



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

у. 1.

Обозначим арифм. прогрессию за a_n , k обозначим разность между двумя соседними членами этой последовательности.
 $a_3 = 3x + 3$, $a_5 = (x^2 + 2x)^2$, $a_9 = 3x^2$

$$a_5 - a_3 = 2k$$

$$a_9 - a_5 = 4k$$

$$a_9 - a_3 = 6k$$

$$\frac{a_9 - a_3}{a_5 - a_3} = 3$$

$$\frac{3x^2 - 3x - 3}{x^2(x+2)^2 - 3x - 3} = 3$$

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3} = 1$$

$$\begin{cases} a_5 - a_3 \neq 0 \\ x^2 - x - 1 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \quad x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1:$$

$$1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D_4 = 1 + 2 = 3$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{3}$$

$$x_3 = -1 + \sqrt{3}$$

Подставим в a_3 и a_5 , чтобы $a_3 \neq a_5$ проверить,

что $a_3 \neq a_5$

$$x = -1: \quad \checkmark$$

$$a_3 = 0$$

$$a_5 = 1$$

$$a_3 \neq a_5 \quad \checkmark$$

$$x = -1 - \sqrt{3}: \quad \checkmark$$

$$a_3 = -3 - 3\sqrt{3} + 3 = -3\sqrt{3} < 0; \quad a_5 = (x^2 + 2x)^2 \geq 0$$

$$a_3 \neq a_5 \quad \checkmark$$

$$x = -1 + \sqrt{3}: \quad \checkmark$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (4 - 2\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3})^2 = 4$$

$$a_5 \neq a_3 \quad \checkmark$$

Ответ:

$$x \in \{-1; -1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4y+8x$$

$$(4y+8x)_{\max} - ?$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 & (1) \\ 3y-x \leq 3 & (2) \\ 3x-y \leq 1 & (3) \\ y-3x \leq 1 & (4) \end{cases}$$

$$(2) + (3)$$

$$2y+2x \leq 3+1$$

$$y+x \leq 2$$

$$(2) + 2 \cdot (3)$$

$$3y-x+6x-2y \leq 3+2$$

$$y+5x \leq 5$$

$$\begin{cases} y+x \leq 2 \\ y+5x \leq 5 \end{cases}$$

$$3(y+x) + (y+5x) = 4y+8x \leq 3 \cdot 2 + 5 = 11$$

Проверим, что это значение достигается

$$\begin{cases} y+x \leq 2 \\ y+5x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x \leq 3 \\ x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y+5x \leq 10 \\ y+5x \leq 5 \end{cases}$$

$$y \leq 5$$

$$\begin{cases} 4y \leq 5 \\ y \leq \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{3}{4} \in \mathbb{R}$$

$$(1) \quad x-3y < 0 \quad \checkmark$$

$$(2) \quad \frac{15-3}{4} = 3 \quad \checkmark$$

$$(3) \quad \frac{9-5}{4} = 1 \quad \checkmark$$

$$(4) \quad y-3x < 0 \quad \checkmark$$

Ответ:

$$(4y+8x)_{\max} = 11$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3

$m, n \in \mathbb{N}$, p, q — простые

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9mn - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2 + n^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$\text{I)} \begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 75q^2 \end{cases} \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 & (1) \\ mn(m+n-3) = 75q^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} m+n \div 13 \\ m+n-9 \div 13 \\ \frac{(m+n)(m+n-9)}{13} = p^2 \end{cases}$$

Обозначим $\frac{m+n}{13} = z$
Заменим $\frac{m+n-9}{13} = z$
переходим

$$\frac{(m+n)(m+n-9)}{13} = p^2$$

$$z \cdot (13z - 9) = p^2$$

$$z=1: 13-9=4=2^2 \quad \checkmark$$

z=1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=p \\ 13z-9=z \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=1 \\ z=\frac{9}{3} \\ z=p \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=1}$$

$$\frac{m+n}{13} = 1$$

$$m+n=13 \div 13 \quad \checkmark$$

Подставим в (2)

$$mn \cdot 10 = 75q^2$$

$$2mn = 15q^2$$

$$\Rightarrow q=2$$

$$mn = 15q = 30$$

$$\begin{cases} mn=30 \\ m+n=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=10 \\ n=3 \\ m=3 \\ n=10 \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} A = 75q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 75q^2 & (3) \\ mn(m+n-3) = 13p^2 & (4) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(3)

$$\frac{(m+n)(m+n-9)}{75} = p^2$$

Замени $\frac{m+n}{75} = k$

$$k(75k-9) = p^2 \Leftrightarrow$$

$k=1$:

$$75-9=66 \neq p^2 \quad \times$$

$k \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=75k-9 \\ k=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{9}{74} \\ k=p \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

