МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2+4\sqrt{2}tx+9t^2-$ $-9=0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a-b=12$, а значение выражения $a^2+2ab+b^2+3a+3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM=MN=NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB=CD$. Найдите AB, если $BC=6$, $\cos(2\angle C\cancel{DM}\,AN)=-\frac{3}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED+DO$, если известно, что $BE=12$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

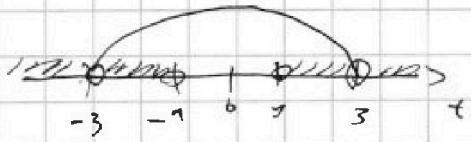
$x^2 + 4\sqrt{2}t\,x + 9t^2 - 9 = 0$; два корня $\Rightarrow D > 0$ (дискриминант);

по т-ме Виета (для приведённых кв. ур-й) $x_1 \cdot x_2 = \underbrace{9t^2 - 9}_{\text{свободный член}} > 0$, где x_1 и x_2 — корни $\Rightarrow$

$$\begin{cases} (4\sqrt{2}t)^2 - 4\cdot 1\cdot(9t^2-9) > 0 \\ 9t^2 - 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32t^2 - 36t^2 + 36 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 36 - 4t^2 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 > |t| \\ |t| > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t \in (-3; 3) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$



$\Rightarrow$

$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$ — при таких t выполняется условие $D > 0 \Rightarrow$ 2 разл. корня; и 2-е усл-е $\Rightarrow$ пр-е корней > 0.

Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} a-b=12 \\ a^2+2ab+b^2+3a+3b=19p^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=12 \\ (a+b)^2+3(a+b)=19p^4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-b=12 \\ (a+b)(a+b+3)=19p^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=a-12 \\ (a+a-12)(a+a-12+3)=19p^4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b=a-12 \\ (2a-12)(2a-9)=19p^4 \end{cases}; \quad 2a-12 \vdots 2 \quad (=2\cdot(\underbrace{a-6}_{\text{тоже целое т.к. } a\in\mathbb{N}}))$$

$\Rightarrow (2a-12)(2a-9) \vdots 2$, значит $19p^4$ тоже должно делиться на 2. $19 \not\vdots 2$, значит $p^4 \vdots 2$, но p – простое, оно делится только на само себя и 1. Значит единственный вариант, когда простое $p \vdots 2$, это когда $p=2$ (иначе $p \vdots p$ и $p \vdots 2 \Rightarrow$ не простое) $\Rightarrow$

$$(2a-12)(2a-9)=19\cdot 2^4 \Rightarrow (a-6)(2a-9)=19\cdot 2^3=19\cdot 8 \Rightarrow$$

$$2a^2-9a-12a+54=19\cdot 8 \Rightarrow 2a^2-21a+54-80-72=0$$

$$2a^2-21a+54-152=0 \Rightarrow 2a^2-21a-98=0 \Rightarrow$$

$$a=\frac{21\pm\sqrt{21^2+8\cdot 98}}{4}=\frac{21\pm\sqrt{441+800-16}}{4}=$$

$$=\frac{21\pm\sqrt{1241-16}}{4}=\frac{21\pm\sqrt{1225}}{4}=\frac{21\pm\sqrt{5\cdot 245}}{4}=$$

$$=\frac{21\pm\sqrt{5\cdot 5\cdot 49}}{4}=\frac{21\pm 35}{4}=\left[\begin{array}{l}\frac{56}{4}\\ -\frac{14}{4}\end{array}\right.=\left[\begin{array}{l}14\\ -\frac{7}{2}\end{array}\right.$$

$a\in\mathbb{N} \Rightarrow a>0 \Rightarrow a\neq -\frac{7}{2} \Rightarrow a=14$, тогда

$a-b=12 \Rightarrow b=a-12=14-12=2$

Можем проверить: $a^2+2ab+b^2+3a+3b=(a+b)(a+b+3)=16(16+3)=$
$=\underbrace{2}_{=p}{}^4\cdot 19$ ок!

