



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть q - шаг арифм. прогрессии
Тогда
$$\begin{cases} (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2q \\ 3x^2 = (x^2 + 2x)^2 + 4q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4q = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 \\ 2q = (x^2 + 2x)^2 - 3x - 3 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$3x^2 - (x^4 + 4x^3 + 4x^2) = 2(x^4 + 4x^3 + 4x^2) - 6x - 6$$

~~$2x^4 + 4x^3$~~

$$3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

(Подобрали корень $x = -1$)

$$1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & x + 1 \\ -x^4 + x^3 & \hline \hline 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & \\ -3x^3 + 3x^2 & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x + 1)(x^3 + 3x^2 - 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+1)(x^3+3x^2-2) \text{ Тут ещё корень } x=-1$$

$$x^3+3x^2-2$$
$$-1+3-2=0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-2 & x+1 \\ \hline x^3+x^2 & x^2+2x-2 \\ \hline -2x^2-2 & \\ 2x^2+2x & \\ \hline -2x-2 & \rightarrow \\ -2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(x^3+3x^2-2) = (x+1)^2(x^2+2x-2)$$

$$x^2+2x-2$$

$$D = 4+8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = -1-\sqrt{3}$$

$$x_2 = \sqrt{3}-1$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -1-\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}-1, x_3 = -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на равенство

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} +$$

$$9x + 0y \leq 9$$

$$x + y \leq \frac{3}{2}$$

$$3x - y = a \Rightarrow 3y = 9x - 3a$$

$$x - 3y = -8x - 3a$$

$$x - 3y - (3x - y) =$$

$$= -8x - 4a = -4$$

$$-1 \leq a \leq 1$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{12}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{5}{4}$$

$$8x + 4y = 2 \cdot \frac{3}{4} + 5 = 11$$

$$6x - 8y$$

$$+ 18x - 6y = 8x - 4y = 6x - 2y + 2(x - 2y)$$

$$3 \cdot (x - 3y) + 2(3x - y) =$$

$$= 3x - 9y + 6x - 2y = 9x - 11y$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3$$

$$-1 \leq 3x - y \leq 1$$

$$x - 3y = a \in (2.5; 3]$$

$$3x = 3a + 3y$$

$$3y + 3a - 8y + (7.5; 9) \leq 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

~~Сумма~~ Сложим выражения из системы (2) и получим $\Rightarrow$
Очевидно, что мы можем сложить и вычитать,

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x-3y + 3x-y = 4x-4y \\ -3 \leq x-3y \leq 3 \\ + \quad -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ \hline -4 \leq 4x-4y \leq 4 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \quad (1) \end{array}$$

в сумме очевидно, что сумма $\leq$ если сумма $\max$

* см 2 стр

$$\begin{array}{r} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ \hline -3 \leq -2x-2y \leq 3 \\ 1.5 \geq x+y \geq -1.5 \quad (3) \end{array}$$

~~$$6 \cdot (1) + 2 \cdot (2) = 2$$~~

$$6 \cdot (3) + 2 \cdot (1)$$

$$\begin{array}{r} -2 \leq x-2y \leq 2 \\ + \quad -9 \leq 6x+6y \leq 9 \\ \hline -8 \leq 8x+4y \leq 11 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x+4y \leq 11$$

и при $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$ тогда достигаются

при этом $|x-3y| = \left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = \left| \frac{-12}{4} \right| = 3 \leq 3$

$$|3x-y| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = \left| \frac{4}{4} \right| = 1 \leq 1$$

все неравенства выполнены

Ответ: $\max(4y+8x) = 11$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \text{1) } y \geq 3x \\ & \text{2) } \frac{1}{3}x < y < 3x \\ & \text{3) } y \leq \frac{1}{3}x \\ & \text{4) } 3y - x \leq 3 \\ & \text{5) } y - 3x \leq 1 \\ & \text{6) } y - x \leq 1 \end{aligned}$$

