



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CDM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$a+b=40$$

$$40-b=a$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$(40-2b)(40-2b+15) = 17p^5$$

$$\therefore 2 \Rightarrow 17p^5 : 2 \Rightarrow p^5 : 2 \Rightarrow p=2$$

$$a+b=40$$

$$(40-2b)(55-2b) = 17 \cdot 32$$

$$2200 - 80b - 110b + 4b^2 = 544$$

$$1656 - 190b + 4b^2 = 0$$

$$828 - 95b + 2b^2 = 0$$

$$2b^2 - 95b + 828 = 0$$

$$D = 9025 - 6624$$

$$D = 2401 = 49^2$$

$$b_{1,2} = \frac{95 \pm 49}{4}$$

$$b_1 = \frac{46}{4} \quad b \in \mathbb{N} \quad b_2 = 36 \Rightarrow a = 4$$

Ответ: $b=36; a=4$

$a, b = ?$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 49 \\ \hline 349 \\ 1520 \\ \hline 1960 \\ 2409 \end{array}$$

17

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 55 \\ \hline 110 \\ 2200 \\ \hline 1155 \\ 2200 \\ \hline 32 \\ \times 17 \\ \hline 224 \\ 32 \\ \hline 544 \\ \times 9 \\ \hline 2200 \\ 544 \\ \hline 1656 \\ \times 2 \\ \hline 3312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 95 \\ \hline 60 \\ 1080 \\ \hline 1140 \\ \times 828 \\ \hline 9024 \\ 9025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 23 \\ \hline 123 \\ 820 \\ \hline 943 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9025 \\ - 6624 \\ \hline 2401 \\ \times 49 \\ \hline 2160 \\ 1401 \\ \hline 11801 \\ \times 39 \\ \hline 10620 \\ 11801 \\ \hline 24009 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 17 \\ \hline 988 \\ 1728 \\ \hline 2448 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

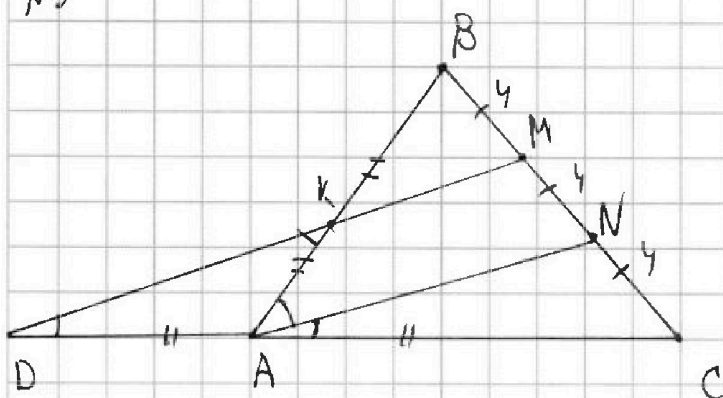
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3



Решение: т.к. $DM \parallel AN \Rightarrow$

① ~~В~~ $\triangle ABN$ по т. Фалеса

$$BK = KA = \frac{1}{2} AB$$

② $\triangle DMN$: по т. Фалеса:

$$DA = AC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow$$

$\triangle DAK$ равнобедренным

$$\angle KDA = \angle DKA \text{ но}$$

$$\angle KDA = \angle CAN \text{ т.к. } NA \parallel DM \Rightarrow$$

$$\angle BMN = \angle DKA = \angle CAN$$

$\triangle ABC$ по т. кос:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 2(\angle CAN)$$

$$144 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 - 2AB \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$144 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} AB^2$$

$$144 = \frac{3}{2} AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{144 \cdot 2}{3}} = \sqrt{96}$$

$$\begin{array}{r} 144 \cdot 2 \\ - 12 \cdot 24 \\ \hline 24 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

Заметим, что всегда 3 ряда заполнены учениками полностью.

Рассмотрим 1 ряд кол-во способов выбрать ученика на 1 из рядов: C_8^3

Эти выбранные 3 ученика однозначно рассаживаются

за каждый ряд. Т.к. выбираем н.к. 1 ряд из трёх то $3 \cdot C_8^3$ - кол-во
способов выбрать 3-х учеников и рассадить их за 1 из 3 рядов.