Для этого случая решений нет

Ответ: $10; 3$ или $\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} n=10 \\ m=3 \end{cases}$

$$y_M = y_Z + z_M = 8 + 12 = 20$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $\cos \alpha$ сум:

$$|cy = 15, yd = 20$$

$$cm^2 = cy^2 + yd^2 - 2 \cdot \cos \alpha \cdot cy \cdot yd = 576 + 400 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 20 = 976 - 4 \cdot 160 = 976 - 640 = 336$$

$$cm = \sqrt{336}$$

$$BC = 2cm = 2\sqrt{336} \quad (\text{т.к. } m - \text{сер. } CB)$$

$$\text{Ответ: } BC = 2\sqrt{336}$$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 5.

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases} \quad (2)$$

(2) $x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 + 5y^2 - \sqrt{x}$
 $\Rightarrow$ Если в выражении $x^4 + 5x^2 - \sqrt{y}$ у x и y поменять местами, значение не изменится $\Rightarrow$
 $y = x$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ x = y \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5$$

Рассмотрим, когда правая часть ≥ 0 ;

$$6+5x-x^2 \geq \frac{25}{4}$$

$$4x+20x-4x^2 \geq 25$$

$$4x^2 - 20x + 19 \leq 0$$

$$D_4 = 100 - 4 \cdot 96 = 4 \Rightarrow 16 \cdot 6$$

$$x \in \left[\frac{10 - 4\sqrt{6}}{4}; \frac{10 + 4\sqrt{6}}{4} \right]$$

$$x \in \left[\frac{5 - 2\sqrt{6}}{2}; \frac{5 + 2\sqrt{6}}{2} \right]$$

Замеча переменные $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{6-x}$
 $a - b + 5 = 2ab$ — 1 решение

то подставим $a = 3$, $b = 2$ $3 - 2 + 5 = 6 \checkmark$

$$\sqrt{x+1} = 3$$

$$\sqrt{6-x} = 2$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ x = 2 \end{cases}$$

⊗

Ответ: решений нет.

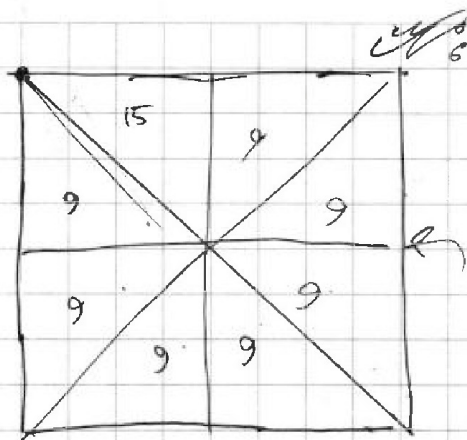
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Они, относительно которых не
должно быть симметрии

1 в "избранном" треугольнике + 1 вне его
во всех остальных, кроме 1 из следующего
или 2 в "избранном" треугольнике.)

$$15 + 9 \cdot 6 = 69$$

$$\frac{15!}{(15-2)!2!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 7 \cdot 12 = 105$$

$$S = 69 + 105 = 174$$

Ответ: 174

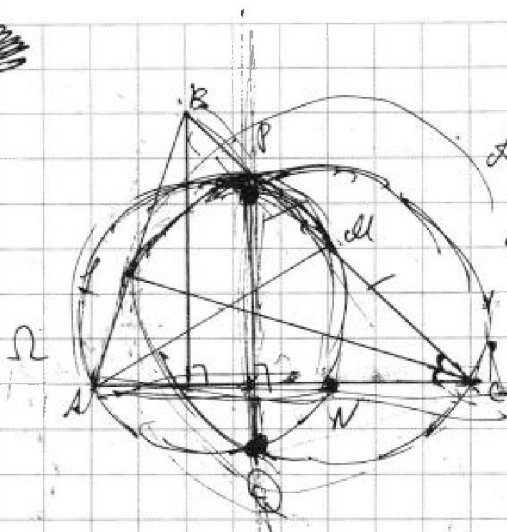
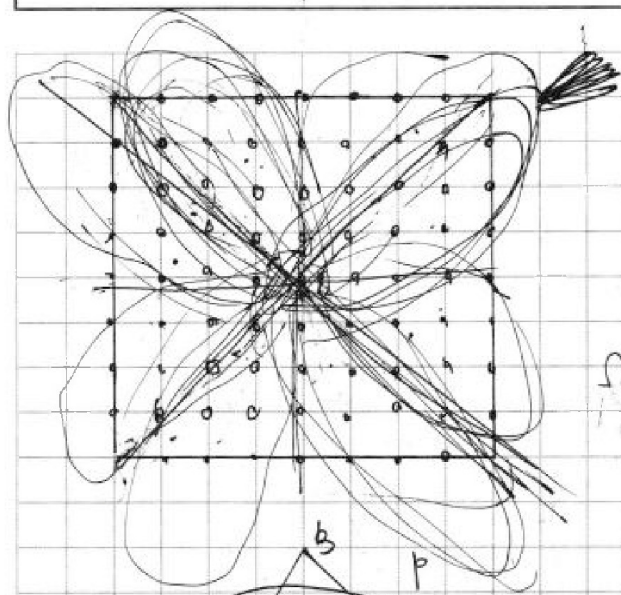


