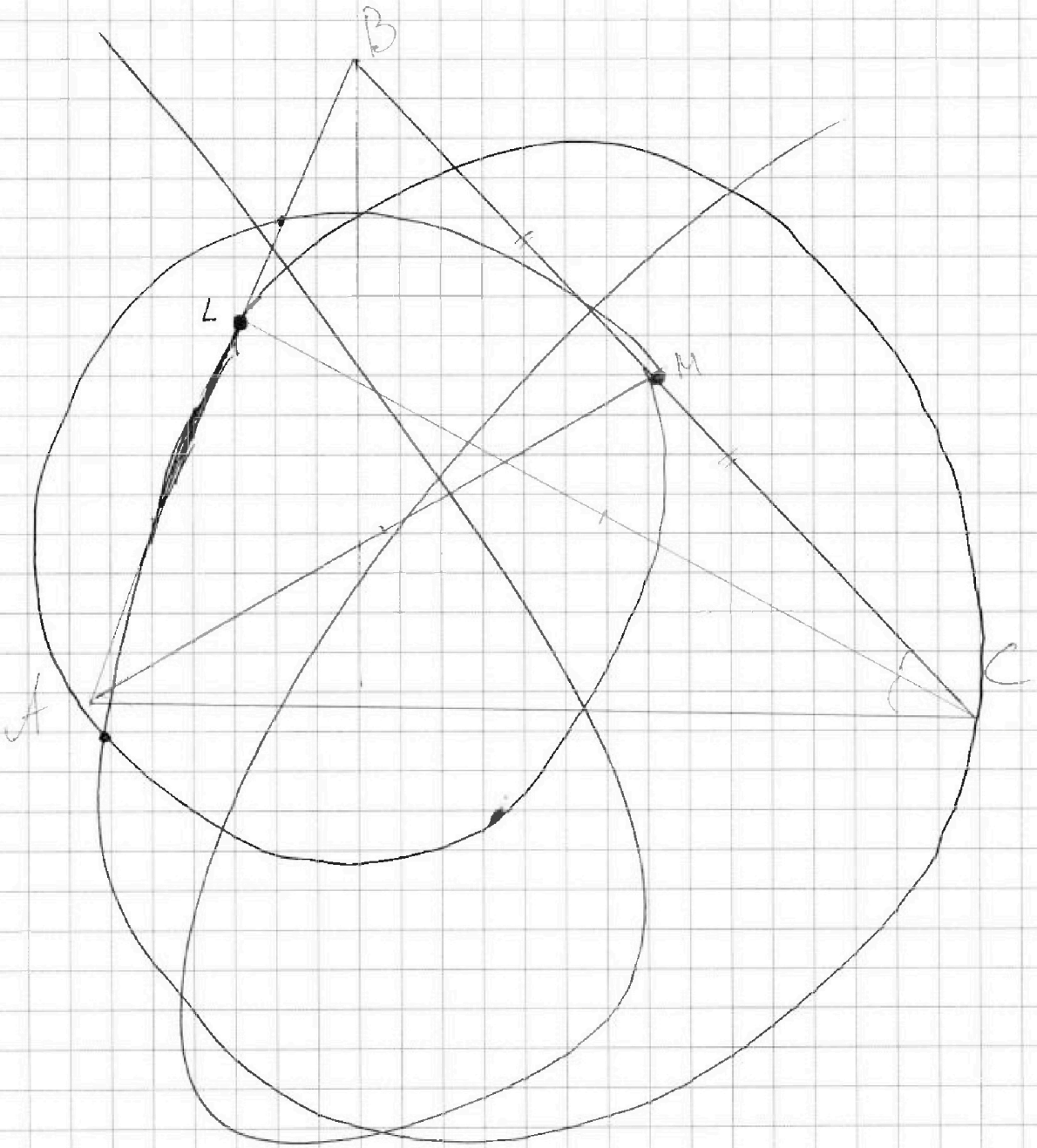
$(26AP = 20CN)$ $\cancel{AP^2 =}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



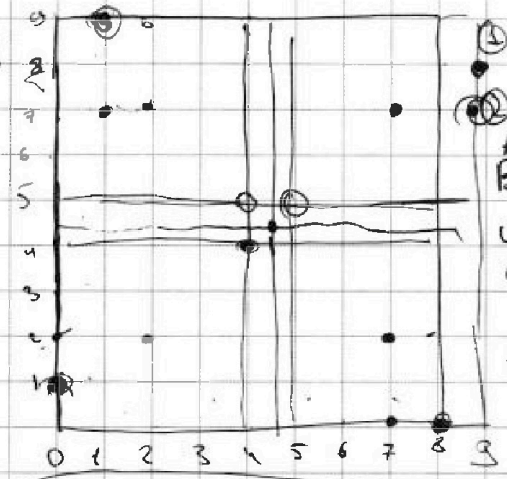
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