Докажем, что $-3 \leq (x-3y) - (3x-y) \leq 3$

пусть $(x-3y) = a$ $2 \leq a \leq 3$ если $a < 2$, то мы докажем (мы рассматриваем a , при котором $k \rightarrow \max$)

$$\begin{aligned} 3x &= 9y + 3a \\ 3x - 8y &\leq 9y + 3a \leq 9y + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 3x &= k = (x-3y) - (3x-y) = \\ &= (x-3y) + (y-3x) = \end{aligned}$$

$$y - 3x = -8y - 3a \leq -8a - 3a \leq -8a - 6$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3$$

$$-8a - 9 \leq y - 3x \leq -8a - 6$$

$$k \leq -8a - 3 \Rightarrow \text{мы хотим}$$

доказать, что если $y < -\frac{3}{4}$, то $k \leq 3$ все равно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y < -\frac{3}{4}, \text{ то}$$

$$1 \leq x - 3y \leq 3$$

$$x - 3y < 3 - \frac{9}{4}$$

$$x < \frac{3}{4}$$

$$x \in 3 - y \leq 3 - y - 3x \leq -k$$

$$y \leq \frac{3}{4}$$

$$x < -k - \frac{3}{4}$$

$$x < \frac{3}{4}, y < \frac{3}{4}$$

$$8x + 4y \leq 6$$

$$-1 \leq 3x - y \leq 1$$

$$\leq 3x - 4y \leq \frac{1}{4}$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3$$

$$3y - 3 \leq x - 3 \leq 3 + 3y$$

$$x < 3 - 3 \cdot \frac{3}{4}$$

$$x < \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 4y \leq 8 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= 6 - 3$$

$$\Rightarrow < 3$$

а мы пока-

зали, когда это = 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
4 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n) - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$75q^2 = 3 \cdot (5q)^2$$

Заметим, что $m+n-9 \geq 1 \Rightarrow m+n-3 \geq 7 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m+n \geq 10$

Заметим, что A не может ≥ 8 ,
 ну если $\frac{A}{3}$ равняется, значит $A:3$
 ну если $\frac{A}{3}$ значит $m(m+n):3$ или
 $m+n-9:3$, ну если $(m+n):3$, то и

$m+n-9:3$, т.к. $m+n-9 \equiv m+n \equiv 0$,
 аналогично и если $m+n-9 \equiv 0 \Rightarrow 3 \nmid m+n \Rightarrow$
 ну значит $A:9$, ну значит $q^2=3$, т.к.

$75q^2:3$, а q - простое, единственное простое
 которое $:3$ это 3, ну значит какая-
 то из скобок $:9$

$m+n-9 \equiv 0$, то и $m+n \equiv 0 \Rightarrow A:3^4 \Rightarrow$
 $m+n \equiv 0 \Rightarrow m+n-9 \equiv m+n \equiv 0 \Rightarrow A:3^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 13p^2, B = 75q^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что у В 5 простых делителей,
а у А 3 простых делителя,
значит у В какая-то скобка-простое
число (пу если нет, то у всех скобок ≥ 2
пр. делит $\Rightarrow$ всего ≥ 26)
Аналогично для А

$$(m+n-9)(m+n) = 13q^2$$

Случаи:

$$1) \begin{cases} m+n-9 = 13q^2 \\ m+n = 1 \end{cases} \Rightarrow m+n-9 = 1-9 = -8 \Rightarrow \Rightarrow \text{против.}$$

$$2) \begin{cases} m+n-9 = 13q \\ m+n = q \end{cases} \Rightarrow m+n-9 = 13m+13n \\ 12m+12n+9=0, \\ m \text{ и } n > 0 \Rightarrow \text{против.}$$

$$3) \begin{cases} m+n-9 = 13 \\ m+n = q^2 \end{cases} \Rightarrow m+n = 22, \\ \text{но } 22 - \text{не } q^2 \Rightarrow \Rightarrow \text{против}$$

$$4) \begin{cases} m+n-9 = 1 \\ m+n = 13q^2 \end{cases} \Rightarrow m+n = 10 \text{ но } 10 \neq 13q^2 \Rightarrow \Rightarrow \text{против.}$$

$$\begin{cases} m+n-9 = q \\ m+n = 13q \end{cases} \Rightarrow 13m+13n-117=m+n \\ 12(m+n) = 117 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ таких пар нету:

