



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у меня есть последовательность с разностью 1. Тогда разность между 6-м и 4-м членом ариф. прогр. равна 2d, а разность между 10-м и 6-м 4d. Тогда справедлива запись:

$$2((x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x)) = 9x^2 - (x^2 - 2x)$$

$$2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6) = 9x^2 - (x^4 - 4x^3 + 4x^2)$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12 = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$(x - 1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x - 1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\text{Значит: } \begin{cases} x - 1 = 0 & x = 1 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 & D = 2^2 + 4 \cdot 4 = 4 \cdot 5 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$; $x = 1 + \sqrt{5}$; $x = 1 - \sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сначала решим по очереди каждое из ур неравенств.

$$|x - 2y| \leq 2$$

$$a) \begin{cases} x \geq 2y \\ x - 2y \leq 2 \end{cases}$$

$$x \leq 2 + 2y$$

$$b) \begin{cases} x \leq 2y \\ 2y - x \leq 2 \end{cases}$$

$$2y - 2 \leq x$$

$$2y - 2 \leq x$$

$$x \leq 2y$$

$$x = 2y$$

$$x \leq 2y - 2$$

$$x = 2y - 2$$

$$y = 2x - 1$$

$$x > 2y - 2$$

$$|2x - y| \leq 1$$

$$a) \begin{cases} 2x \geq y \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$2x - 1 \leq y$$

$$b) \begin{cases} 2x \leq y \\ y - 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$y - 2x \leq 1$$

$$y \leq 1 + 2x$$

$$2x \leq y$$

$$2x \geq y$$

$$y > 1 + 2x$$

$$y = 1 + 2x$$

$$y = 2x - 1$$

$$y < 2x - 1$$

Тогда решением этой системы является:

Пусть А точки пересечения $y = 2x - 1$ и $x = 2y - 2$.

Заметим что у точки А одновременно наибольшая ордината и абсцисса (у всех других одновременно и ордината и абсцисса меньше), а значит Наибольшее значение $3y + 6x$ будет если подставить координаты А.

Найдем координаты А:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 2y - 2 \end{cases} \quad y = 2(2y - 2) - 1$$

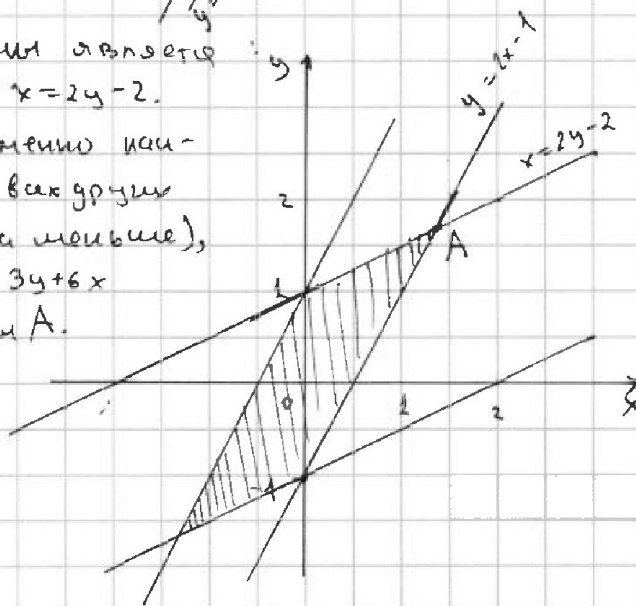
$$5 = 3y \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

$$x = 2(2y - 1) - 1 \Rightarrow 4 = 3x$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$3y + 6x = 3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} = 5 + 8 = 13$$

Ответ: 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 7mn^2 + 9n^3 = mn(m+2n+9)$$

Ф1) $m+2n$ и $m+2n-7$ разное четность. Докажем:

$$a) \frac{m+2n}{2} \equiv 0 \Rightarrow \frac{m+2n-7}{2} \equiv 0-1 \equiv 1$$

$$b) \frac{m+2n}{2} \equiv 1 \Rightarrow \frac{m+2n-7}{2} \equiv 1-1 \equiv 0$$

Из Ф1 следует, что $A \equiv 2 \Rightarrow$ при $A = 11p^2$ или $A = 75q^2$, то p и q четные, а значит равны 2.

