



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a - 5-й член прогрессии, b - 10-й член прогрессии

$$\begin{cases} a = 6x + 18 \\ a + 2b = (x^2 - 4x)^2 \\ a + 6b = -3x^2 \end{cases}$$

$$2b = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$$

$$4b = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$$

$$3x^4 - 16x^3 + 43x^2 - 12x - 36 = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$$

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x^3(x-2) - 6x^2(x-2) + 5x(x-2) + 6(x-2) = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$x^2(x-2) - 4x(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x_3 = 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } x = 2; 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

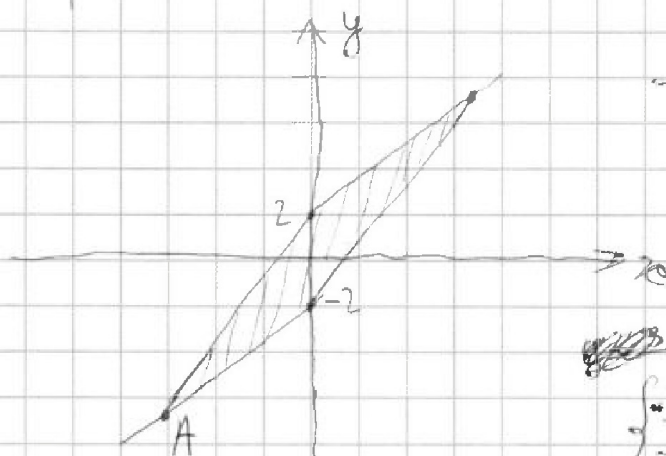
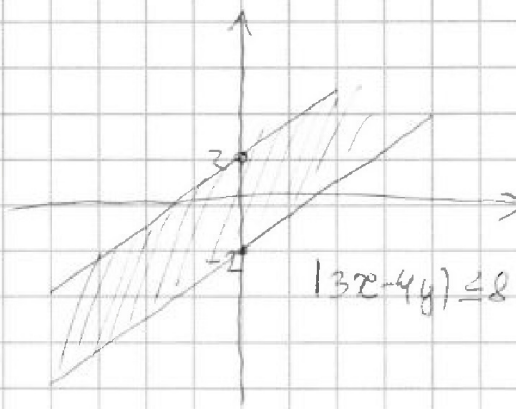
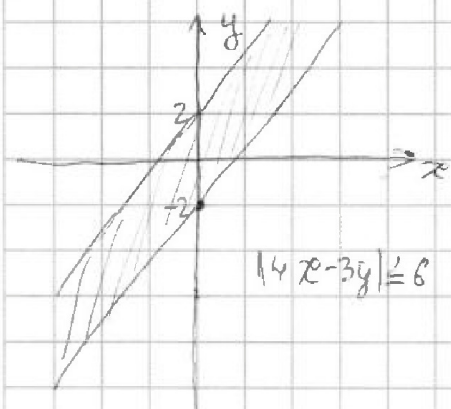
7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases}$$



— Область, при которой
целивые верны
В точке A $x \rightarrow \min$ и $y \rightarrow \min$

$\Rightarrow$ это точка, при которой
 $14x+7y \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x+4y=8 \\ -4x+3y=6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x-2 &= \frac{4}{3}x+2 \\ x &= \frac{-4}{\frac{16-9}{12}} = -\frac{48}{7} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{50}{7}$$

$$14x+7y = -88-50 = -138$$

Ответ: -138



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$1) \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$1.1) \begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2=21 \quad \emptyset$$

$$1.2) \begin{cases} m-n=13p \\ m-n+9=p \end{cases} \Rightarrow p = -\frac{3}{4} \quad \emptyset$$

$$1.3) \begin{cases} m-n=p^2 \\ m-n+9=13 \end{cases} \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=2$$

$$mn(m-n+3) = 3q^2$$

$$mn \cdot 4 = 3q^2 \Rightarrow q = \frac{2}{3} \sqrt{3mn}$$

$$mn = 21$$

$$1.3.1) m = 7; n = 3$$

$$1.3.2) m = 21; n = 1$$

$$1.3.3) m = 1; n = 21$$

$$2.1) \begin{cases} m-n=3 \\ m-n+9=q^2 \end{cases} \Rightarrow q^2=12 \quad \emptyset$$

$$2.2) \begin{cases} m-n=3q \\ m-n+9=q \end{cases} \Rightarrow 2q = -9 \quad \emptyset$$

$$2.3) \begin{cases} m-n=q^2 \\ m-n+9=3 \end{cases} \Rightarrow q^2=-6 \quad \emptyset$$