Ответ: таких пар нету



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

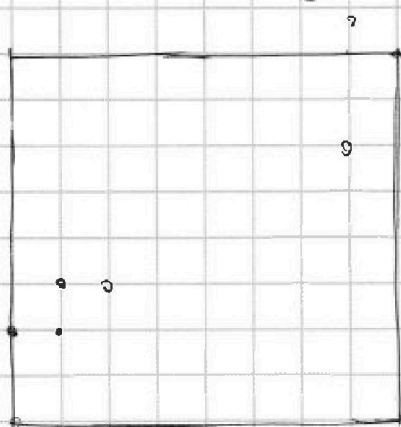
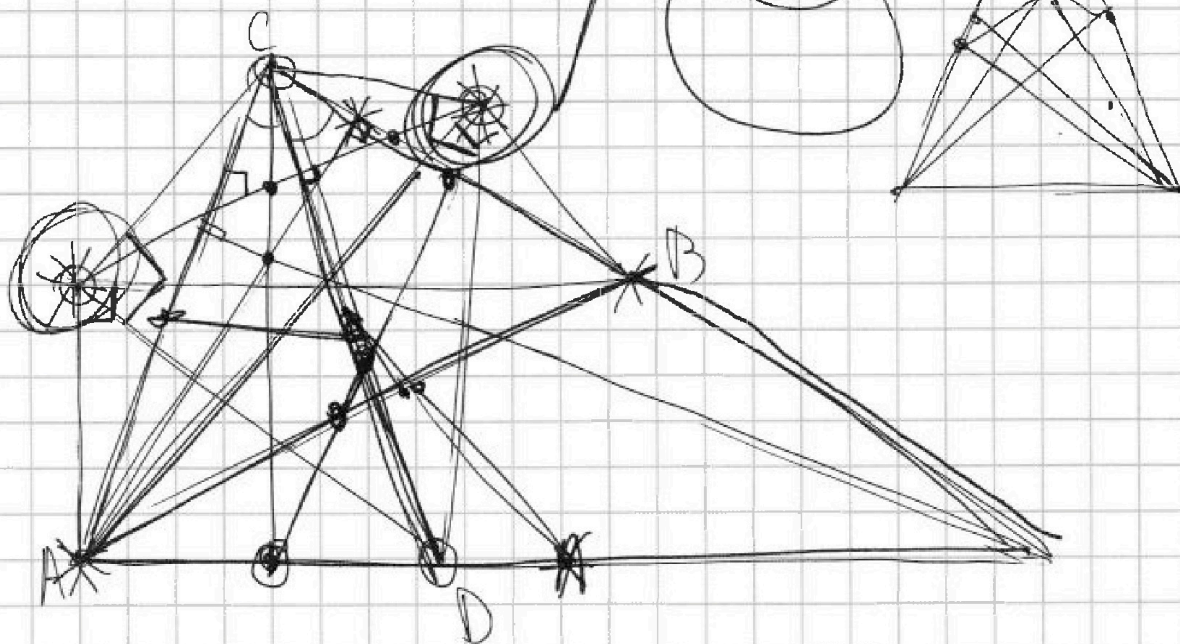
6
☐

7
☐

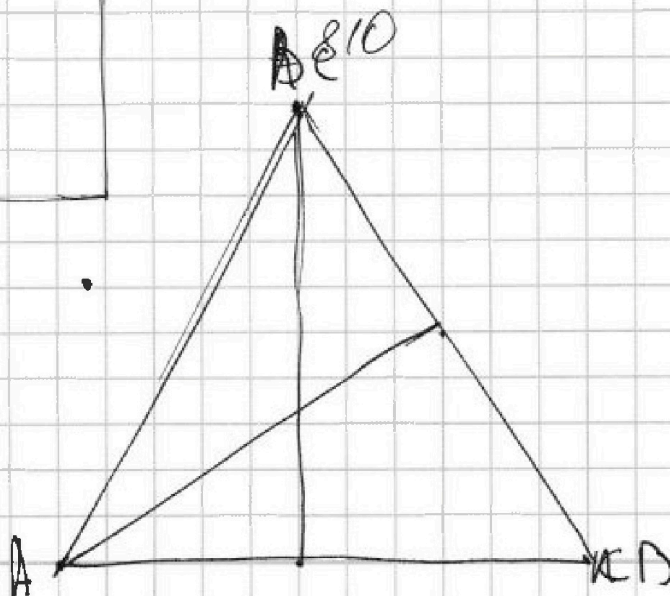
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$\begin{array}{r} 81 \text{ узел} \\ 81 \cdot 80 \\ \hline 2 \end{array} = \frac{81 \cdot 40}{4} =$$