$$f) (m+2n)(m+2n-7) = 75q^2 = 75 \cdot 2^2 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$(m+2n; m+2n-7) = (m+2n; 7) \text{ тк } ((m+2n)(m+2n-7), 7) = 1$$

$$(m+2n; 7) = 1 \Rightarrow \text{если } 7, \text{ то } A \equiv 7$$

Значит, (тк $m+2n > m+2n-7$) $\begin{cases} m+2n = 5^2 \\ m+2n-7 = 12 \end{cases}$ или $\begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 12 \end{cases}$

но это не так, поэтому что $m+2n = 19 = 25$ противоречие

$$2) (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 = 11 \cdot 2^2$$

Используя $(m+2n; m+2n-7) = 1$ / аналогично с п.1)

$$\begin{cases} m+2n = 11 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m+2n = 44 \\ m+2n-7 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } m+2n = 11$$

и так $m, n \geq 1 \Rightarrow$

$$n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Переберем $n=1$, то $m=9 \Rightarrow B = 1 \cdot 9 \cdot (9+2 \cdot 9+9) =$

$$m \cdot n = 9 \cdot 1 = 9 \neq 11 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$2) n=2, \text{ то } m=7 \Rightarrow B = 2 \cdot 7 \cdot (2+7+9) =$$

$$B = mn(m+2n+9) = mn(11+9) = 20 \cdot mn = 75q^2$$

$$4mn = 15q^2 \Rightarrow q=2$$

$$mn = 15$$

$$2) n=5 \quad m=3$$

$$2 \cdot 5 + 3 = 13 \neq 11$$

не подходит

$$1) n=3 \quad m=5$$

$$3 \cdot 2 + 5 = 11$$

подходит

Ответ: $(5; 3)$ 1 такая пара.

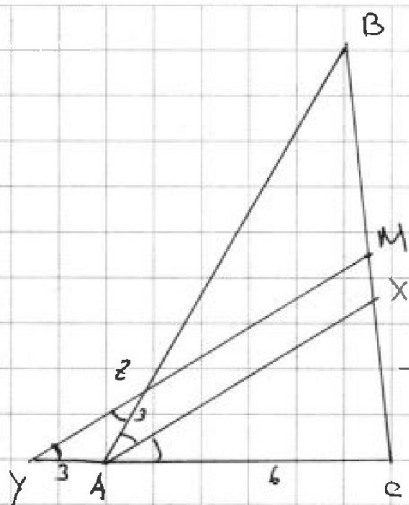


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) так $MZ \parallel AX \Rightarrow \angle YZA = \angle BAX$
AZ-сек

Пусть $\angle BAX = 2 \Rightarrow \angle XAC = 2$
 $\angle YZA = 2$.

$\angle BAY = 180 - \angle BAC = 180 - 2\angle BAX =$
 $= 180 - 2 \cdot 2$

$\angle ZYA = 180 - \angle YZA - \angle ZAY =$
 $= 180 - 2 - (180 - 2 \cdot 2) = 2$

$\angle YZA = \angle ZYA$

$AZ = AY$

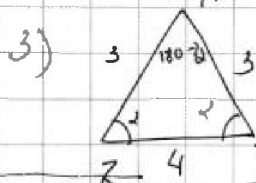
2) так $XM \parallel AX \Rightarrow$ по т. Фалеса $\frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} = \frac{6}{3} = 2$

Пусть $CX = 2a$, тогда $XM = \frac{CX}{2} = \frac{2a}{2} = a$

$CM = CX + XM = 3a$, так M-середины $\Rightarrow CM = MB = 3a$

$BX = BM + MX = 3a + a = 4a$.

так AX-бисс. $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2AC = 12$.