Рассмотрим оставшихся 5 человек. Для них $2 \cdot C_5^3$ - выбрать

3-их и рассадить за 1 из оставшихся 2 рядов.

Рассмотрим оставшихся 2 человека:

C_2^2 - выбрать 2 человека из 2. Теперь посмотрим как они могут

сидеть:

($a_j \geq a_i$ по росту)

a_j	a_i	☐
a_i	☐	a_j
☐	a_i	a_j

$3 \cdot C_2^2$ - кол-во способов выбрать
оставшихся двух и рассадить

на оставшийся ряд. Таким образом, всего способов:

$$3 \cdot C_8^3 + 2 \cdot C_5^3 + 3 \cdot C_2^2 = 191 \text{ способ.}$$

Ответ: 191 способ.

$$3 \cdot C_8^3 \cdot 2 \cdot C_5^3 \cdot 3 \cdot C_2^2 = 3$$

$$= 18 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 18 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$$

Ответ: $18 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

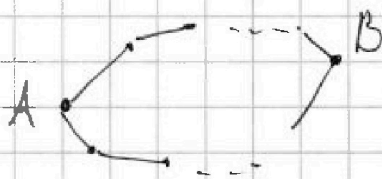
№6. Введён граф, где вершины - деревни, а рёбра - дороги.

Заметим, что т.к. из каждого города можно попасть в любой другой, то этот граф связный, значит у него на n вершин хотя бы $n-1$ дорога. Допустим, что граф по условию должен быть деревом:

Допустим это не так, значит ~~раз~~ значит у него $\geq n$ дорог. Тогда, в этом графе найдётся цикл:

а значит от деревни

A в B можно пройти



2 способами ?! . Значит наш граф - дерево. Значит в нём

как минимум две висячие вершины $\Rightarrow$ Деревья ≥ 6 .

Всего пусть минимум 4 деревни, есть n , тогда:

$$\frac{19+n}{2} = n-1 \text{ - рёбер.}$$

$$n=21$$

пусть всего n деревень $\Rightarrow$ 4 деревни со степ. 3, 4, 5, 4 и $n-4$ со

степ. верш. 7. всего рёбер: $n-1 = \frac{19+n-4}{2}$

$$2n-2 = 15+n$$

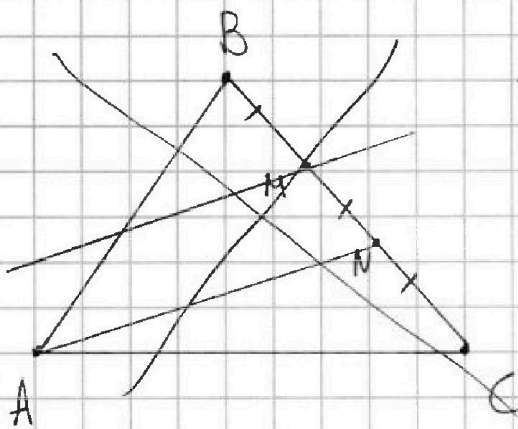
$$\boxed{n=17}$$

Ответ: 17.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\cos(2\alpha)$

$$3+4+5+7=$$

$$= 19$$

$$AB=CD$$

$$AB=?$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

Решение:

т.к. $DM \parallel AN$ то

$\triangle DMC$:

AN - ср. линия $\Rightarrow$

$$PA = AC = \frac{1}{2} AB$$

В $\triangle ABM$:

$$1) KM \parallel AN \quad (BM = MN) \Rightarrow AK = KB = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \triangle DAK - \text{равноб.}$$

$$\text{В } \triangle ANC: \text{ по т. кос: } NC^2 = AC^2 + AN^2 - 2AC \cdot AN \cdot \cos(\angle CAN)$$

$$\text{В } \triangle DMC \text{ по т. Менелас: } \frac{KM}{DK} \cdot \frac{DA}{AC} \cdot \frac{CB}{BM} = 1$$