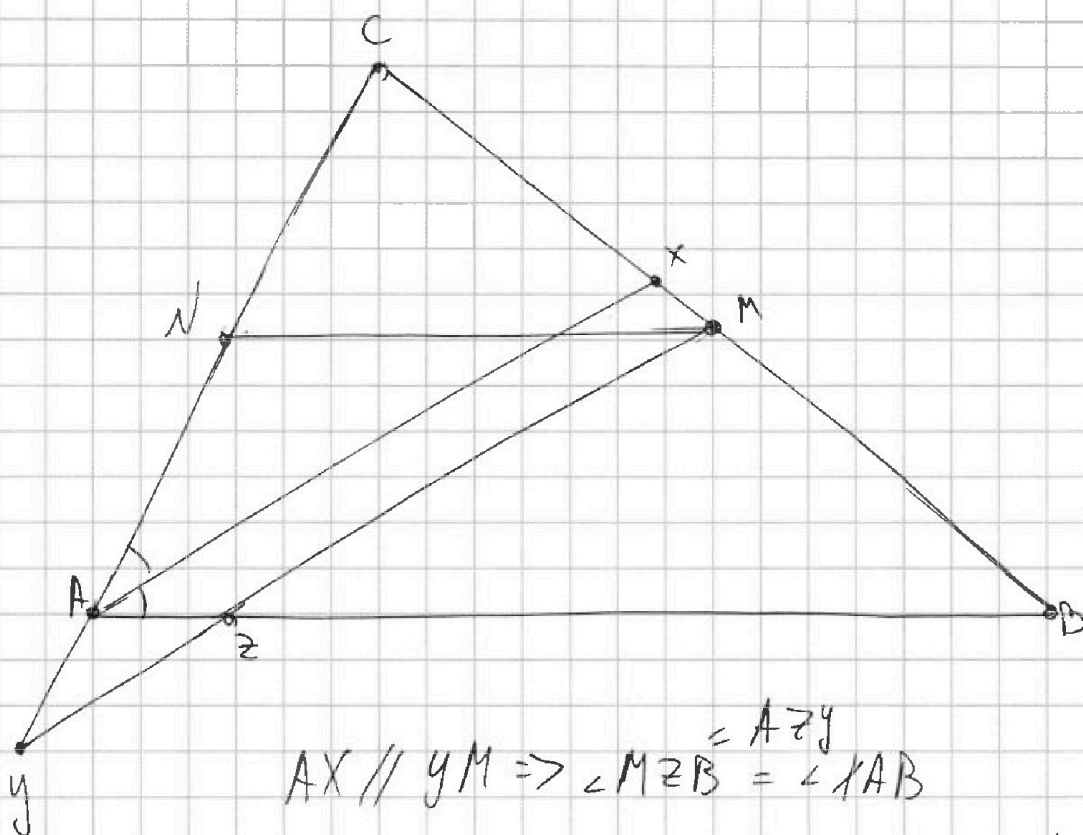


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 AX \parallel YM &\Rightarrow \angle MZB = \angle XAB \\
 \angle CYM &= \angle CAX \Rightarrow \angle AZY = \angle AYZ = \\
 &= \frac{\angle CAB}{2} \Rightarrow AZY - p/5
 \end{aligned}$$

проведем $NM \parallel AB$. NM - ср. лин $\Rightarrow NM = \frac{1}{2} AB$

$$AZ = AY = 6 \quad AN = \frac{1}{2} AC = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow YN = AY + AN = 9 + 6 = 15$$

$$\triangle YAZ \sim \triangle YNM \Rightarrow \frac{NY}{AY} = \frac{NM}{AZ}$$

$$NM = \frac{NY}{AY} \cdot AZ = \frac{15}{9} \cdot 6 = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 30$$

$$\cos \angle AYZ = \cos \angle 2 = \frac{\frac{1}{2} YZ}{AY} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

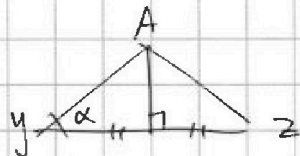


СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к. $\triangle AYZ - p/5 \Rightarrow \text{мед} \Rightarrow \text{восс}, \text{ } \varnothing$