по т. косинусов в $\triangle ZAY$:

$$\cos \angle ZAY = \frac{3^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{18 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

$$\cos \angle ZAY = \frac{AZ^2 + AY^2 - ZY^2}{2 \cdot AZ \cdot AY}$$

тогда $\cos \angle ZAY = -\cos \angle BAC$, так $\angle BAC + \angle ZAY = 180^\circ$

$$\cos \angle BAC = -\frac{1}{9}$$

4) по т. косинусов в $\triangle BAC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$

$$\cos \angle BAC = \frac{6^2 + 12^2 + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9}}{6^2 + 12^2 + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{6^2(1+4) + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{1}{9}}{6^2(1+4) + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{6^2 \cdot 5 + 16}{6^2 \cdot 5 + 16} = \frac{4(3^2 \cdot 5 + 4)}{4(3^2 \cdot 5 + 4)} = \frac{(2 \cdot 7)^2}{14^2} = 14^2$$

$$BC = 14$$

Ответ: 14



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Реш. 1) $x=0$ $y=0$. Подставим в первое уравнение:

$$\sqrt{2} - \sqrt{7} + 7 = 2\sqrt{14}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - 1 + \sqrt{7} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{7} = \sqrt{8} + 1, \text{ но } \sqrt{8} > \sqrt{7} \\ 1 > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sqrt{7} > \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{8} + 1 > \sqrt{7} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$(0;0)$ является решением данной системы.

2) Поработаем со вторым уравнением:

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y) + \sqrt{2}(x-y) = 0$$

т.к. $x=0$ $y=0$ и может быть $\Rightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y > 0$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{2}(x-y) = 0$$

$$(x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + 3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}\right) = 0$$

т.к. $x^2 + xy + y^2 > 0$ при любых x, y (D.K.O. через x и через y и покр. прик. положит.)
 $\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right.$ исл.

$$x^2 + y^2 > 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y} > 0 \quad (\sqrt{2} > 0 \text{ и } \sqrt{2}x + \sqrt{2}y > 0)$$

$$x^2 + xy + y^2 + 3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y} > 0$$

$$x = y$$

Значит, для решения второго уравнения достаточно $x=y$ и

$x=y \geq 0$, т.к. $\sqrt{2}x$ (или $\sqrt{2}y$) под корнем x или y .

Подставим наши знания во второе уравнение.
 в первое

$$1) \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$0 \leq x \leq 7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7-x - 2\sqrt{(7-x)(2+x)} + 2+x-2=0$$

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x}) + (\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t, \text{ тогда } t^2 + t - 2 = 0 \quad \text{по г. Буэтта}$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = -2$$

$$1) \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 1 \quad (\sqrt{x+2} > \sqrt{7-x} \Rightarrow x+2 > 7-x \Rightarrow x > 2,5)$$

$$x+2+\sqrt{7-x}-2\sqrt{(7-x)(x+2)}=1$$

$$8 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$4 = \sqrt{14+5x-x^2}$$

$$16 = 14+5x-x^2 \Rightarrow x^2-5x+2=0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} > 0 \quad (5 > \sqrt{17})$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2} > 2,5 \Leftrightarrow 5 - \sqrt{17} > 5 \Leftrightarrow 0 > \sqrt{17} \text{ — противор.} \right)$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} < 7$$

~~по аналогии с $\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2$ ($\Rightarrow x < 2,5$)~~

$$2) \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2} = 2 \quad (\Rightarrow x < 2,5)$$

$$7-x+x+2-2\sqrt{14+5x-x^2}=4$$

$$5 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$25 = 4(14+5x-x^2) \Rightarrow 25 = 40+16+10x-4x^2$$

$$4x^2 - 20x - 31 = 0$$

$$D = 20^2 + 4 \cdot 4 \cdot 31 = 4^2(5^2 + 31) = 4^2(25 + 31) = 4^2 \cdot 56 = 8^2 \cdot 14$$

$$x = \frac{20 \pm 8\sqrt{14}}{8} = 2,5 \pm \sqrt{14}, \text{ где } x < 2,5$$

$$x = 2,5 - \sqrt{14} < 0 \quad (\Leftrightarrow 2,5 < \sqrt{14} \Leftrightarrow 6,25 < 14)$$

не подходит из-за ОДЗ второго уравнения

Ответ: $x = y = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$

$$\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

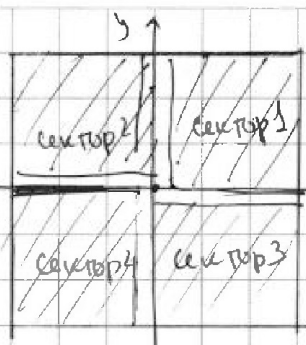


1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Центральная клетка переходит при повороте сама в себя.