100 узлов



① центральная не меняет положение

② остальные меняют по 4

Алгоритм

Выбираем точку, кроме центральной

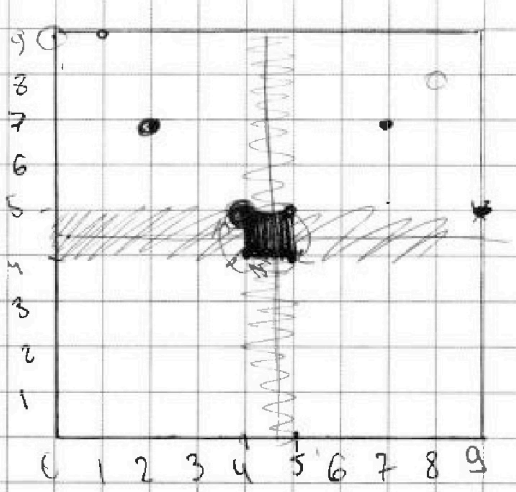
99 ищем вторую точку

98 вариантов делим на 4 получаем 99·98. Делим на 4 т.к. 4 одинаковые пары получаем

$\frac{100 \cdot 99}{4} = 25 \cdot 99$ и все?

1,9 → 9,8 → 8,0 → 0,1

Не так?



1 9 → 9 8 → 8 0 → [0; 1]

0,0 → 0,9 → 9,9 → 9,0

$x\ y \to y(9-x) \to (9-x)(9-x) \to (9-x)(9-9+x)$

0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + 5\sqrt[4]{y} + y \end{cases}$$

$(x+6)\cdot(5-y) = 5x - xy + 30 - 6y$

ОДЗ $y \le 5$ $x \ge -6$

$y \in [0;5]$ $x \in [0;30)$

$x+6+5-y+25 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} - 10\sqrt{5-y} + 10\sqrt{x+6} = 4\cdot 30 - 4x - 4y^2$

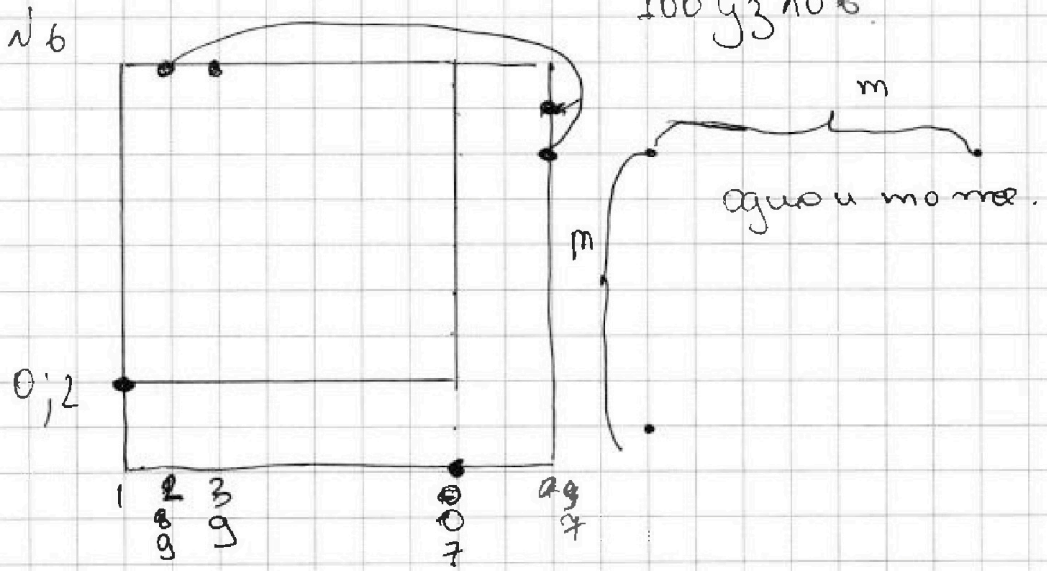
$x - y + 36 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} - 10\sqrt{5-y} + 10\sqrt{x+6} - 4x + 4y^2 = 120$

$5x - y + 4y^2 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} - 10\sqrt{5-y} + 10\sqrt{x+6} = 84$

$4(x^4-y^4)(x+y)(x^2+y^2) + (x-y) + (\sqrt[8]{x} - \sqrt[8]{y})(\sqrt[8]{x} + \sqrt[8]{y}) = 0$

