



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$$

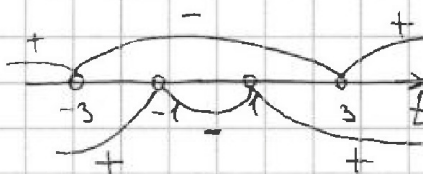
$$D = 32t^2 - 4(9t^2 - 9) = -4t^2 + 36 = -4(t^2 - 9) = -4(t-3)(t+3)$$

Чтобы было 2 различных корня, D должен быть больше 0;
т.е. $-4(t-3)(t+3) > 0$

По т. Виета: $x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9 = 9(t^2 - 1) = 9(t-1)(t+1)$, произведение корней должно быть положительным по условию, т.е.
 $9(t-1)(t+1) > 0$;

Составим систему:

$$\begin{cases} -4(t-3)(t+3) > 0 \\ 9(t-1)(t+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)(t+3) < 0 \\ (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$a^2 + b^2 + 2ab + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

Если $a-b=12$, $b=a-12$, тогда $(2a-12)(2a-9) = 2(a-6)(2a-9) = 19p^4$;

$2(a-6)(2a-9) \equiv 0 \pmod{2}$, значит и $19p^4 \equiv 0 \pmod{2}$, но $19 \not\equiv 0 \pmod{2}$,
тогда $p^4 \equiv 0 \pmod{2}$, но p - простое, единств. простое число, кратное 2 - 2;
тогда $p=2$, $2(a-6)(2a-9) = 19 \cdot 16$

$$2a^2 - 9a - 12a + 54 = 152$$

$$2a^2 - 21a - 98 = 0$$

$$D = 441 + 98 \cdot 2 \cdot 4 = 1225 = 35^2$$

$$a = \frac{21 \pm 35}{4} = 14$$

$$a = \frac{21 - 35}{4} = -3,5$$

но по условию a - натуральное, значит
 $a=14$, $b=a-12=14-12=2$.

Ответ: $a=14$, $b=2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Представим деревья и дороги между ними в виде графа.

По условию мы можем добраться из любой вершины в любую другую, причем единственным образом, а значит это связный граф без циклов. То есть именно такой граф — дерево, а значит если в нем n вершин, то

ребер $n-1$. Также в связном графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству ребер, т.к. если

мы сложим все степени, каждое ребро посчитается 2 раза. Тогда пусть количество деревьев — n , тогда дорог $n-1$, а сумма степеней ~~в~~ вершин ~~степеней~~ 1 равна $5+6+7+9+(n-4) = n+23$.

Получаем уравнение:

$$23+n = 2(n-1)$$

$$n = 25.$$

Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$2) \sqrt{1-|x-y-1|} \geq 0 \quad | \quad 1) 2x-2y-x^2-y^2=1-(x-y-1)^2-2xy$$

$$1-|x-y-1| \geq 0$$

$$-1 \leq x-y-1 \leq 1$$

$0 \leq x-y \leq 2$, но т.к. x и y - целые, возможно 3 случая:
 $x-y=0$; $x-y=1$; $x-y=2$. Рассмотрим каждый из них.

$$2.1) x-y=0, x=y$$

$$\sqrt{1-(x-x-1)^2-2x^2} = \sqrt{1-1-2x^2} = \sqrt{-2x^2} \geq 0, \text{ только если } x=0, \\ \text{тогда } 0+0=0 \neq 2 \text{ - не подходит}$$

$$2.2) x-y=1, y=x-1$$

$$\sqrt{1-(x-x+1-1)^2-2x(x-1)} + \sqrt{1-|x-x+1-1|} = \\ = \sqrt{-2x^2+2x+1} = 1$$

$$-2x^2+2x+1=x$$

$$-2x^2+x+1=0$$

$$-2x(x-1)=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$y=-1 \text{ - подходит}$$

$$y=0 \text{ - подходит}$$

$$2.3) x-y=2, y=x-2$$

$$\sqrt{1-(x-x+2-1)^2-2x(x-2)} + \sqrt{1-|x-x+2-1|} =$$

$$= \sqrt{-2x^2+4} = 2$$

$$-2x^2+4=4$$

$$x=0, y=-2 : 0 \neq 2 \text{ - не подходит.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Итак, $x - y = 0$ и $x - y = 2$ не подходит,

значения $x - y = 1$,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(0; -1), (1; 0)$

