



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1 Все t при которых $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ и произв 2-ух корней > 0

Решение: обозначим корни уравнения за x_1 и x_2

$x_1 x_2 > 0$ по ум.

1) Для того чтобы было 2 корня уравнения, дискриминант должен быть > 0

$$\Rightarrow D > 0 \Rightarrow (4\sqrt{2}t)^2 - 4 \cdot (9t^2 - 9) > 0$$

$$32t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

$$t^2 < 9 \Rightarrow t \in (-3; 3)$$

2) Чтобы $x_1 x_2$ было > 0 , по теор. Виета $x_1 x_2 = \frac{9t^2 - 9}{1}$

$$\Rightarrow \frac{9t^2 - 9}{1} > 0 \quad t^2 > 1 \quad t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

Соединим оба необходимые условия и найдем все значения t :

$$\begin{cases} -3 < t < 3 \\ t < -1 \\ t > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 $a-b=12$ $a^2+2ab+b^2+3a+3b=19p^4$ p - прост.
 $a, b \in \mathbb{N}$

Решение: $a^2+2ab+b^2+3a+3b = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b+3)(a+b)$

$$(a+b+3)(a+b) = 19p^4 \text{ по ум.}$$

Заметим, что если $a+b+3$ - чет., то $a+b$ - нечет.

т.к. мы вычит. из чет. числа - нечет. И если $a+b+3$ - нечет.,

то аналогично $a+b$ - чет. $\Rightarrow$ произведение $(a+b+3)(a+b)$

всегда имеет чет. множитель $\Rightarrow 19p^4 = (a+b+3)(a+b)$, а значит

$19p^4$ тоже четно. 19 - нечет. $\Rightarrow p^4$ - четно, но p - простое

число, а единств. прот. число $\div 2$ это $2 \Rightarrow p=2$

$$\Rightarrow (a+b+3)(a+b) = 19 \cdot 2^4 = 19 \cdot 16 = (16+3) \cdot 16$$

$$((a+b)+3)(a+b) = (16+3) \cdot 16 \Rightarrow a+b=16$$

наконец по ум. $a-b=12 \Rightarrow \begin{cases} a+b=16 \\ a-b=12 \end{cases} \Rightarrow 2a=28 \Rightarrow \underline{a=14}, \underline{b=2}$

Ответ: $a=14, b=2$



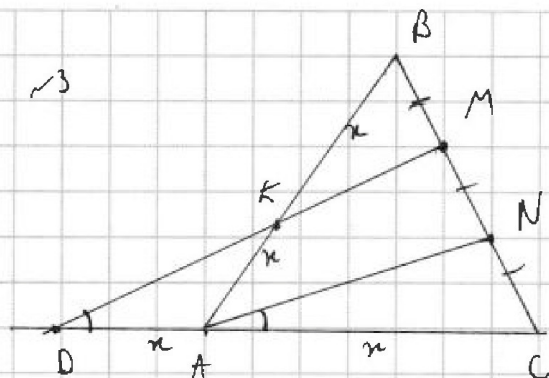
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Исходные: $BM = MN = NC = 2$ ($BC = 6$, $\frac{BC}{3} = 2$)

$MD \parallel AN$, $AB = CP$, $BC = 6$,
 $\cos(\angle CAN) = -\frac{3}{4}$

Найти: AB

Решение: ~~по теор. Фалеса~~ по теор. Фалеса

$$\frac{BM}{BN} = \frac{BK}{BA} \Rightarrow BK = KA = x$$

также по теор. Фалеса $\frac{CN}{CM} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CA = AB$, также $AB = CD$

$\Rightarrow AC = DA = x$. $\angle NAC = \angle MDC$ т.к. они при одной секущей 2-ух паралл. прямых

$\triangle DKA$ $DA = x$ и $KA = x \Rightarrow \triangle DKA$ - $\triangle$. $\Rightarrow \angle DKA = \angle KDA = \angle CAN$

$\Rightarrow \angle BAC$ как внешний $\angle = \angle KDA + \angle DKA = 2\angle CAN$.

по теор. кос: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle BAC \cdot x = AC^2 - 2 \cos(2\angle CAN) \cdot x$

$\Rightarrow 36 = 4x^2 + x^2 - 2 \cos(2\angle CAN) \cdot x = 5x^2 - 2 \cos(2\angle CAN) \cdot x$

$5x^2 = 36 \frac{1}{2}$

по теор. кос:

$36 = 4x^2 + x^2 - 4x^2 \cos(2\angle CAN)$

$36 = 5x^2 + 3x^2$

$x^2 = \frac{36}{8}$

$x = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$AB = 2x = 3\sqrt{2}$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$CD = AB$$

$$x^2 + 4\sqrt{2}t + 9t^2 - 9 = 0$$

$$x_1, x_2$$

10

$$x_1, x_2 > 0$$

$$D > 0$$

$$(4\sqrt{2}t)^2 - 36t^2 + 36 \geq 0$$

$$32t^2 - 36t^2 + 36 \geq 0$$

$$4t^2 \leq 36$$

$$t^2 \leq 9$$

$$-3 \leq t \leq 3$$

$$\begin{cases} x \geq y+1 \\ 2x \leq y+2 \\ x \leq y+1 \\ x > y \end{cases}$$

$$x = y+1$$

$$y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$a - b = 12$$

$$3b - \text{какая}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

p - простое

$$p = 2$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b+3)(a+b) = 19p^4$$

$$9 + 18 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a+b = 19$$

$$27 - 6 = \sqrt{2} \cdot a+b+2$$

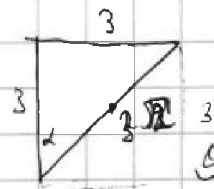
$$3 \rightarrow 1 \quad 9 \rightarrow 3 \quad 1 \rightarrow 0 \quad 3 \rightarrow 3$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$19 \cdot 16$$

$$a+b=19$$

$$a+b=16$$

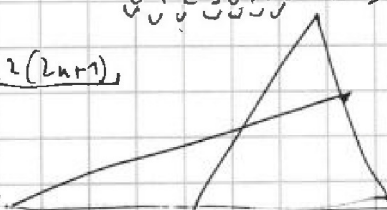


$$\sqrt{19} = 2$$

$$4n+2 = 2(2n+1)$$

$$a^2 + b^2$$

$$2 \leq 3 \leq 4$$



$$4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x$$

$$2x \cdot x = 2x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2$$

$$3x^2$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 =$$

$$(x-y-1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2x + 2y - 2xy$$

$$5x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$8x^2 = 36$$

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4}$$

$$x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y$$

$$5x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$5x^2 + 3x^3 = 36$$

$$x^2(5+x) = 36$$

$$-(x-y-1)^2 - 2xy + 1$$

$$1 - (x-y-1)^2 - 2xy$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4



1 клетка = 1 карта X = джек 11 учеников

Решение: т.к. у нас 11 человек, то можно

1 клетка останется пустой. Она может быть в 1-ом, 2-ом или 3-ем ряду. Запишем варианты.

1) в 1-ом ряду:

a	b	c	d
e	f	g	L
	k	j	L

похоже видно а должно быть > e, аналогично, b > f > k ... и т.д. в итоге:

исключаем кал-во вариантов подстановки

11 разное распол. учеников в эту систему.

учеников что 3 числа могут быть в неравенство ед. способом, т.к. все распол. разные и знаки строго больше.

$$= 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 =$$

$$= \frac{11! \cdot 2! \cdot 9! \cdot 6! \cdot 3!}{2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} = 4$$

$$\begin{cases} a > e \rightarrow C_{11}^2 \\ b > f > k \rightarrow C_9^3 \\ c > g > j \rightarrow C_6^3 \\ d > h > L \rightarrow C_3^3 \end{cases}$$

осталось 8 вар. распол.
ост. 6 вар. распол.
ост. 3 вар. распол.

= $\frac{11!}{2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 4$ и учетом на 4 т.к. 4 вар. где в ряду будет пустая карта

2) аналогично 1-ому ряду запишем неравенства для 2-го ряда:

a	b	c	d
	e	f	g
k	k	j	L

$$\begin{cases} b > e > k \\ c > f > j \\ d > g > L \end{cases}$$

$$4 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{11! \cdot 8! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 4$$

3) аналогично:

	a	b	c
d	e	f	g
k	k	j	L

$$\begin{cases} d > L \\ a > e > k \\ b > f > j \\ c > g > L \end{cases}$$

$$4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 4 \cdot \frac{11! \cdot 9! \cdot 6! \cdot 3!}{2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} = 4 \cdot \frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

Итого: ответ: $3 \times 4 \times \frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!}$ Ответ: $\frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!}$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 деревья по 5, 6, 4, 9 дорог, ост. - по 1 дороге.

Решение: из-за по ул. из каждой деревни можно добраться до всех остальных $\Rightarrow$ граф, где деревни - вершины, а дороги - рёбра, является связным. Также из одной деревни в другую есть только 1 путь $\Rightarrow$ нет циклов иначе было бы несколько путей. $\Rightarrow$ граф является ~~деревом~~ деревом (где верш. - дерев., рёбр. - дороги)

В дереве на n вершинах $n-1$ рёбро
 у нас $n+4$ вершин где n - кол-во деревень из которых выходит по 1 дороге - рёбру.

$\Rightarrow$ всего уникальных рёбер, учитывая что мы считаем каждое дважды - как выходящее из i -ой вершины и

второй: $\frac{5+6+4+9+n}{2}$ т.к. - дерево;

$$\frac{5+6+4+9+n}{2} = (n+4)-1 \quad 24+n = 2n+8 \quad n=21$$

соответственно $n+4 = 21+4 = 25$ деревень.