Если всего клеток $11^2 = 121$

Сектор это внутри одна ось и из осей все узлы (у сектора 1 и 4 это ось x, а у остальных ось y). Тогда из симметрии в каждом секторе равное число узлов =

$= \frac{1}{4} \cdot (121 - 1) = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30$. Заметим, что при повороте все сектора переходят друг в друга. Тогда если перекрасим центральную клетку, тогда перекрашивать можем все клетки одного сектора (остальные получим поворотом) $\Rightarrow 30$ вариантов.

Если красим 2 узла в центре 1 сектора, то достаточно рассмотреть так же 1 сектор, а остальные получим поворотом $\Rightarrow 30$ вариантов $(30 = \frac{30 \cdot 29}{2} = 15 \cdot 29)$

Если красим 2 узла в разных секторах, тогда

1) противоположные сектора. Тогда достаточно рассмотреть 1 пару например с.4 и с.1 вариантов выбрать узлы: $30 \cdot 30$

2) если соседние сектора, тогда так же все аналогично при повороте достаточно рассмотреть 2 соседних (так: тогда вариантов выбрать 2 узла $30 \cdot 30$ (при поворотах мы получим ту же комбинацию покрашенных узлов))

Тогда всего вариантов $30 \cdot 30 + 30 \cdot 30 + 15 \cdot 29 + 30 =$
 $= 30 \cdot 61 + 15 \cdot 29 = 15 \cdot 122 + 15 = 15 \cdot 151 = 2265$

Ответ: 2265

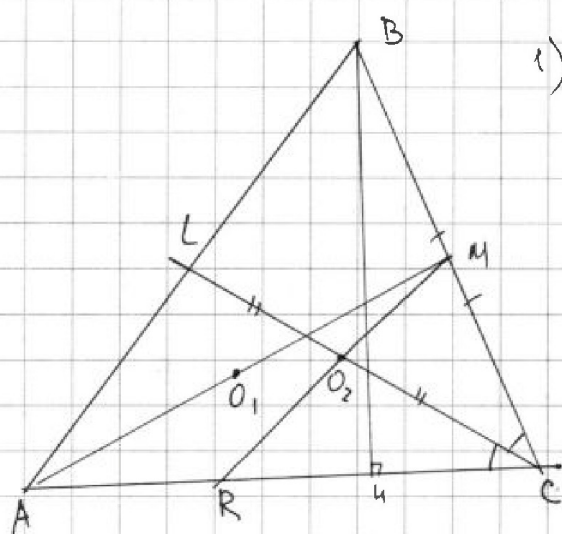


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) BH - высота
 O_1 и O_2 центры Ω_1 и Ω_2 соответствующих, т.к. Ω_1 и Ω_2 построены на AM и CL как центры симметрии $\Rightarrow O_1 \in AM$ и $AO_1 = O_1M$ и $O_2 \in CL$ и $CO_2 = O_2L$

2) PQ - перес. Ω_1 и Ω_2
 $\downarrow$
 PQ - рад. ось Ω_1 и Ω_2
т.к. рад. ось перпен. линии

центров $\Rightarrow O_1, O_2 \perp PQ$

т.к. $PQ \parallel BH$ и $QR \perp AC \Rightarrow O_1, O_2 \parallel AC$
и $O_1, O_2 \perp PQ$

3) MO_2 - средняя линия $\triangle ABC$ (т.к. M - середина BC и O_2 - сер. CL)
 $MO_2 \parallel AC = R$

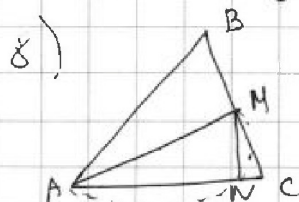
4) $O_1, O_2 \parallel AC$ (в частности AR) $\Rightarrow O_1, O_2$ - середины линий $\triangle AMR$
 $AO_1 = O_1M$

$MO_2 = O_2R$

5) $MO_2 = O_2R$ и $\angle MO_2 = \angle O_2CR \Rightarrow \triangle MCR : CO_2$
бисс. и медиана $\Rightarrow \triangle KMC$ - равнобедр. и CO_2 - высота
($CO_2 \perp RM$)

6) $CO_2 \perp RM$ и $RM \parallel AB$ $\Rightarrow CO_2 \perp AB$
(т.к. средняя линия) (или $CL \perp AB$)

7) CL - высота ($CL \perp AB$) и бисс. в $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедр. $\Rightarrow BC = AC$



8) $\angle MNA = 90^\circ$, т.к. AM - диаметр окружности Ω
и $\angle ANM$ опирается на диаметр.