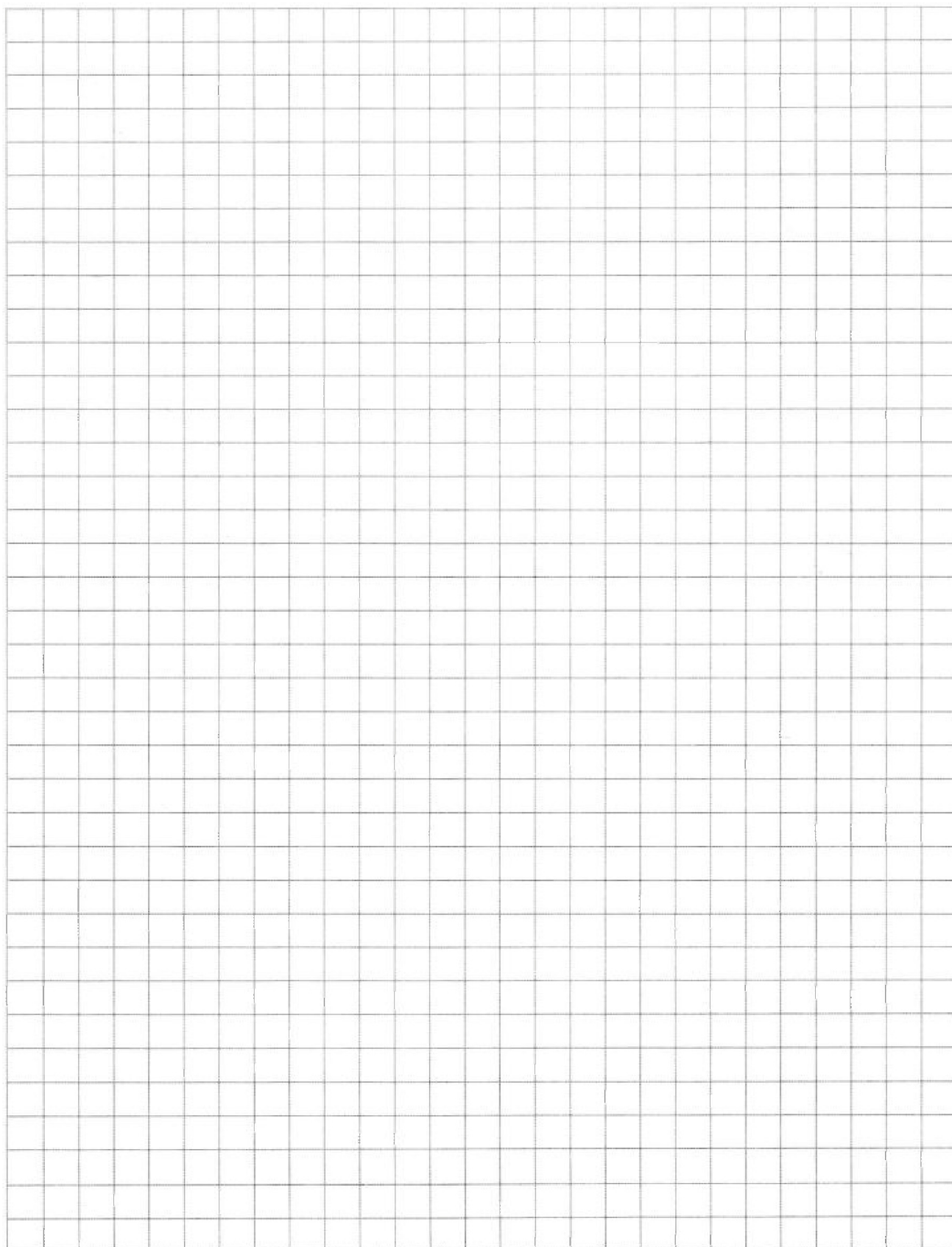


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

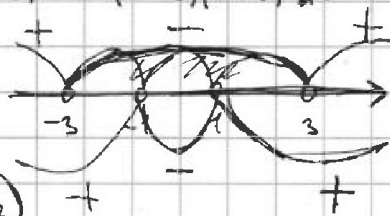
$$\cos 2(\angle CA \text{ ~~AB~~ N}) = \sqrt{3}$$

$$32t^2 - 4(9t^2 - 9) = 32t^2 - 36t^2 + 36 = -4(t^2 - 9) = -4(t-3)(t+3) \geq 0$$

$$x_1 + x_2 = -4\sqrt{2}t$$

$$x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9$$

$$\begin{cases} (t-3)(t+3) \leq 0 \\ 9(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$(-3; -1) \cup (1; 3)$$