Ответ: $a=14$; $b=2$

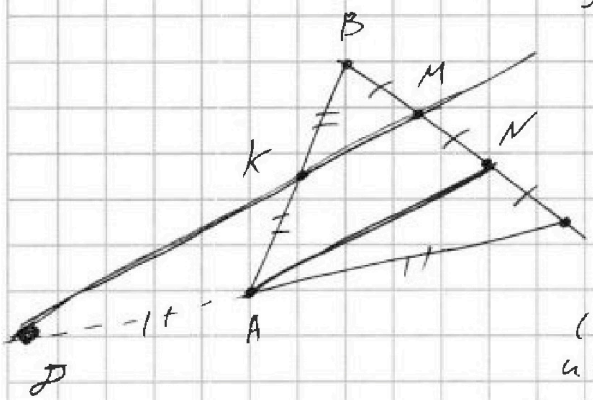
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3



AN – прямая в △ CDM, выходящая из середины стороны MC (т.к. MN = NC) и параллельна основанию DM => AN – ср. линия в △ CDM.

(по усл. прямая из M, содержит D и параллельна AN) => AN сод. середину стороны △-ка, т.е. A – середина DC

$DA = AC$

Аналогично в △ ABN DM – это ~~тоже~~ прямая, выходящая из середины стороны BN (MB = MN) и параллельная основанию AN => DM – ср. линия △ ABN => пересекает AB в середине. Пусть $(AD) \cap (AB) = K$, тогда

$AK = BK$

$AD + AC = DC$

$AK + BK = AB$

$AD = AC = \frac{DC}{2}$

$AK = BK = \frac{AB}{2}$

$AB = DC \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2} \Rightarrow AD = AC = AK = BK$

$AD = AK \Rightarrow$ в DAK – р/б $\Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$

$\angle AKD = \angle KAN$, как накрест лежащие при пар-ных $DM \parallel AN$.

$\angle ADK = \angle CAN$, как соответств. углы при пар-ных $DM \parallel AN$

т.к. $\angle ADK = \angle AKD$, то $\angle KAN = \angle CAN \Rightarrow$

$\angle CAK$ (он же $\angle CAB$) $= 2\angle CAN$, а его косинус мы знаем. Т.к. $\cos \angle 2CAN = \cos \angle CAB = -\frac{3}{4} < 0$, то $\angle CAB > 90° \Rightarrow$ △-ABC тупоугольный, но суть это не меняет

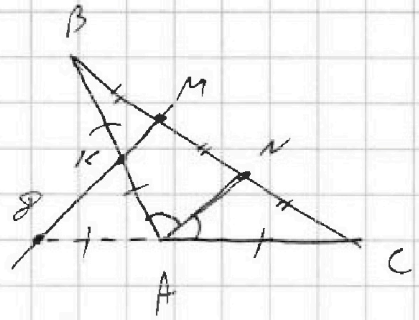
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Правильный чертёж



Как уже было доказано

$AP = AC = AK = BK = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$

Тогда запишем т-му кос-в для ~~ΔABC~~ ΔABC:

$AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos\angle CAB = BC^2$

$AC = \frac{AB}{2}$; $\angle CAB = 2\angle CAN \Rightarrow \cos\angle CAB = \cos 2\angle CAN = -\frac{3}{4}$

$\Downarrow$

$\frac{AB^2}{4} + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = BC^2 = 6^2$ ($BC = 6$ по усл)

$\frac{5}{4}AB^2 + AB^2 \cdot \frac{3}{4} = 6^2 \Rightarrow \frac{8}{4}AB^2 = 6^2 \Rightarrow 2AB^2 = 6^2 \Rightarrow$

$AB\sqrt{2} = 6 \Rightarrow AB = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

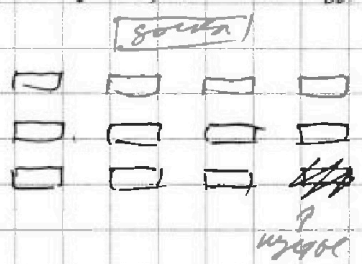
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

~~Пусть~~ Детей 11, а мест 3×4=12. Значит остается одно свободное место. Предположим, что это место в самом дальнем от доски ряду.



Разделим детей на 3 группы
самые низкие – 4 чел
средние – 4 чел
высокие – 3 чел.

Пусть можно сделать, т.к. все разных роста.

~~Пусть~~ Низких посадим на 1-й ряд, средних – на 2-й, высоких – на 3-й. Кол-во вариантов рассадить 4 чел на 4 места – 4!. 3-ёх человек на 3 – 3!, но есть ещё пустое место, которое можно поставить на любую из 4-ёх парт последнего ряда, т.е. всего 3!·4. Итого вариантов $4!\cdot 4!\cdot 4! = 24^3$

Аналогично можно получить 24^3 для случая когда пустое место в среднем и 1-ом рядах. Однако возможны и др перестановки.