№6

100 узлов



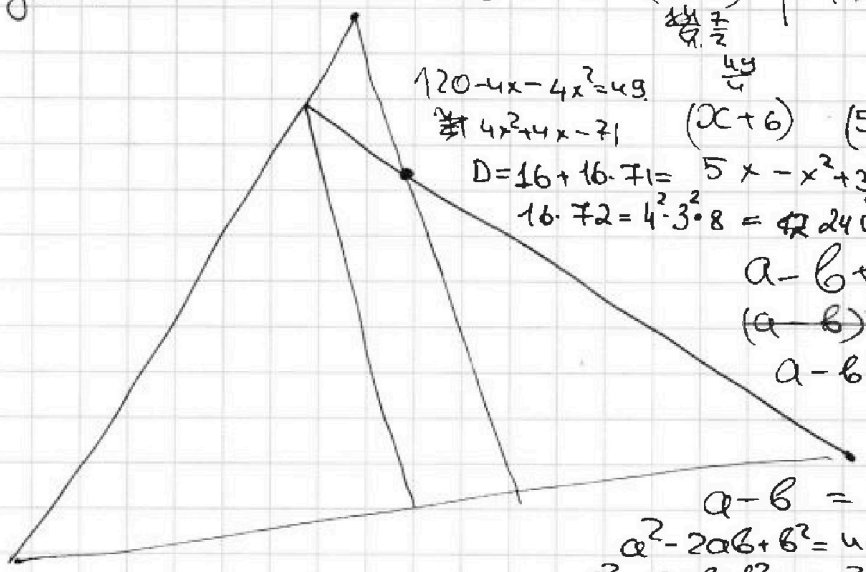
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [X] 2 [X] 3 [X] 4 [X] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задание 4



$30-x-x^2=(3,5)^2 \quad |\cdot 4$

$\frac{49}{4}$

$120-4x-4x^2=49$

$4x^2+4x-71$

$D=16+16\cdot 71=16\cdot 72=4^2\cdot 3^2\cdot 8=24\sqrt{2}$

$x_1=\frac{-4+24\sqrt{2}}{8}=3\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

$x_2=-\frac{1}{2}$

$(x+6)\quad(5-x)$

$5x-x^2+30-6x^2$

$a-b+5=2ab.$

$\cancel{(a-b)^2+5=0}$

$a-b-2ab+5=0$

$a-b=2ab-5$

$a^2-2ab+b^2=4a^2b^2-20ab+25$

$a^2+18ab+b^2=4a^2b^2+25$

№5

ОДЗ $y\in[0;5]$

$x\in[0;30]$

Предположим $y\neq x$

Тогда пусть $y>x>0$

Значит $4x^4+x+5\sqrt[4]{x}=\underbrace{4y^4+5\sqrt[4]{y}+y}_{\text{это больше}}$