$$x^2 + 8\sqrt{2}x + 27 = 0$$

$$D = 128 - 4 \cdot 108 = 20 = 4 \cdot 5$$

$$x = \frac{-8\sqrt{2} \pm 2\sqrt{5}}{2} = -4\sqrt{2} \pm \sqrt{5}$$

$$2) a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 5b = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = (2b+12)(2b+15) = 2(b+6)(2b+15) = 4(2b+15) = 4(2a-12)(2a-9) = 2(a-6)(2a-9)$$

$$p: 2 \quad 2(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 168$$

$$2b^2 + 15b + 12b + 90 = 152$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$128 + 524 - 62 = 0$$

$$2a^2 - 9a - 12a + 54 = 152$$

$$2a^2 - 21a - 98 = 0$$

$$D = 441 + 98 \cdot 8 = 1225 = 35^2$$

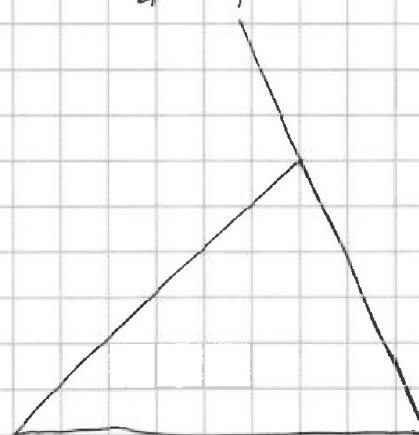
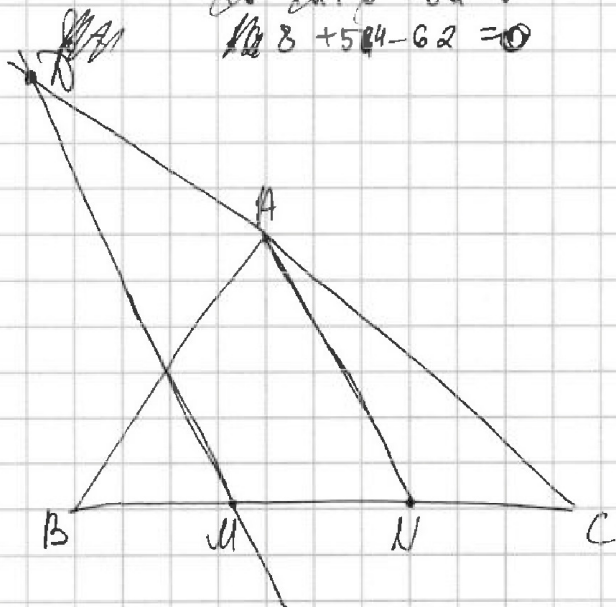
$$a = \frac{21 \pm 35}{4}$$

$$a = 14, b = 2$$

$$a = -3,5$$

$$\begin{array}{r} 484 \\ + 941 \\ \hline 1425 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1225 \\ \times 35 \\ \hline 6125 \\ + 12250 \\ \hline 1225 \end{array}$$