Например, когда место в 1-ом ряду, человек из среднего ряда ~~может поменять~~ который сидит за пустым местом может поменять с кем-нибудь из 1-го ряда. Однако человек из ср. ряда должен быть ниже, чем тот из ср. ряда, перед кем он находится. Самому низкому (а такой найдётся) т.к. все разные не подойдёт любое 3 места, ~~стоя~~ след. по росту 2, далее 1, а самому высокому только своё место.

Т.е. самый низкий порождает ещё $24^3\cdot 3$ варианта, которые уже были, но он изменился с кем-то из 1-го ряда. След.-й по росту сделает ещё $24^3\cdot 2$, а ~~во~~ ~~высокие со 1-го ряда не сад~~ ~~след.~~ ещё след. по росту – $+24^3\cdot 1$, а самый высокий – 0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Аналогично в случае когда пустое место на последнем ряду. Можно менять местами людей со 2-го ряда и с 3-го.

итого $24^3 \cdot 3 + (24^3 \cdot 3 + 24^3 \cdot 2 + 24^3) \cdot 2 =$

В остальных случаях перестановки или невозможны или сместят пустое место на дро. ряд, что строго уже посчитанный случай.

вариантов: $24^3 \cdot 3 + 24^3 (6+4+2) = 24^3 \cdot (3+12) =$
$= 24^3 \cdot 15$

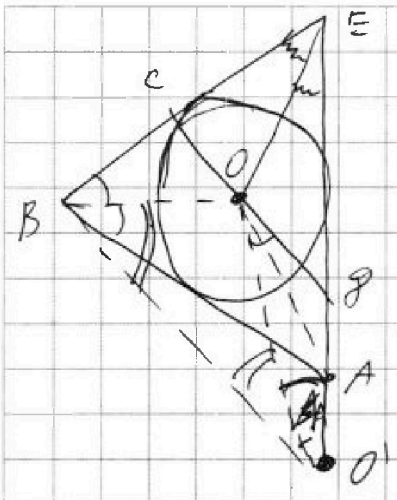
Ответ: $24^3 \cdot 15$ вар-в

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



~~Д~~ Задача 5

Отложим ~~на~~ на (ED) за точку D точку O' так, что $DO' = DO$, тогда

$ED + DO = ED + DO' = EO'$

$ABCD$ вписан $\Rightarrow \angle CBA = \angle CDE$

$\angle CDE$ – внеш для р/б $\triangle ODO'$ (т.к. $OD = DO'$) $\Rightarrow \angle DOO' = \angle DO'O = \frac{\angle CDE}{2}$, т.к. $\angle DOO' + \angle DO'O = \angle CDE$ как внешний угол. $\angle DOO' = \angle DO'O$, из Δ-к р/б.

O – центр впис окр-ти для $\triangle ABE$ $\Rightarrow$ это пересечение бис-с, т.е. BO – бис-са $\angle ABE \Rightarrow \angle EBO = \angle OBA = \frac{\angle EBA}{2} = \frac{\angle CBA}{2}$ (см. выше) $= \frac{\angle CDE}{2} = \angle DO'O$

$\Rightarrow BOAO'$ вписан, т.к. равны углы, опир-ся на одну хорду $\angle OBA = \angle DO'O$ см. выше $\angle AO'O \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OBO' = \angle OAE$; $\angle OO'B = \angle OAB$ (из впис. -ти)

Из O по-прежнему точка пересеч. бис-с для $\triangle ABE \Rightarrow AO$ – бис-са $\angle BAE \Rightarrow \angle EAO = \angle BAO \Rightarrow$

$\angle OBO' = \angle OO'B \Rightarrow \triangle BOO'$ – р/б $\Rightarrow BO = O'O$

EO – тоже бис-са, из усл. $\angle BEA \Rightarrow \angle BEO = \angle AEO$

$\Rightarrow \triangle BEO = \triangle O'EO$ по I-му признаку

OE – общ. сторона, $BO = O'O$ из р/б $\triangle BOO'$

$\angle BOE = 180 - \angle OBE - \angle OEB$; $\angle O'OE = 180 - \angle O'OE - \angle OEO'$

$\angle OBE = \angle O'OE$ – см. выше

$\angle$ ~~AEO OEB = ...~~ $\angle OEB = \angle OEO'$, т.к. EO – бис-са

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ ~~$\angle ABE$~~ $\angle BOE = \angle O'OE$ как разн-ти равных $\Rightarrow$

$\triangle BEO \overset{I}{=} \triangle O'EO \Rightarrow BE = O'E = 12$

Заметим, что $O'E = ED + DO' = ED + DO \Rightarrow$

$BE = ED + DO = 12$

Несмотря на наших предположений длина не была $ED + DO = 12$ всегда, значит это и максимальное значение тоже. (кроме случаев, где ~~в~~ ABE ~~не~~ „слипается" в отрезок.)