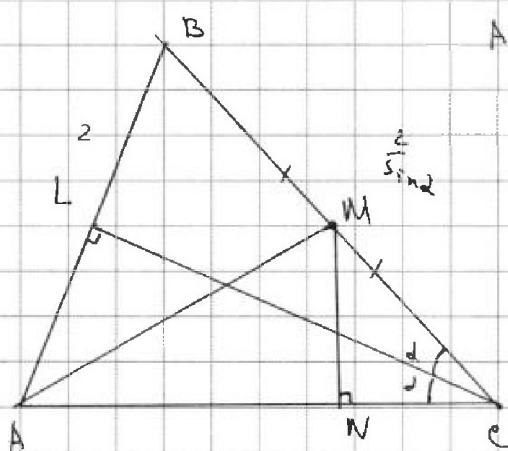
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9)



$$AB = 4 \Rightarrow AC = BC = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Пусть } \angle BCL = 2 \Rightarrow \angle LCA = \alpha.$$

$$\triangle BCL: BC = \frac{BL}{\sin \angle BCL} = \frac{BL}{\sin 2} = \frac{2}{\sin 2}$$

$$\text{т.к. } AC = BC \Rightarrow AC = \frac{BL}{\sin 2}$$

$$BM = MC = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2 \sin 2} = \frac{1}{\sin 2}$$

$$\triangle MNC: NC = \cos 2 \cdot MC = \frac{\cos 2}{\sin 2} = \frac{1 - 2 \sin^2 2}{\sin 2}.$$

$$AN = AC - NC = \frac{2}{\sin 2} - \frac{1 - 2 \sin^2 2}{\sin 2} = \frac{1 + 2 \sin^2 2}{\sin 2} = 5$$

$$\text{т.к. } 0 < 2 < 90^\circ \Rightarrow \sin 2 \neq 0.$$

$$\sin 2 = t \quad (\Rightarrow 0 < t < 1)$$

$$1 + 2t^2 = 5t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$D = 25 - 8 = 17$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{4} > 1 \Leftrightarrow 5 + \sqrt{17} > 4 \right)$$

$$t = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} = \sin 2$$

$$BC = AC = \frac{2}{\sin 2} = \frac{2 \cdot 4}{5 - \sqrt{17}} = \frac{8}{5 - \sqrt{17}} = \frac{8(5 + \sqrt{17})}{25 - 17} = 5 + \sqrt{17}$$

Ответ: $BC = AC = 5 + \sqrt{17}$



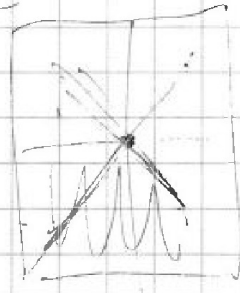
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Учитель



30 +

30 · 30

$$\begin{array}{r} 30 \cdot 24 \\ \hline 2 \end{array} = 15 \cdot 19$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including algebraic calculations, geometric diagrams, and trigonometric derivations.

Algebraic Calculations:

$$\begin{aligned} & x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \mid x - 1 \\ & \underline{x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 4} \\ & x^3 - 3x^2 + 7x - 4 \mid x - 1 \\ & \underline{x^3 - x^2 - 4x + 4} \\ & -2x^2 + 11x - 8 \mid x - 1 \\ & \underline{-2x^2 + 2x - 6} \\ & 9x - 8 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \mid x - 1 \\ & \underline{x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 4} \\ & x^3 - 3x^2 + 7x - 4 \mid x - 1 \\ & \underline{x^3 - x^2 - 4x + 4} \\ & -2x^2 + 11x - 8 \mid x - 1 \\ & \underline{-2x^2 + 2x - 6} \\ & 9x - 8 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \mid x - 1 \\ & \underline{x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 4} \\ & x^3 - 3x^2 + 7x - 4 \mid x - 1 \\ & \underline{x^3 - x^2 - 4x + 4} \\ & -2x^2 + 11x - 8 \mid x - 1 \\ & \underline{-2x^2 + 2x - 6} \\ & 9x - 8 \end{aligned}$$

Geometric Diagrams:

Diagram 1: A triangle with vertices labeled. A point is marked inside, and lines are drawn from vertices to this point. Angles are labeled.