Ответ: (7; 3), (21; 1), (1; 21)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

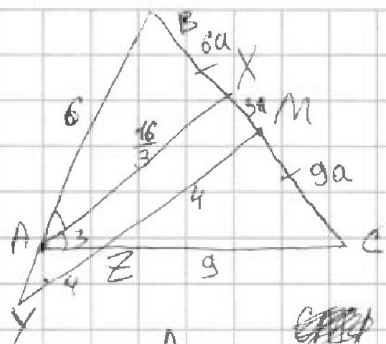
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AX \parallel EM \Rightarrow \triangle AXC \sim \triangle EMC \Rightarrow$$

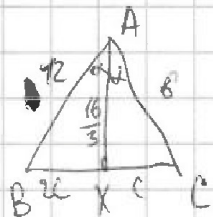
$$\Rightarrow CM = 9a; \quad XM = 3a; \quad BM = CM = 9a$$

$$\triangle EMC = 6; \quad \triangle AX = \frac{3}{4} \Rightarrow AX = \frac{4}{3} \cdot 6$$

$$\triangle ABX \sim \triangle YBM \Rightarrow 6 + 4 / \frac{4}{3} \cdot 6 = \frac{3}{2}$$

$$6 = 4; \quad AX = \frac{16}{3}$$

$$\triangle CX/BX = AC/AB \Rightarrow AB = 6$$



$$BX = 2c$$

$$CX = c$$

$$4c^2 = 144 + \frac{256}{9} - 2 \cdot 4 \cdot 16 \cos 30^\circ$$

$$2c^2 = 36 + \frac{256}{9} - 4 \cdot 16 \cos 30^\circ$$

$$c^2 = 4 \cdot \frac{49}{9} \Rightarrow c = \frac{14}{3}$$

$$c = \frac{14}{3}$$

$$BC = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt{y}$$

Справа и слева одинаковые, возрастающие функции

Если $x > y$, то л.ч. $>$ правой, если $x < y$, то пр.ч. $>$ левой $\Rightarrow x = y$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

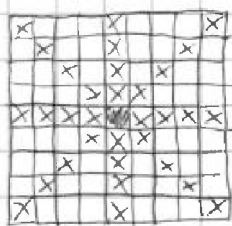
СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего вариантов закрасить 2 узла, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, не считать одинаковыми: $81 \cdot 80 / 2 = 3240$

Вопрос: ~~какое~~ ^{какое} количество возможных закрасиваний, что закрасенные узлы симметричны ^{относительно} центра: 16



Если поворачивать ^{получать} квадрат с таким закрасенным узлом, то ~~получается~~ ^{получается} из четырех полученных квадратов 2 будут 2 пары одинаковых

Если ~~закрасенные~~ ^{закрасенные} узлы не симметричны относительно центра, то при поворачивании получаются 4 разных квадрата. Таким образом, в 1-м случае на каждый квадрат приходится 1 другая квадрат, такой, что ~~при~~ ^{при} поворачивании ~~их~~ ^{их} можно получить друг из друга. Во 2-м случае на каждый квадрат приходится 3 таких квадрата.