Ответ: $(ED + DO)_{max} = 12$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

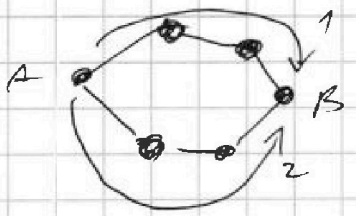
СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

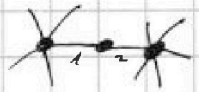
Представим этот остров как граф: деревни – вершины, дороги – рёбра. По усл. из ~~каждой~~ любой деревни можно дойти в любую => все ~~эти~~ вершины связаны, не может быть, чтобы граф состоял из нескольких кусков, например:

Будучи из каждой деревни в каждую можно добраться единственным способом. Это значит, что в графе нет циклов, иначе обход в разные стороны (например по и против часовой стрелки) давал бы уже два пути:

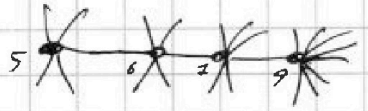


Значит наш граф без циклов => он дерево. В этом случае деревни с одной дорогой (вершины с одним ребром) – это листья

Те четыре деревни из условия не могут быть связаны через ещё какую-то из оставшихся деревень. Иначе ~~через~~ из этой связывающей деревни выходило бы 2 дороги



Значит те 4-е деревни связаны друг с другом на прямую:



А на концах свободные дороги (рёбра), расходятся ~~Т.к. сами~~ ~~деревни листья~~ деревни – листья

На каждую деревню из условия может приходится или $n-1$ или $n-2$ листьев, где n – ~~во~~ степень вершины (кол-во дорог из деревни). $n-1$ – если деревня „сбоку" (как 5 и 9 на рисунке); $n-2$ – если деревня в середине (как 6 и 7). В любом случае всего листьев будет $5+6+7+9-1-1-2-2$, т.е. всегда будет

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Какие-то две деревни в середине и по краям.

итого $5+6+7+9-2-4=5+7+9=12+9=21$

И ещё сами 4 деревни (с 5, 6, 7 и 9 -ю домами):

$21+4=25$

Ответ: 25 деревень

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2$$

Корень кв-й из любого числа ≥ 0. Значит подкоренные выражения могут принимать значения от 0 до 4.
Меньше 0 нельзя, иначе корень не будет, больше 4, приведёт к тому, что корень кв-й из ~~другого~~ другого должен будет стать 2, а так не бывает.

Т.к. x и y целые, и все ост. числа вып-ии тоже целые, значит подкоренные выражения целые.

Пусть одно из них $=0$, тогда другое $=4$. т.к. сумма их корней $=2$ Выйдет...
Если одно из них $=1$, то другое $=1$, выйдет

Если одно из подкор. выр-ий $=2$, то корень из другого должен быть равен $2-\sqrt{2}$, тогда само 2-е подкоренное выражение $(2-\sqrt{2})^2=6-4\sqrt{2}$ - нецелое, значит так не может быть.
Аналогично, если одно из выр-й $=3$, то другое $(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$ - не целое (есть радикал.

Итого вариантов 3:

вар.	$2x-2y-x^2-y^2$	$1-\lvert x-y-1\rvert$
1.	4	0
2.	0	4
3.	1	1

1. $1-|x-y-1|=0 \Rightarrow |x-y-1|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x-y=2 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x=y \\ x=2+y \end{array}\right.$

1.1 $x=y \Rightarrow 2x-2y-x^2-y^2=2x-2y-x^2-x^2=-2x^2$

$x^2\geq 0$ для $\forall x \Rightarrow -2x^2\leq 0$, а нам нужно 4, что $>0 \Rightarrow$ этот вар-т не подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1.2 $x = y+2 \Rightarrow 2x-2y-x^2-y^2 = 2(y+2)-2y-(y+2)^2-y^2 =$

$= \cancel{2y}+\cancel{4}-\cancel{2y}-y^2-4y-\cancel{4}-y^2 = -2y^2-4y = 4 \Rightarrow$