$$\frac{KM}{DK} = \frac{1}{3}; DK = 3KM \Rightarrow DK = \frac{3}{4} DM$$

$$\text{В } \triangle DAK \text{ по т. кос: } AK^2 = DA^2 + DK^2 - 2DA \cdot DK \cdot \cos(\angle CAN)$$

$$DK = 2DA \cdot \cos(\angle CAN)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$0 \leq \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{1-|x+y-2|} \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

$$\text{Т.к. } x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\textcircled{1} \quad x+y=1 \quad (1)$$

$$\textcircled{2} \quad x+y=2 \quad (2)$$

$$\textcircled{3} \quad x+y=3 \quad (3)$$

$$(1) \quad x+y=1 \Rightarrow \sqrt{2-x^2-y^2} + \sqrt{1-1} = 1$$

$$\sqrt{2-x^2-y^2} = 1 \uparrow^2$$

$$2-x^2-y^2=1$$

$$x^2+y^2=1$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x; y \leq 1$$

$$x=-1 \Rightarrow y=2 \quad x^2+y^2 > 1 \quad ?!$$

$$x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x^2+y^2=1 \quad \textcircled{1}$$

$$x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x^2+y^2=1 \quad \textcircled{1}$$

$$y=-1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow x^2+y^2 > 1 \quad ?!$$

$$(2) \quad x+y=2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{4-x^2-y^2} + 1 = 1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$-4 \leq x; y \leq 4$$

$$\textcircled{1} \quad x=-4 \Rightarrow y=6 \Rightarrow x^2+y^2 > 4 \quad ?!$$

$$\textcircled{2} \quad x=-3 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z} \quad ?!$$

$$\textcircled{3} \quad x=-2 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x^2+y^2 > 4 \quad ?!$$

$$\textcircled{4} \quad x=-1 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z} \quad ?!$$

$$\textcircled{5} \quad x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x^2+y^2=4; x+y=2 \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{6} \quad x=1 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z} \quad ?!$$

$$\textcircled{7} \quad x=2 \Rightarrow y=0 \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{8} \quad x=3 \Rightarrow y=-1 \quad x^2+y^2 > 4 \quad ?!$$

$$\textcircled{9} \quad x=4 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow x^2+y^2 > 4 \quad ?!$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7 (Продолжение)

(3) $x+y=3 \Rightarrow \sqrt{6-x^2-y^2} = 1$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$-2 \leq x, y \leq 2$$

① $x=-2 \Rightarrow y=5 \Rightarrow x^2+y^2 > 5$ (?)

② $x=-1 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x^2+y^2 > 5$?!

③ $x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x^2+y^2 > 5$?!

④ $x=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x^2+y^2=5$ ✓

⑤ $x=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x^2+y^2=5$ ✓

Order: $(0; 1); (1; 0); (0; 2); (2; 0); (1; 2); (2; 1)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(x; y) = ?$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 2$$

$$|x+y-2| \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

$$x+y = 1; 2; 3$$

① $x+y=1 \Rightarrow$

$$\sqrt{2-x-y^2} = 1$$

$$2-x-y^2 = 1$$

$$\begin{cases} 1 = x+y^2 \\ 1 = x+y \end{cases}$$

② $x+y=2$

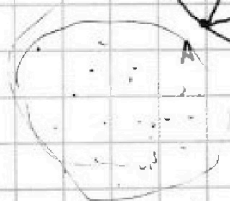
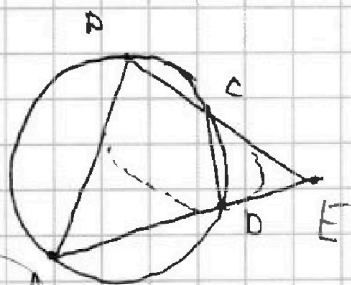
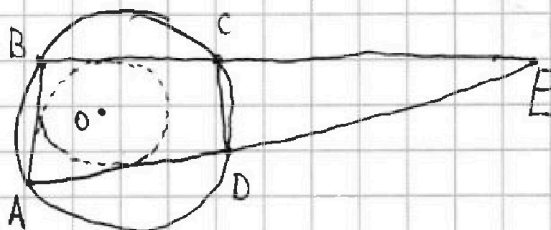
$$\sqrt{4-x^2-y^2} = 0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