Итоговое кол-во квадратов: $\frac{16}{2} + \frac{3240 - 16}{4} = 8 + 806 = 814$

Ответ: 814

~~2000~~ $\frac{4}{2} + \frac{32}{4} =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

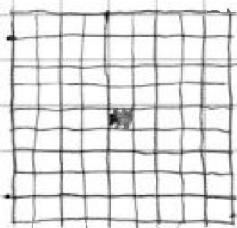
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a + 2b = 9$$

$$a + 6b = -33 - 12\sqrt{7}$$

$$2b = -21 - 6\sqrt{7}$$

$$b = -\frac{21}{2} - 3\sqrt{7}$$

$$11 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7}$$

$$(11 + 4\sqrt{7}) - (8 + 4\sqrt{7}) = 3$$

$$4b = -42 - 12\sqrt{7}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ -6 \quad 0 \quad 5 \end{array}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 20ab + 25$$

$$(a-b)^2 = (2ab-5)^2$$

$$1 - (2\sqrt{(x+6)(5-x)} - 5) = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$30 - x - x^2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$-2x - 1$$

$$\frac{121}{4}$$

$$11$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

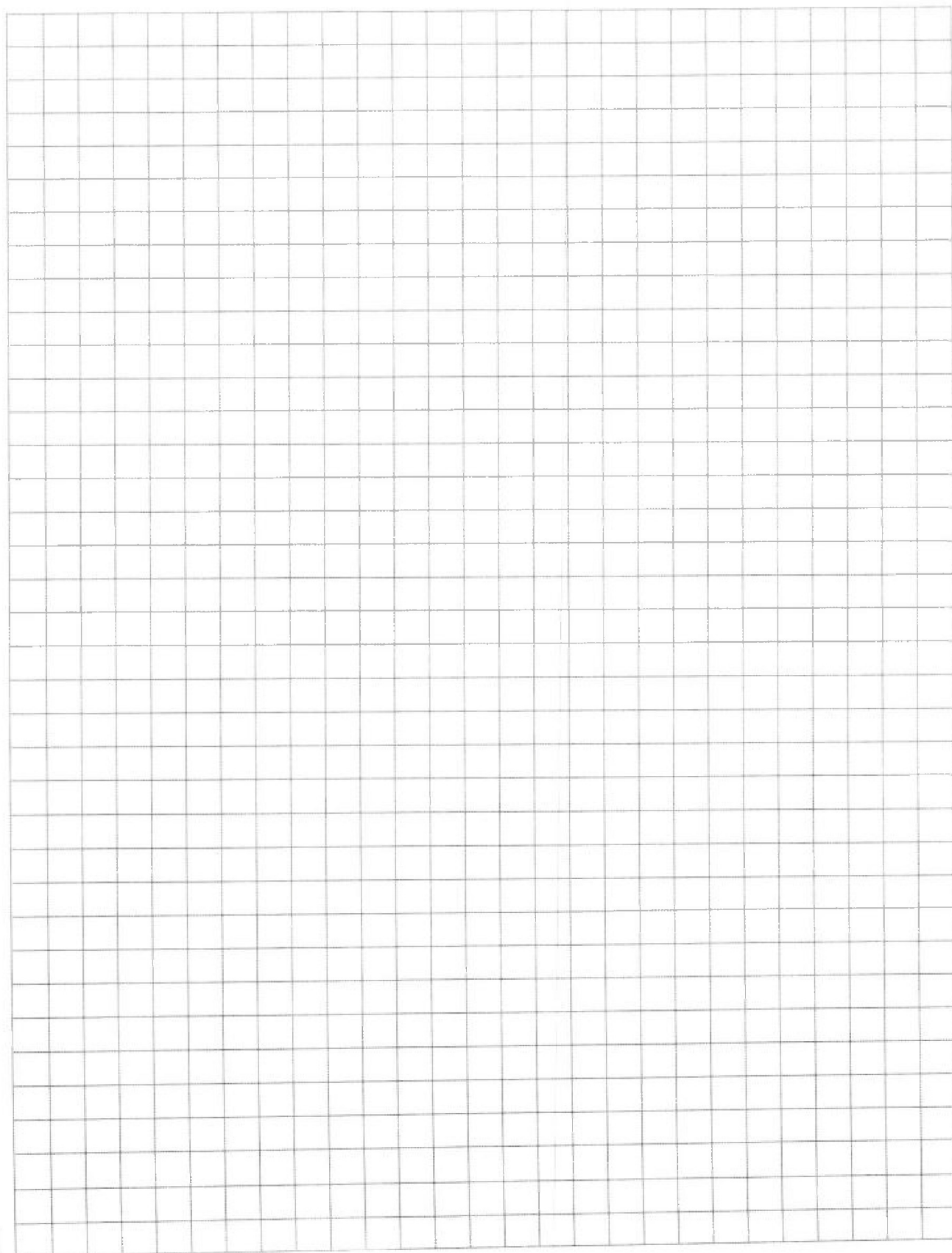
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a+4b=6x+18 \\ a+6b=(x^2-4x)^2 \\ a+10b=-3x^2 \end{cases}$$