$y^2+2y=2 \Rightarrow y^2+2y-2=0 \Rightarrow y = \frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2} -$

уже видно, что y не $\mathbb{Z}$ (целое) $\Rightarrow$ не подходит

2. $1-|x-y-1| = 4 \Rightarrow |x-y-1| = -3 < 0$, но $|x|$, для $\forall x$ всегда $\geq 0 \Rightarrow$ такое вообще не бывает

3. $1-|x-y-1| = 1 \Rightarrow |x-y-1| = 0 \Rightarrow x-y-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x=y+1} \Rightarrow 2x-2y-x^2-y^2 = 2(y+1)-2y-(y+1)^2-y^2 =$

$= \cancel{2y}+\underset{1}{\cancel{2}}-\cancel{2y}-y^2-2y-\cancel{1}-y^2 = -2y^2-2y+1 \Rightarrow \underline{\underline{1}}$

$2y^2+2y=0 \Rightarrow (y+1)y=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \end{array}\right.$

Если $y=0$, то $x=1$, тогда

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|} = \sqrt{2-0-1-0}+\sqrt{1-|1-0-1|} =$

$= \sqrt{1}+\sqrt{1} = 2$

Если $y=-1$, то $x=0$, тогда

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|} = \sqrt{0+(-2)-0-1}+\sqrt{1-|0-(-1)-1|} =$

$= \sqrt{2-1}+\sqrt{1-|+1-1|} = \sqrt{1}+\sqrt{1} = 2 \Rightarrow$ пары $(1;0)$ и $(0;-1)$ подходят. ~~остальн~~ для случая, когда подкоренное выражение из 1, в другом случае не выполняется одно из условий (или число не целое, или $\notin \mathbb{Z}$)

Ответ: $(x;y)$: $(1;0)$ и $(0;-1)$

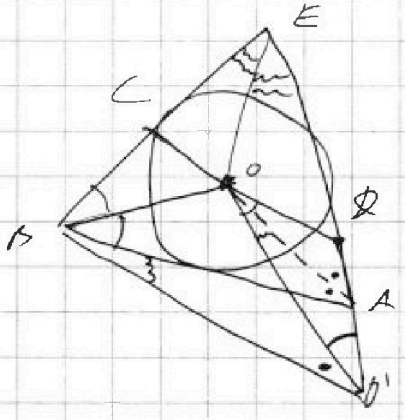
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$\angle CDE = \angle CBA$ вписан-ть

$\triangle ODO'$ - рб

$\angle DOO' = \angle DO'O = \frac{\angle CDE}{2} = \frac{\angle CBA}{2}$

$\triangle BOAO'$ вписан $\Rightarrow$

$\angle BO'O = \angle BAO$ вписан

AO - бис-са $\Rightarrow \angle BAO = \angle OAD$

$\angle OBO' = \angle OAD$ (вписан-ть) $\Rightarrow$

$\angle BO'O = \angle OBO' \Rightarrow$

BOO' - рб

$\triangle \angle BOE = \angle O'OE$ по 2м сторонам

OE - общ

$BO = OO'$

$\triangle BOE = \triangle O'OE \Rightarrow EO' = 12$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

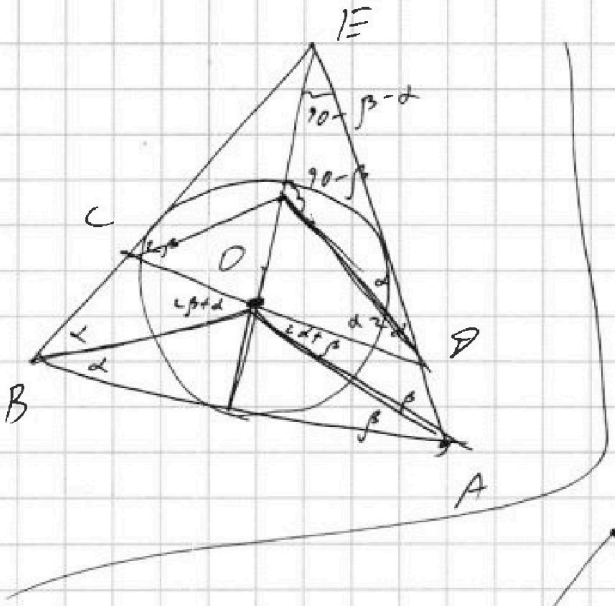
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