$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

Тн $\cos$ для ABC , $AC=18$, $AB=30$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos 2\alpha =$$

$$= 18^2 + 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot -\frac{1}{9} = 18^2 + 30^2 + 4 \cdot 30 =$$

$$= 4(9^2 + 15^2 + 30) = 4(81 + 225 + 30) =$$

$$= 4(336) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 21 = 8^2 \cdot 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 8\sqrt{21}$$

$$\text{Ответ: } BC = 8\sqrt{21}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \quad x_3 = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \quad 0 \leq x \leq 6$$

$\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ $\sqrt{13} < 5$, $\sqrt{13} < \sqrt{5} \Rightarrow > 0$
докажем, что $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6$, тогда и $\frac{5 - \sqrt{13}}{2} < 6$,
т.к. второй < первого

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \vee 6 \quad \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 5 + \sqrt{13} \vee 12 \\ \sqrt{13} \vee 7 \\ 13 \vee 49 \end{array} \Rightarrow \Rightarrow x_1 \text{ и } x_2 \text{ подходят}$$

по 003
(и x_1 и $x_2 > 0$ это очевидно)

x_3 и x_4 :

$$5 - 2\sqrt{10} \vee 0$$

$$5 \vee 2\sqrt{10}$$

$$25 \vee 40 \quad , \quad 2\sqrt{10} > 5 \Rightarrow x_3 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_3$ не подходит

$x_4 > 0$ очевидно

$$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \vee 6$$

$$2\sqrt{10} \vee 7$$

$$40 \vee 49$$

$$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} < 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_4 \text{ подходит}$$

Ответ: пары $(x; y)$: $\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right) \vee \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right) \vee \left(\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}, \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на это равенство:

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

Заметим, что тут $x > 0$ и $y > 0$,

и в это все коэффициенты > 0 ,

пу тогда $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$ — монотонно

возрастающая функция ($x \in (0; +\infty)$)

и это очевидно, ну докажем

$$f(x_1) = x_1^4 + 5x_1^2 + \sqrt{x_1}, \quad f(x_2) = x_2^4 + 5x_2^2 + \sqrt{x_2}$$

пусть $x_1 > x_2$, хотим док-ть, что $f(x_1) > f(x_2)$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$$x_1^4 + 5x_1^2 + \sqrt{x_1} > x_2^4 + 5x_2^2 + \sqrt{x_2}$$

$$x_1^4 > x_2^4$$

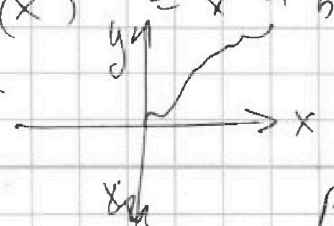
$$5x_1^2 > 5x_2^2$$

$$\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

и при $x > 0$ $f(x) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} \quad f(y) = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$f(x)$ —  y $f(y)$ такой — же гра-
фик $\Rightarrow$ решение этого
равенства, только, когда $y = x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

~~не подходит, не является корнем~~

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{6-x}$$

$$x+1 + 6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} = 3$$

$$-x^2 + 5x + 6 = 9$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

~~не подходит, не является корнем~~

$$2) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2$$

$$2 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$(x+1)(6-x) = \frac{9}{4}$$

$$-x^2 + 5x + 6 = \frac{9}{4}$$

$$-x^2 + 5x + \frac{15}{4} = 0$$

$$x^2 - 5x - \frac{15}{4} = 0$$

$$D = 25 + 15 = 40 = (2\sqrt{10})^2$$

$$x_1 = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \quad x_2 = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}$$

Теперь проверим 4 корня на ОДЗ:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь рассмотрим первое равенство,
и подставим туда уже $y = x$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$-(x^2 - 5x - 6)$, его корни по Th Виета

$$6 \text{ и } -1 \Rightarrow -(x^2 - 5x - 6) = -(x-6)(x+1) = (6-x)(x+1)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