$$4b = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 18x^2$$

$$\begin{aligned} 2b &= x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 \\ x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 12x - 36 &= 0 \end{aligned}$$

$$6b = -3x^2 - 6x - 18$$

$$2b = -x^2 - 2x - 6$$

$$-x^2 - 2x - 6 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$a^2 - b^2 + 5 = 2ab$$

$$a(1-b) = b(1+a) + 5$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a(1-b) + b(1+a) + 5 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(x+6)}$$

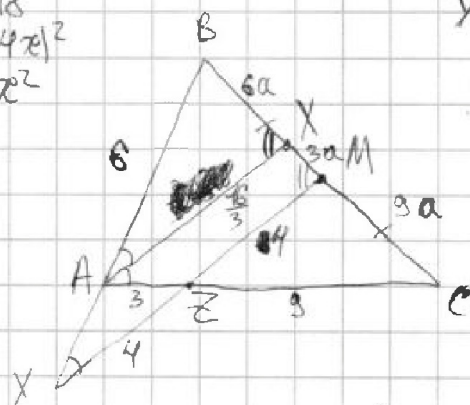
$$x+6 - 54x - 4(5-x)(x+6) = 2\sqrt{5-x(x+6)}$$

$$\begin{cases} a=6x+18 \\ a+2b=(x^2-4x)^2 \\ a+6b=-3x^2 \end{cases}$$



$$x(a+b)=c$$

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{c^2}{c^2}$$



$$d = \sqrt{b^2 - \frac{c^2 b^2}{a^2 + b^2}} = b \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2 + b^2}} = b \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{13 \cdot 14}{9}$$

$$\frac{16}{3} = b \sqrt{1 - \frac{c^2}{36 + 81}}$$

$$\frac{64}{81} = 1 - \frac{c^2}{114} \quad c = \sqrt{\frac{14 \cdot 114}{81}}$$

$$\begin{aligned} 2^6 \cdot 2^5 \cdot 3 \\ 16 \cdot 42a^2 + \frac{256}{3} &= 108 \\ 16 \cdot 288a^2 + \frac{256 \cdot 2}{3} &= 248 \\ \frac{16}{256} \cdot 216a^2 &= 180a^2 + \frac{256}{9} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{30-x-x^2}}{2\sqrt{30-x-x^2}}$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

$$a+b=c$$

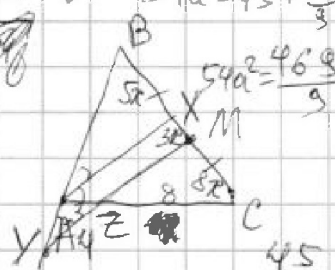
$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2+2ab \cos \alpha}{(a+b)^2}$$

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2+2ab \cos \alpha}{(a+b)^2}$$

$$108a^2 = 90 + \frac{128}{3}$$

$$54a^2 = 45 + \frac{64}{3}$$

$$54a^2 = \frac{469}{3}$$



$$\frac{9+b}{AX} = \frac{3}{2}$$

$$AX = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}b$$

$$\frac{\frac{8}{3} + \frac{2}{3}b}{b} = \frac{4}{3}$$

$$b=4$$