Diagram 2: A triangle with vertices labeled. A point is marked on one side, and lines are drawn from vertices to this point. Angles are labeled.

Trigonometric Derivations:

$$\begin{aligned} & \sin(90^\circ - 2\alpha) = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} - 2\sin \alpha \\ & 2\sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} = 5 \\ & \sin \alpha = + \quad 1.5 + 2.0 \\ & 2 + 2 - 1 = 5 + \\ & 2 + 2 - 5 + - 1 = 0 \\ & D = 25 + 4 \cdot 2 = 33 \\ & \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4} \end{aligned}$$

Other Calculations:

$$\begin{aligned} & (1 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5} \\ & 6 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 6 \\ & 6 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 6 - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Final Equations:

$$\begin{aligned} & (5-x)(1+x) \cdot x = (5-x)(1+x) \cdot x = \\ & = (5-x)(1+x) \cdot x = 5x + 4x^2 + 5x + 4x^2 = 10x + 8x^2 \\ & 10x + 8x^2 = 10x + 8x^2 \end{aligned}$$

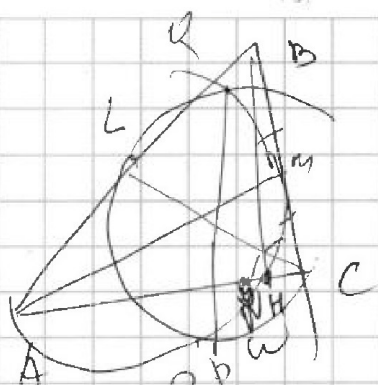


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

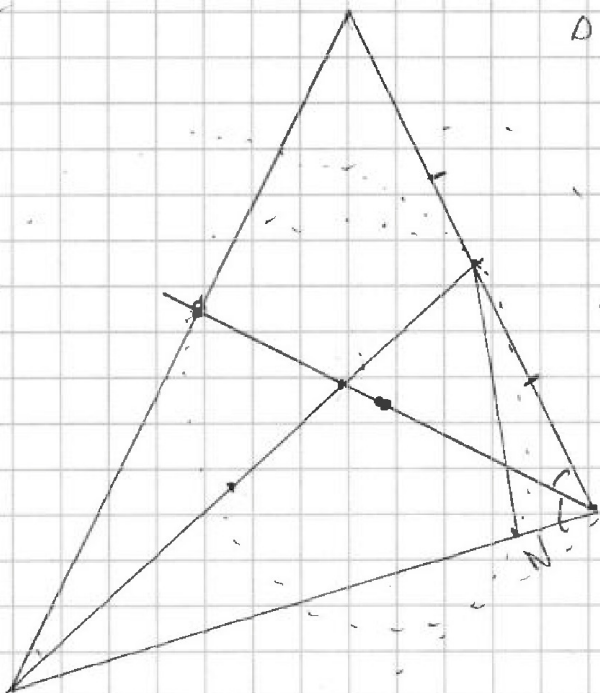
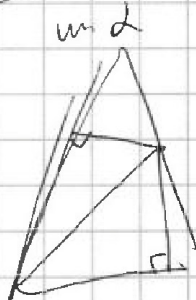
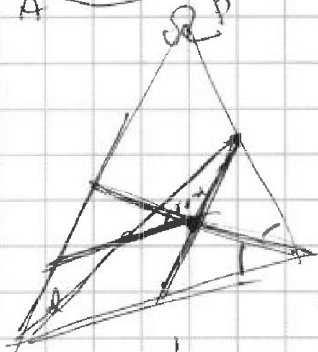