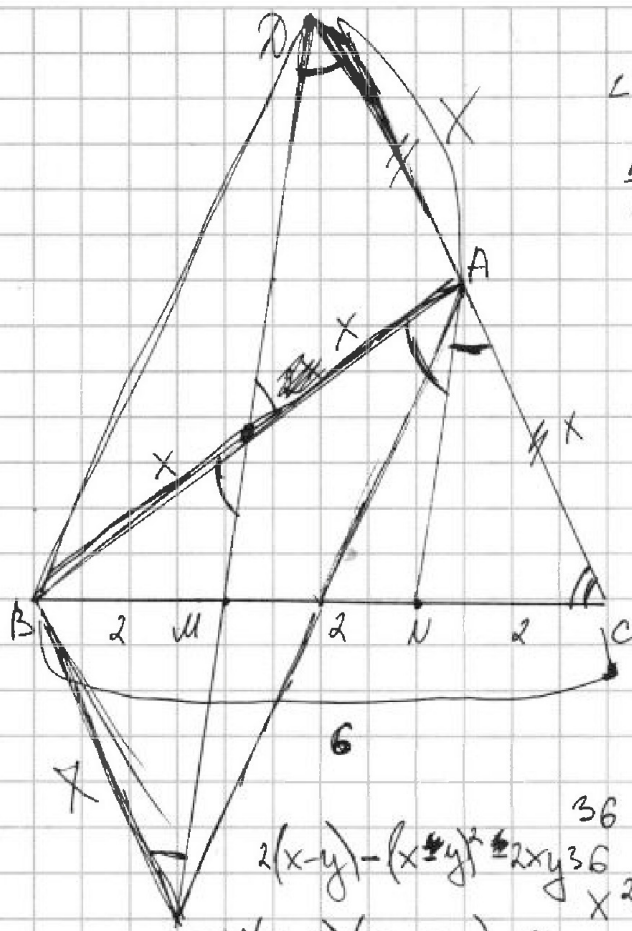


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle CAN = 45^\circ$$

$$\frac{NC}{MC} = \frac{AC}{CD} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2d = 1 - (2 \cdot \sin d \cdot \cos d)^2 = 1 - 4 \cdot \sin^2 d \cdot \cos^2 d = -\frac{3}{4}$$

$$4 \cdot \sin^2 d \cdot \cos^2 d = \frac{4}{4}$$

$$\sin d \cdot \cos d = \frac{\sqrt{4}}{4}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{1} = \frac{4}{2} = \frac{BN}{NC}$$

$$36 = x^2 + 4x^2 + 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \frac{3}{4}$$

$$2(x-y) - (x+y)^2 + 2xy \cdot 36 = 8x^2$$

$$x^2 = \frac{9}{2}$$

$$\max_{x,y} (x-y)(2-x+y) - 2xy$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}}, 2x = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

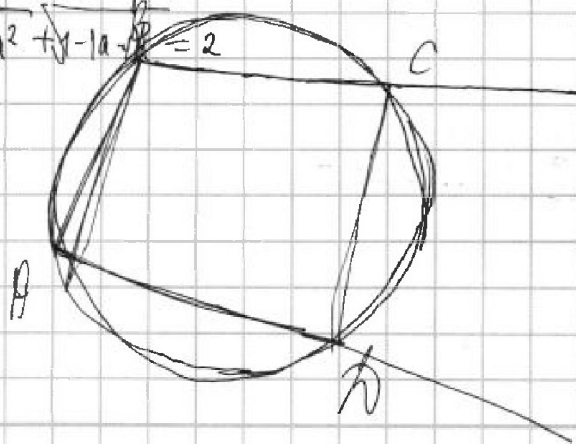
$$x-y=a, xy=b$$

$$\sqrt{a(2-a) - 2b} + \sqrt{1 - |a-1|} = 2$$

$$\sqrt{2(a-b) - a^2} + \sqrt{1 - |a-1|} = 2$$

$$\sqrt{1 - (x-y-1)^2 - 2xy} + \sqrt{1 - |x-y-1|} = 2$$

$$(x-y)(y-x) = xy - x^2 - y^2 + xy$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{1-(x-y-1)^2-2xy} + \sqrt{1-(x-y-1)^2-2xy} = 2$$~~

$$2(x-y) \geq x^2+y^2$$

$$\sqrt{1-(x-y-1)^2-2xy} + \sqrt{1-(x-y-1)^2-2xy} = 2 \quad 1-(x-y-1)^2 \geq 2xy$$

$$|x-y-1|=a, \quad xy=b \quad 0 \leq |x-y-1| \leq 1 \quad -1 \leq x-y-1 \leq 1 \quad x-y \geq \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\sqrt{1-a^2-2b} + \sqrt{1-a^2-2b} = 2$$

$$0 \leq x-y \leq 2$$

~~$$1-a^2-2b+1-a+2\sqrt{1-a^2-2b}+a^2+2b+2ab=4$$~~

$$x-y \geq \frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$$

$$2\sqrt{a^3-a^2+a(2b-1)+1-2b} = 2+2b+a^2+a$$

$$2\sqrt{a^2(a-1)+(2b-1)(a-1)} = 2b+1+a(a+1)+1$$

$$2\sqrt{(a-1)(a^2+2b-1)} = 2(b+1)+a(a+1)$$

$$4(a^3+2ab-a-a^2-2b+1) = 4b^2+8b+2+a^2(a^2+2a+1)+4a(b+1)(a+1)$$

$$4ab+2a^3-a^4-2a^2-8a-16b-4b^2-4a^2b+2=0$$

$$2a^2(a-2b)+8(a-2b)$$

$$-2xy(a+1)^2 = x^2+y^2-2xy-x^2-y^2$$

$$-2xy = (a+1)^2 - x^2 - y^2$$

$$2(x-y)+(x-y)(x+y)+2x^2$$

$$(x-y)(x+y+2)+2x^2$$



11: 10-10,