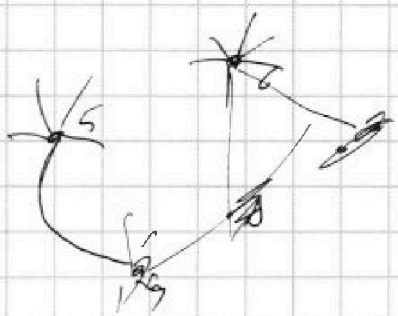
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

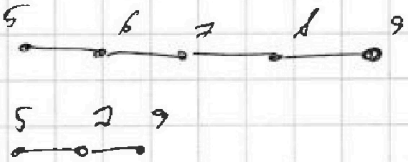
СТРАНИЦА __ ИЗ __

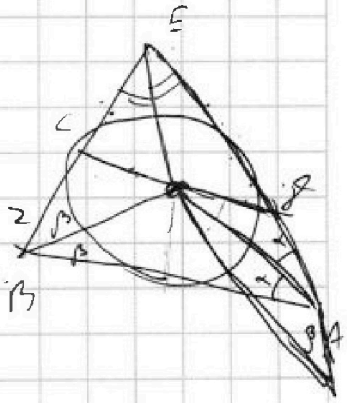
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





$5+6+7+8+9 =$
$= 27$





$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2$$

Пусть $x>y+1$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-(x-y-1)}=2$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{2-x+y}=2$$

$$\sqrt{-x^2+2x-1+1-2y-y^2-1+1}+\sqrt{2-x+y}=2$$

$$\sqrt{-(x-1)^2-(y+1)^2+2}+\sqrt{2-x+y}=2$$

0 4 1 — 4 0 1

$1+2 \to 2-1 = (2-\sqrt{2})^2 \notin \mathbb{Z}$

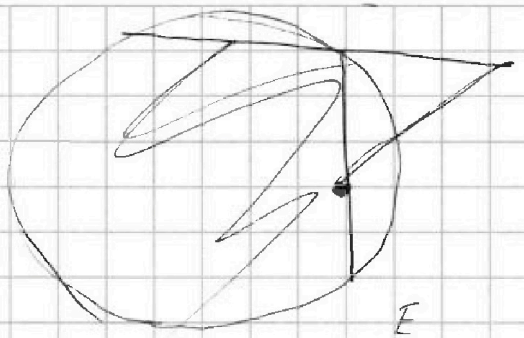
аналог 3

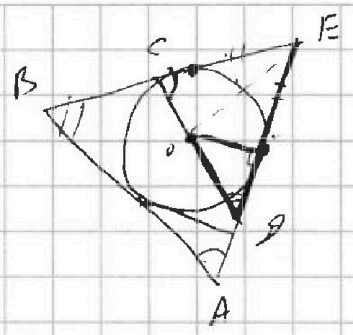
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

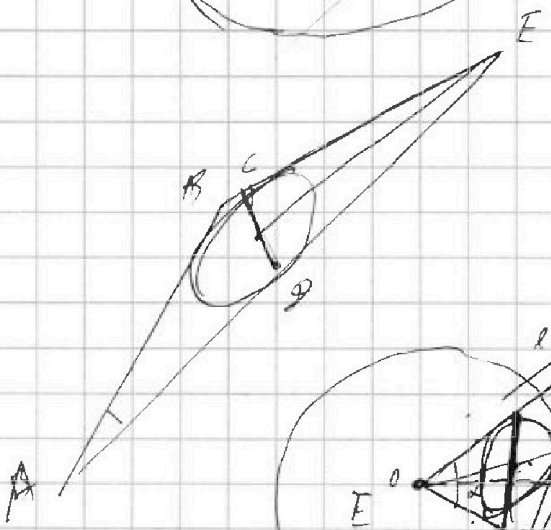
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

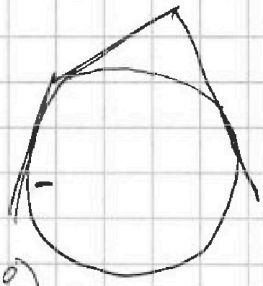
СТРАНИЦА __ ИЗ __

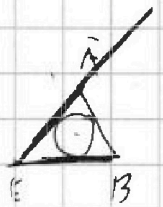
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