Значит $x=y$

$\sqrt{x+6}-\sqrt{5-x}+5=2\sqrt{30-x-x^2}$

$x+6+5-x+25-2\sqrt{(x+6)(5-x)}-10\sqrt{5-x}+10\sqrt{x+6}=4(30-x-x^2)$

$36-2\sqrt{(x+6)(5-x)}-10\sqrt{5-x}+10\sqrt{x+6}=2(30-x-x^2)$

$18\quad 5\quad 5$

$\cancel{18-\sqrt{ab}-10\sqrt{}}$

$18-ab-10b+10a=60-x-x^2$

Решить

$\sqrt{x+6}-\sqrt{5-x}+5=2\sqrt{30-x-x^2}$

$x+6+18ab+5-x=4(30-x-x^2)+25$

$11+18ab=4a^2b^2+25.$

$4a^2b^2-18ab+14=0$

$2a^2b^2-9ab+7=0$

$D=81-56=25$

$\begin{cases} a=\sqrt{x+6} \\ b=\sqrt{5-x} \end{cases}$

$a_1b_1=\frac{9+5}{4}=3,5$

$a_2b_2=1$

$30-x-x^2=1$

$x^2+x-29=0$

$D=1+29\cdot 4=117=3\sqrt{13}$

$x_1=\frac{-1+3\sqrt{13}}{2}$

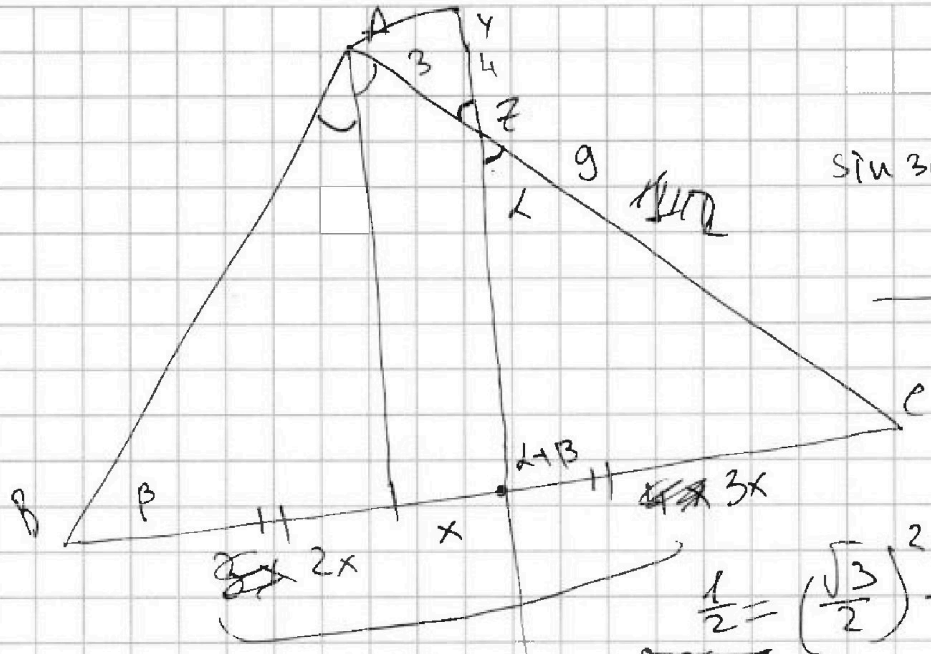
x_2 нет

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

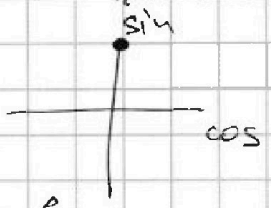
1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\sin 30 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 60 = \frac{1}{2}$



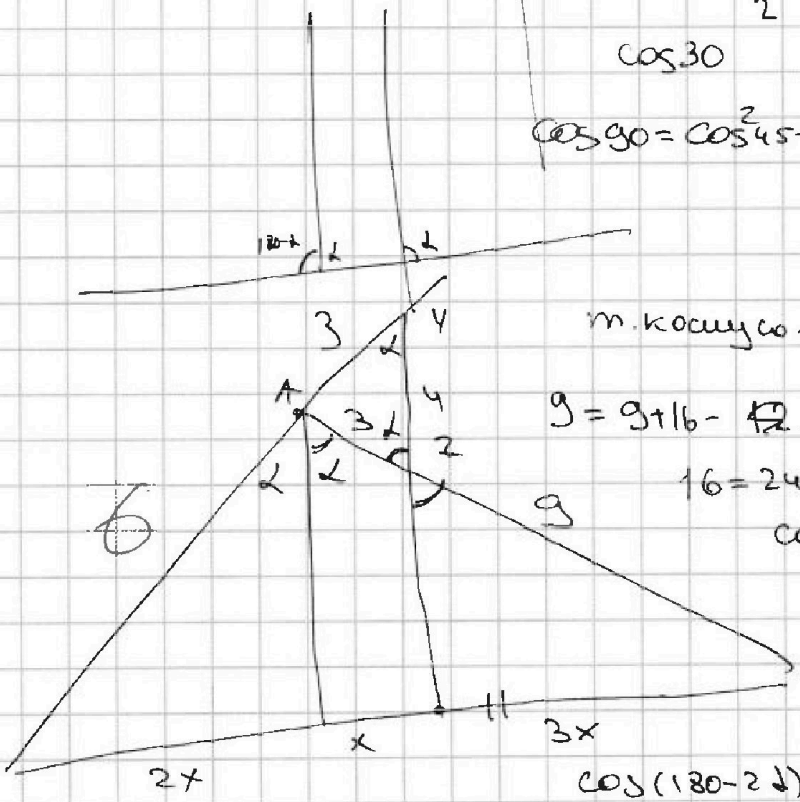
$\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos 60 =$

$\cos 2\alpha = \frac{1-2\cdot\sin^2\alpha}{2} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2}$

$\cos 30 \quad \cos^2 - \sin^2 = \cos 2\alpha$

$\cos 90 = \cos^2 45 - \sin^2 45$



т. косинусов ΔAYZ

$9 = 9 + 16 - 24\cdot\cos\alpha$

$16 = 24\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$BC^2 = 36 + 81 + 108\cdot\frac{2}{18}$

$BC^2 = 48 + 81 = 129$

$\cos(180 - 2\alpha) = -\cos 2\alpha.$

$16 = 18 - 18\cdot\cos(180-2\alpha) \Rightarrow \cos 180 - 2\alpha = \frac{2}{18} \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{2}{18}$