$PQ \parallel BN$

$$AB = 4$$

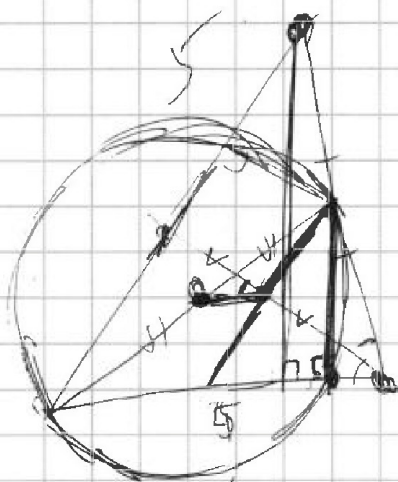
$$AN = 5$$

$$\Rightarrow \angle C = \angle BCF$$



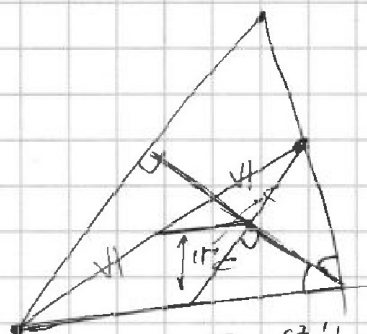
$\triangle ABC$

$$AC = BC$$



$$2 \cdot 4 \cdot 14 = 112$$

$$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$



$$78 + 88 + 208 = 374$$

$$0 = 25x^2 - x5 - 2x$$
$$2x - x5 + 41 = 22'9$$
$$5 = 2\sqrt{14+5-x^2}$$
$$2-x+x+2 = 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y + 12(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y) + 12 = \frac{(x-y)}{\sqrt{x+y}} = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3 + \frac{12}{\sqrt{x+y}}) = 0$$

$$\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$$

$$x=y$$

equ. решение

$$\frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

7

$$5+\sqrt{14}$$

14

9

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$D = 25 + 4 \cdot 14 = 25 + 40 + 16 = 81 = 9^2$$

$$\frac{-5 \pm 9}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}} - \sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}$$

$$2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{9+\sqrt{17}} - \sqrt{9-\sqrt{17}})$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 - x - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} + 2 + x - 2 = 0$$

$$\left(\sqrt{7-x} - \sqrt{2+x}\right)^2 = 80 - 16\sqrt{7-x} - \sqrt{2+x} = 1$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t$$

$$7x+7x-2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 1$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

81

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$t = 1$$

$$8 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$4 = \sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$16 = 14 + 5x - x^2$$

$$\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\frac{1}{-2}$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 8 = 17$$

$$t = -1$$

$$18 - 2 \cdot 8 = 2$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\sqrt{7-x} \pm \sqrt{x+2} = 2$$

$$9 - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 4$$

$$5 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|x-2y| \leq 2$$

$$|x-y| \leq 1$$

$$3y+6x$$

$$x \geq 2y$$

$$x-2y \leq 2$$

$$x \leq 2+y$$

$$-y \leq 1$$

$$y \geq -1$$

$$2y-x \leq 2$$

$$2y-2 \leq x$$

$$2y-2=6$$

$$y-1=3$$

100

$$2x-y \geq 0 \quad 2x \geq y$$

$$2x+y \leq 1$$

$$2x-1 \leq y$$

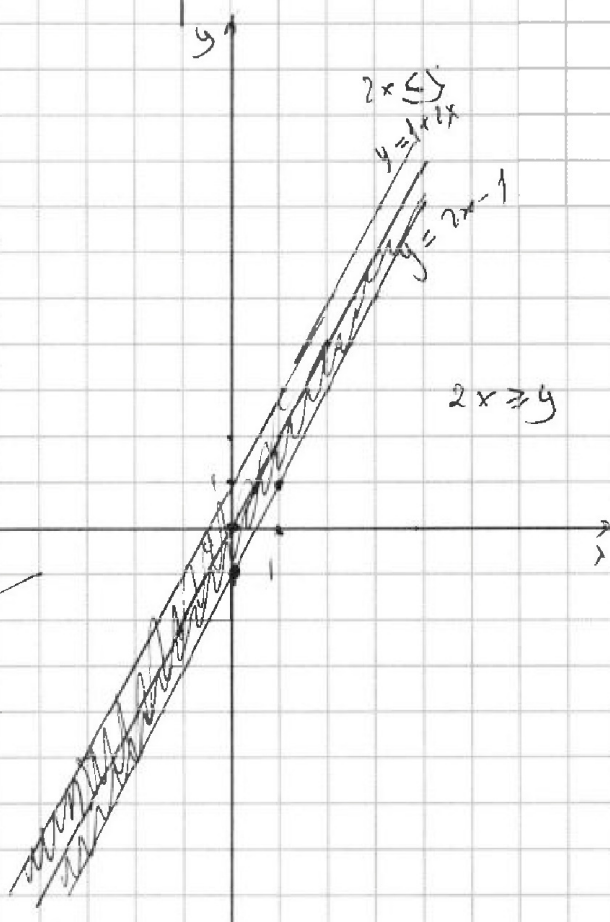
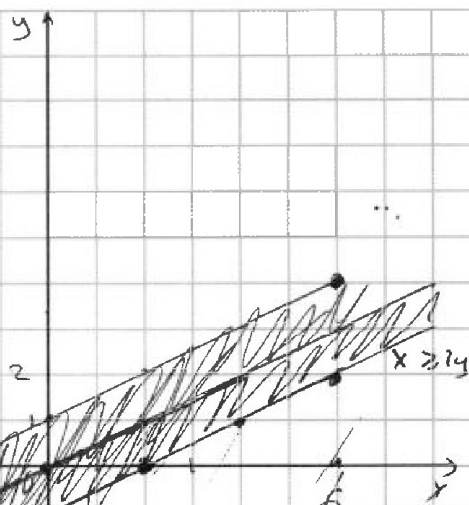
$$y-2x \leq 1$$