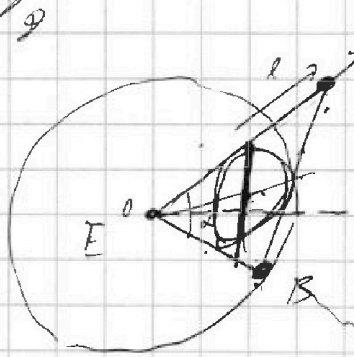


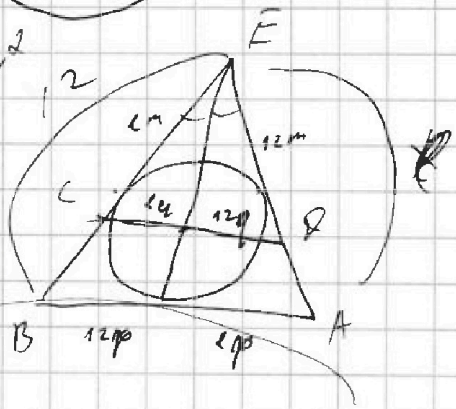




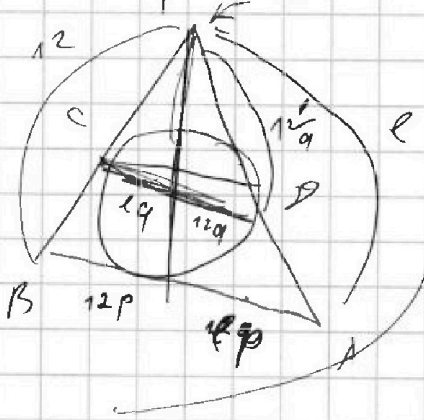




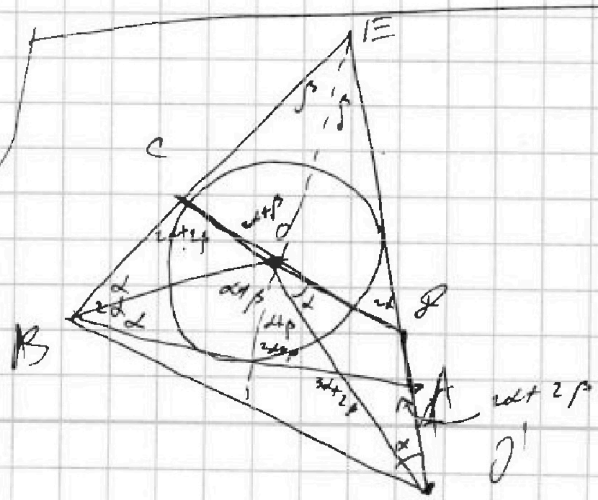




$$\frac{12p}{12q} = \frac{12m}{12} \Rightarrow \frac{p}{q} = m$$



$$ED + DO = 12\left(\frac{p}{q} + q\right) = 12\,\frac{p+q^2}{q}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

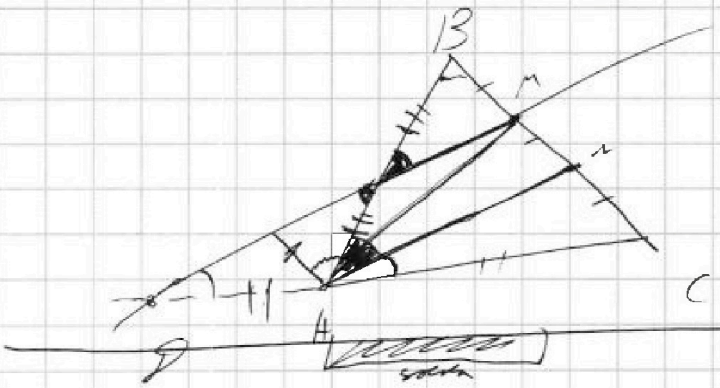
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

черновик

$AC^2 + 4a^2 - 4a \cdot AC \frac{1}{2\sqrt{2}} = 4$

$AD^2 + 9a^2 - 6a \cdot AD \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{AB^2}{4}$