ОДЗ: $-1 \leq x \leq 6$, но $x \geq 0 \Rightarrow$ $0 \leq x \leq 6$ но не рав.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 - 2\sqrt{(6-x)(x+1)} = 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + (x+1) - 2\sqrt{(6-x)(x+1)} + (6-x) = 2$$

$$((\sqrt{x+1}) + (\sqrt{6-x})) = 7$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}) + (\sqrt{x+1} + \sqrt{6-x})^2 = 2$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = t$$

$$t + (t+4) = 2 \quad t^2 + t - 2 = 0$$

по Th Виета $t_1 = -2$
 $t_2 = 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

в квадрате ABCD 25 узлов,
в квадрате DCFG без DC 20 узлов
в квадрате KFDG без DG и FD - 16 узлов

1 случай $C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{2}$
2 случай $25 \cdot 20$

в ABCD без AD = в DCEFG без DC, =
в KFDG без DG = 20 узлов

1 случай = $C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{2}$

2 случай = $20 \cdot 20$

3 случай = $20 \cdot 20$

$\Sigma = 400 + 400 + 190 = 990$ вариантов

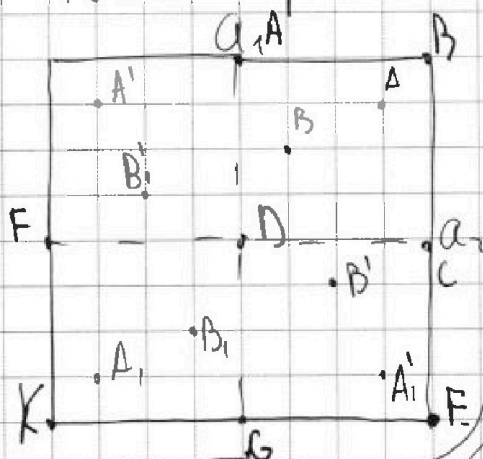


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на эту доску



Всего узлов $9 \cdot 9 = 81$ узел

Посчитаем сначала сколько лет потом выберем просто

замечим, что если в покрасить доску, а затем покрасить отражённую её (сначала отразим от a_1 , потом от a_2), то при повороте на 180° мы попадём в тот-же случай (я хочу посчитать сначала все раскраски, а потом поделить на 2, но такие случаи, где 2 отражённые точки покрашены надо делить на 2, т.е. тот-же случай мы уже учитывали когда все покрашены отцами) (для B и A, эти отражённые существуют)

У нас есть вариант выбрать 1 фишку в квадрате ABCD без AD и ещё 1 там-же, 1 фишку в квадрате ABCD, 1 там-же, 1 в DCEG, 1 в ABCD, 1 в AKFDG без DG, и мы получили все случаи с возможностью до поворота, ну посчитаем эти случаи

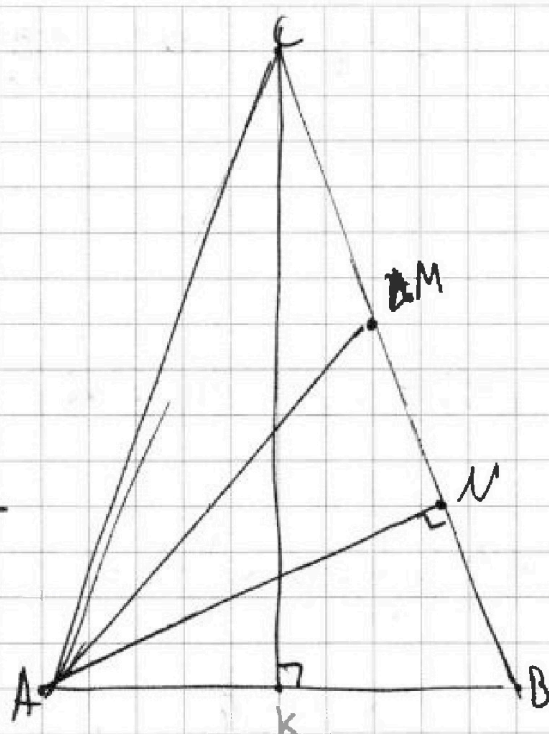
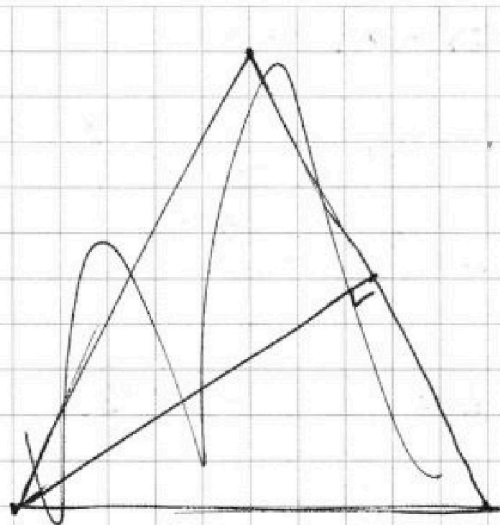