③ $x+y=3$

$$\sqrt{6-x^2-y^2} = 1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases}$$



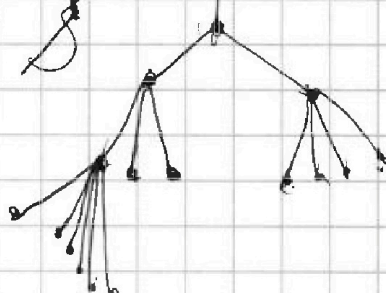
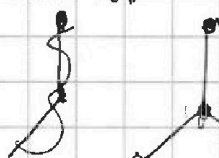
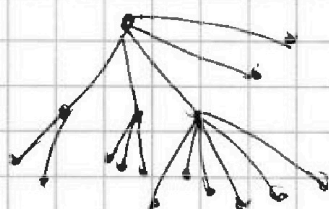
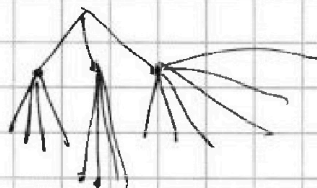
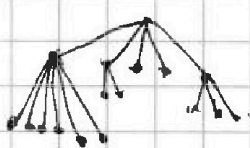
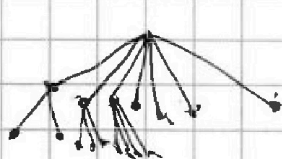


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

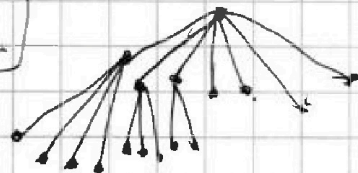
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{19+n}{2} = n-1$$

$$19+n = 2n-2$$

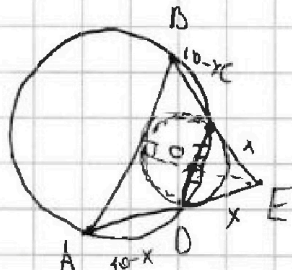
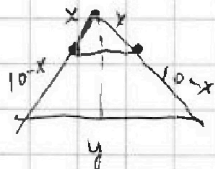
$$n = 21$$



$$\frac{19+(n-4)}{2} = n-1$$

19

$$\frac{10-x}{x}$$



$$BE = 10$$

$$(ED + DO)_{\min}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} DM^2 - \frac{1}{2} AB \cdot DM \cdot (\cos \angle CAN)$$

$$16 = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{16} DM^2 - \frac{1}{4} AB \cdot DM (\cos \angle CAN) - \text{по т. кос в } \triangle BKM$$

$$\frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} DM^2 - \frac{1}{2} AB \cdot DM \cdot (\cos \angle CAN) = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{16} DM^2 - \frac{1}{4} AB \cdot DM (\cos \angle CAN)$$

$$\frac{3}{16} DM^2 = \frac{1}{4} AB \cdot DM (\cos \angle CAN) \quad | \cdot 4$$

$$\frac{3}{4} DM = AB \cdot (\cos \angle CAN)$$

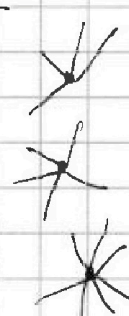
$$64 = DM^2 + DC^2 - 2 DM \cdot DC (\cos \angle CAN)$$

$$64 = DM^2 + AB^2 - 2 DM \cdot AC \cos(\angle CAN)$$

$$a_1 < a_2 < \dots < a_3$$



$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 50$$



$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$$

$$3(C_2^3 + C_3^3 + C_2^2) =$$

=

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3+6 \\ 3+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 32 \\ \hline 108 \\ + 108 \\ \hline 1728 \end{array} \quad \begin{array}{r} 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \\ + 168 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 87 \times 2 \\ \hline 174 \\ + 174 \\ \hline 348 \\ \times 3 \\ \hline 1044 \end{array} \quad \frac{87}{3} = 29$$