$AB = CD$

$\frac{AB}{2} = \frac{CD}{4}$

$AB^2 + \frac{AB^2}{4}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

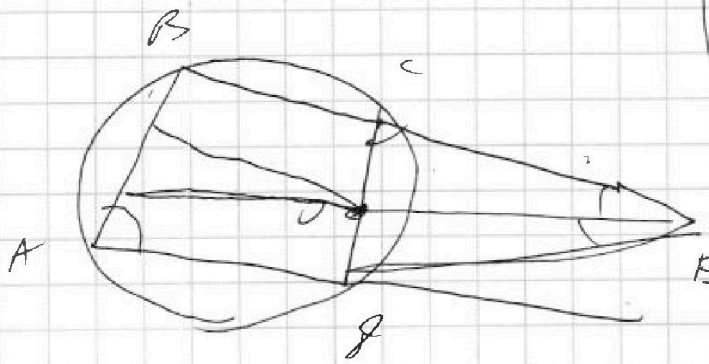
1) $(6 \cdot 24 \cdot 24) \cdot 4 - 3 \cdot 4$

вход ОГС + перестановки в 1-ом

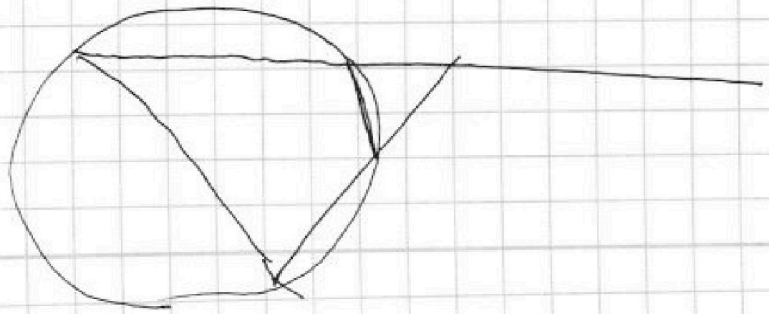
2) $(24 \cdot 6 \cdot 24) \cdot 4$

3)

~~3~~



8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

черновик

№2 $a-b=12$ $\qquad b=a-12$

$a^2+2ab+b^2+3a+3b=19p^4$

$(a+b)^2+3(a+b)=19p^4$

$(a+b+3)(a+b)=19p^4$

$(a+a-12+3)(a+a-12)=19p^4$

$\underbrace{(2a-9)\underbrace{(2a-12)}_{\vdots 2}}_{\vdots 2}=19p^4 \Rightarrow p=2$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 35 \\ 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \end{array}$$

$(2a-9)(2a-12)=19\cdot 2^7$

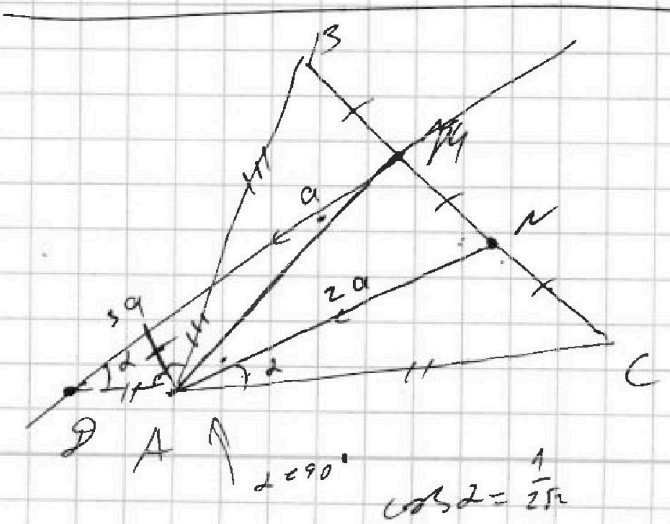
$$\begin{array}{r} 6 \\ 98 \\ 8 \\ \hline 784 \\ 441 \\ \hline 1225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 19 \\ 8 \\ \hline 152 \end{array}$$

$4a^2-42a+108=19\cdot 16$

$2a^2-21a+54-19\cdot 8=0$

$a=\dfrac{21\pm\sqrt{441-8\cdot 54+8\cdot 19\cdot 8}}{4}=\dfrac{21\pm\sqrt{441-8(54-19\cdot 8)}}{4}=\dfrac{21\pm\sqrt{441+8\cdot 98}}{4}=$

$=\dfrac{21\pm\sqrt{441+784}}{4}=\dfrac{21\pm\sqrt{1225}}{4}=\dfrac{21\pm 35}{4}=\left[\begin{array}{l}\frac{14}{4}\\ <0\ \left(-\frac{14}{4}\right)\end{array}\right.$



$AB=CD$

$BC=6$

$\cos(\angle CAN)=-\frac{3}{4}$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$2\cos^2\alpha-1=-\frac{3}{4}$

$2\cos^2\alpha=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{8}$

$\cos\alpha=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$