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Окр-ть Ω пересекает
BC второй раз в

N , $\angle ANM = 90^\circ$, т.к. AM - медиана $\Rightarrow$
 $\Rightarrow AN$ - высота

$$\angle ABC = \alpha \quad \cos \alpha = \frac{AB}{NB} \quad \sin \alpha = \frac{AN}{AB} = \frac{4}{5},$$

~~определим~~ сер пер к AB - точка K

$$\sin^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{KB}{BC} = \frac{AB}{2BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{2 \cos \alpha} =$$

$$= \frac{10}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{25}{3}, \quad BC = AC$$

$$\text{Ответ: } BC = AC = \frac{25}{3}$$

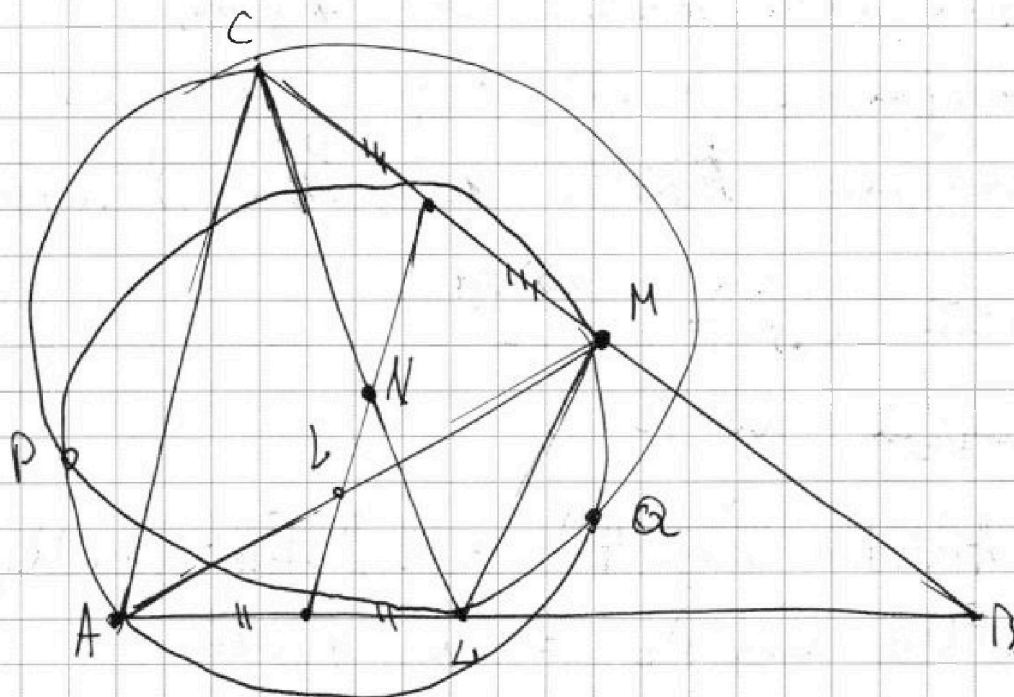
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



замечим, что окр-ти пересекаются в точках P и Q, PQ - их радиусы, $PQ \perp CA$, т.к. $PQ \parallel$ высоте из B, а также радиус $\perp$ линии центров $\Rightarrow CA \parallel$ линии центров, N - середина CL, проведём $l \parallel CA$ через L, l пройдёт через сер AB, т.к. это ср лин, исе и через L - сер AM (L и N - центры окр-тей, $l \parallel LM$, т.к. это ср лин в $AML \Rightarrow ML \parallel AC \Rightarrow ML$ - ср лин в $ABCD \Rightarrow L$ - сер AB $\Rightarrow \triangle ABC$ - р/б, т.к. биссектриса это медиана, ABC - р/б с основанием AB