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

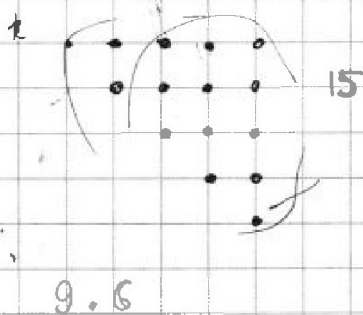
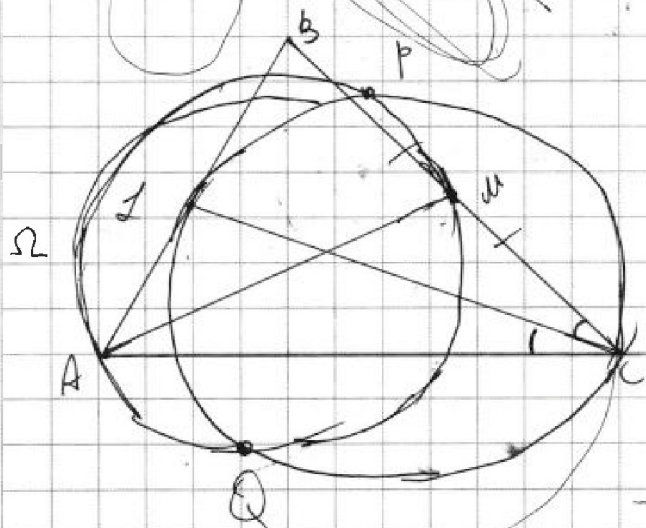
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC ? BC ?
 $AB = 10$
 $AN = 8$



$$15 + 54 = 69$$
$$+ C_{15}^2 = \frac{15!}{(15-2)!2!} = \frac{15!}{13! \cdot 2!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 7 \cdot 15$$