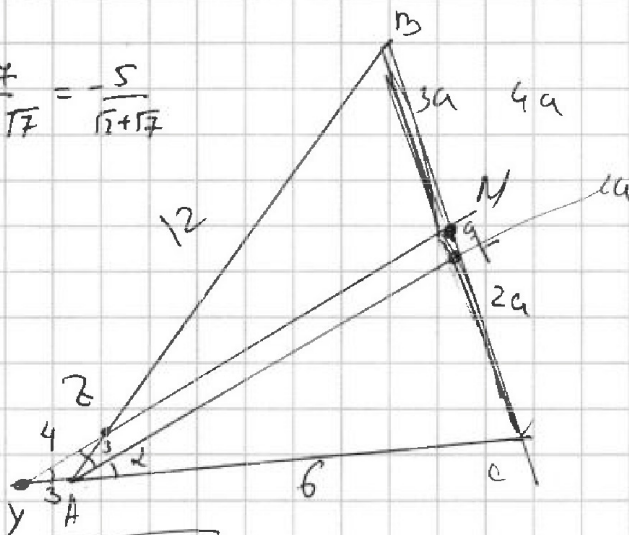
$$y \leq 1+2x$$

$$3y+6x \rightarrow \min$$

$$\text{н. } 3(y+2x)$$

$$\begin{cases} y=2x & \text{в} \\ y \end{cases}$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n) \cdot (m+2n-7)$$

$$m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

$$\text{или } mn(m+2n+9) = 11 \cdot 2^2 \cdot 10$$

$$75 = 5^2 \cdot 3$$

$$\text{или } m+n=3$$

$$(m+2n)(m+2n-7)$$

$$m+2n \geq 7$$

$$m+2n \geq 8$$

$$5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$mn(m+2n+9)$$

$$(m+2n+9) \geq 17$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 11 \cdot 2^2 \\ mn(m+2n+9) = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \\ mn(m+2n+9) = 11 \cdot 2^2 \end{cases}$$

$$q=2 \text{ и } 5^2 \text{ и } 3^2$$

натур

$$25 \text{ и } 9$$

$$\text{или } 2, 10 \text{ и } 14 \cdot 2^2$$

$$(m+2n, m+2n-7) = (7, m+n) = 1$$

$$\text{или } 7, 10 \text{ и } p^2 = 7$$

$$m+2n=7$$

$$m+2n-7 \leq m+2n$$

$$\begin{cases} m+2n=25 \\ m+2n-7=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+2n=75 \\ m+2n-7=68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+2n=77 \\ m+2n-7=70 \end{cases}$$

$$m+2n \geq 8$$

или

$$\begin{aligned} & 11 \cdot 2^2 \text{ и } 25 \cdot 3 \cdot 2^2 \\ & p^2 \text{ (p=11)} \quad p=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & m+2n-7 \text{ и } m+2n-7 \text{ - простые} \\ & \text{числа} \Rightarrow p=2 \end{aligned}$$

$$m+2n=11$$

$$m+2n=11$$

натур

$$\begin{aligned} & n=1 \\ & 2 \\ & 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3 \quad 4 \\ & 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 20 \quad 25 \\ & 4 \quad 15 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

$$m+n=15$$