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

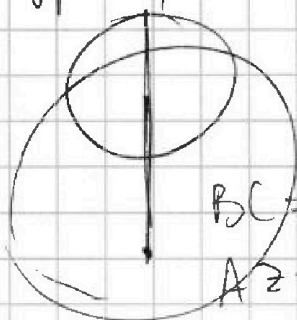
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-\frac{9}{4} - y = -1 \Rightarrow$$

Черновик

$$-\frac{3}{4} + \frac{15}{4} = 3$$

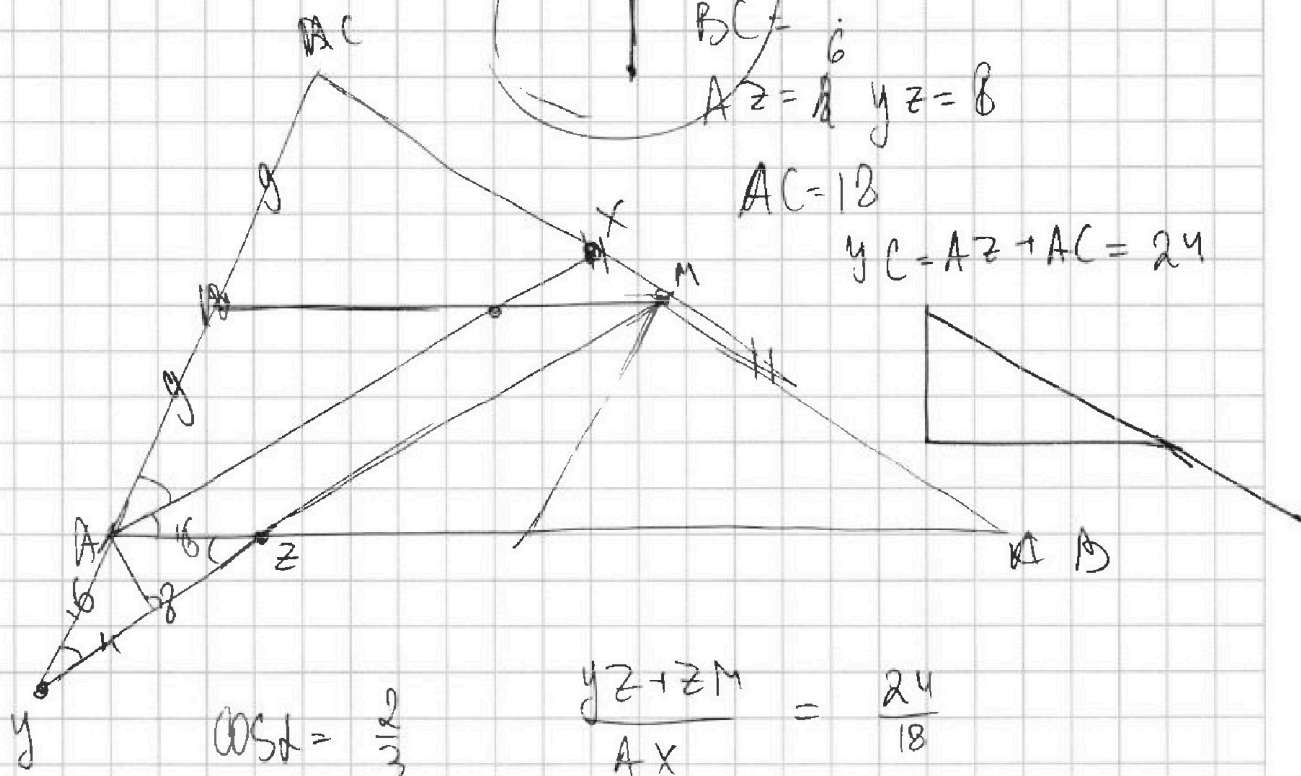


$$\begin{array}{r} 216 \\ 108 \end{array}$$

$$BC = 7$$
$$Az = 8 \quad yz = 8$$

$$AC = 12$$

$$yc = Az + AC = 24$$



$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\frac{yz + zm}{Ax} = \frac{24}{18}$$

$$\frac{6}{15} = \frac{6}{x} \Rightarrow v = 15$$

$$336 \div 3$$

$$\frac{336}{4} = 75 + 9 = \frac{84}{4} = 21$$