$$70 + 35$$

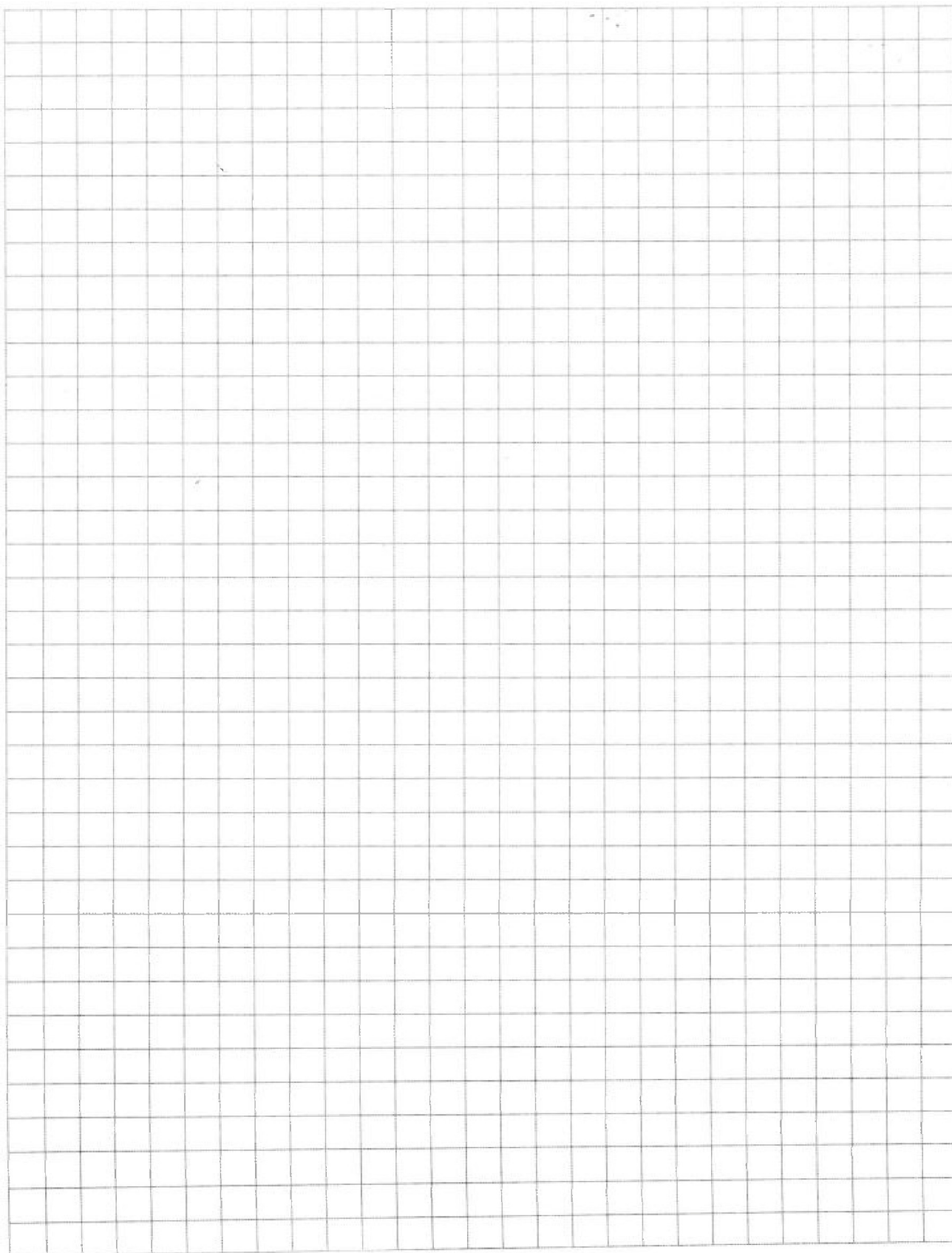


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

$\div a_n$

$a_2 = 3x+3$, $a_5 = (x^2+2x)^2$, $a_9 = 3x^2$

$a_5 - a_3 = 2k$
 $a_9 - a_5 = 4k$
 $a_9 - a_3 = 6k$

$x^2 - x - 1 = 2k$

$(x(x+2))^2 = x^2(x^2+4x+4)$

$\frac{a_5 - a_3}{a_9 - a_5} = 1$

$\frac{3x^2 - (x^2+2x)^2}{(x^2+2x)^2 - 3x - 3} = 2$

$\frac{3x^2 - 3x - 3}{(x^2+2x)^2 - 3x - 3} = 3$

$\frac{x^2 - x - 1}{(x^2+2x)^2 - 3x - 3} = 1$

$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 = 2k$

$\frac{x^2 - x - 1}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3} = 1$

$x^2 - x - 1 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 3x + 3 = 0$

$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$

$x_1 = -1$

$\begin{cases} \max \{x-3y, 3y-x\} \leq 3 \\ \max \{3x-y, y-3x\} \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3y-x \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \\ y-3x \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x-4y \leq 4 \\ x-y \leq 1 \\ 4y-4x \leq 4 \\ y-x \leq 1 \end{cases}$

$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$

$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \div x+1$

$x^3 + 3x^2 - 2$

$3x^3 + 3x^2$

$-3x^3 + 3x^2$

$-2x - 2$

$-2x - 2$

$x_2 = -1$

$(x+1)(x^3+3x^2-2) = 0$

$x_1 = -1$

$(x+1)(x^2+2x-2) = 0$

$x_2 = -1 - \sqrt{3}$

$x_3 = -1 + \sqrt{3}$

$x^2 - x - 1 = 0$

$x_1 = -1$

$x_2 = -1 - \sqrt{3}$

$x_3 = -1 + \sqrt{3}$

$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$

$x^3 + 3x^2 - 2$

$3x^3 + 3x^2$

$-3x^3 + 3x^2$

$-2x - 2$

$-2x - 2$

$x_1 = -1$

$x_2 = -1 - \sqrt{3}$

$x_3 = -1 + \sqrt{3}$