Ответ: 25 деревень.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4 целые x, y при $\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$

$1-|x-y-1| \geq 0$ т.к. это выражение под корнем
 $\Rightarrow |x-y-1| \leq 1$

$\begin{cases} x \geq y+1 \\ x-y-1 \leq 1 \\ x \leq y+1 \\ y+1-x \leq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq y+1 \\ x \leq y+2 \\ x \leq y+1 \\ x \geq y \end{cases}$	т.к. числа ganze. Если $x \geq y+1$ и $x \leq y+2$, то $x = y+1$ или $x = y+2$ аналогично если $x \leq y+1$ и $x \geq y$ то т.к. числа целые, то $x = y$
--	--	---

$\Rightarrow$ всего 3 варианта: $x = y+2, x = y+1, x = y$

1) $x = y+2$

$$\frac{\sqrt{2(y+2)-2y-(y+2)^2-y^2} + \sqrt{1-|y+2-y-1|}}{\sqrt{2y+4-2y-y^2-4y-y^2} + \sqrt{1-1}} = 2$$

$$\frac{\sqrt{-2y^2} + 0}{-2y^2} = 2$$

$-2y^2 \geq 0$
 $\Rightarrow y^2 \leq 0$, но $y^2 \geq 0$ т.к. квадрат
 $\Rightarrow y = 0$, но тогда $0 \neq 2$ (X)

2) $x = y+1$

$$\frac{\sqrt{2(y+1)-2y-(y+1)^2-y^2} + \sqrt{1-|y+1-y-1|}}{\sqrt{2y+2-2y-y^2-2y-1-y^2} + \sqrt{1-0}} = 2$$

$$\frac{\sqrt{1-2y^2} + 1}{1-2y^2} = 2$$

$\sqrt{1+1} = 2$ ($y = 0, x = 1$)

$1-2y^2 \geq 0$ т.к. y ganze,
 $2y^2 \leq 1$
 $y^2 \leq \frac{1}{2}$
 $|y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Rightarrow y = 0$, т.к. y - целое.

3) $x = y$

$$\frac{\sqrt{2y-2y-y^2-y^2} + \sqrt{1-|y-y-1|}}{\sqrt{-2y^2} + 0} = 2$$

$$\frac{0}{-2y^2} = 2$$

$-2y^2 \geq 0$ $y^2 \leq 0$ но т.к. y^2 - квадрат,
 $y^2 \geq 0 \Rightarrow y = 0$, но тогда $0 \neq 2$ (X)

В итоге единственный ответ: $x = y+1, x = 1, y = 0$

Ответ: (1; 0)



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

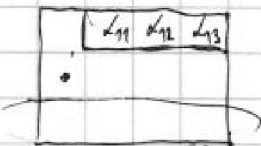
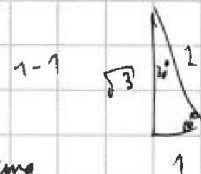
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\cos(2\angle CAN)$~~ $\cos(2\angle CAN)$

~~1267~~



11 угл.

3 угла или больше 1 место.

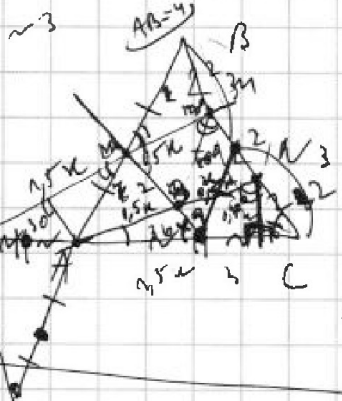
3 линии высоты.

$\alpha_{11} > \alpha_{12} > \alpha_{13}$

$\cos \angle CAN = \frac{1}{2}$ 3 угл.

2 угла на осн. углу

$\alpha_{11} > \alpha_{12} > \alpha_{13} > \alpha_{14} > \alpha_{15}$ $3! - 1 = 6$



$AB = CD$
 $BC = 6$

$AB = ?$ $BC = 6$ $\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$

$AB = CD$ $AB = 4$

$AC = 40$
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$

$AD = \sqrt{b^2 - a^2}$

$\cos \angle K = \frac{a}{BC} = -\frac{3}{4}$ $\cos \angle K = \frac{AB}{BC}$

$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC}$

$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{PC}$

$\frac{a^2}{b^2 + PC^2 + 2 \cos \angle K} = \frac{b^2 - a^2}{PC^2}$ $BC = \sqrt{b^2 + PC^2 + 2 \cos \angle K}$

$\frac{a^2}{b^2 - a^2} = 1 + \frac{b^2 + 2 \cos \angle K}{PC^2}$ $\frac{a}{\sqrt{b^2 + PC^2 + 2 \cos \angle K}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{PC}$

$PC^2 = \frac{b^2 + 2 \cos \angle K (b^2 - a^2)}{a^2}$

$\frac{a}{BC} = -\frac{3}{4}$

$PC = \frac{b^2 + 2 \cos \angle K (b^2 - a^2)}{a^2}$

$BC = 1\frac{1}{3}a$

$4 + 4 + 2 = 12$

$12 + 2 + 2 = \frac{16}{2} = 8$

5, 6, 7, 9 дем. - по 11

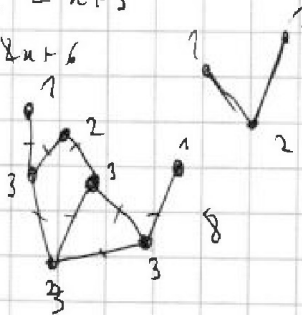
$5 + 6 + 7 + 9 + K = (K + 4) - 1$

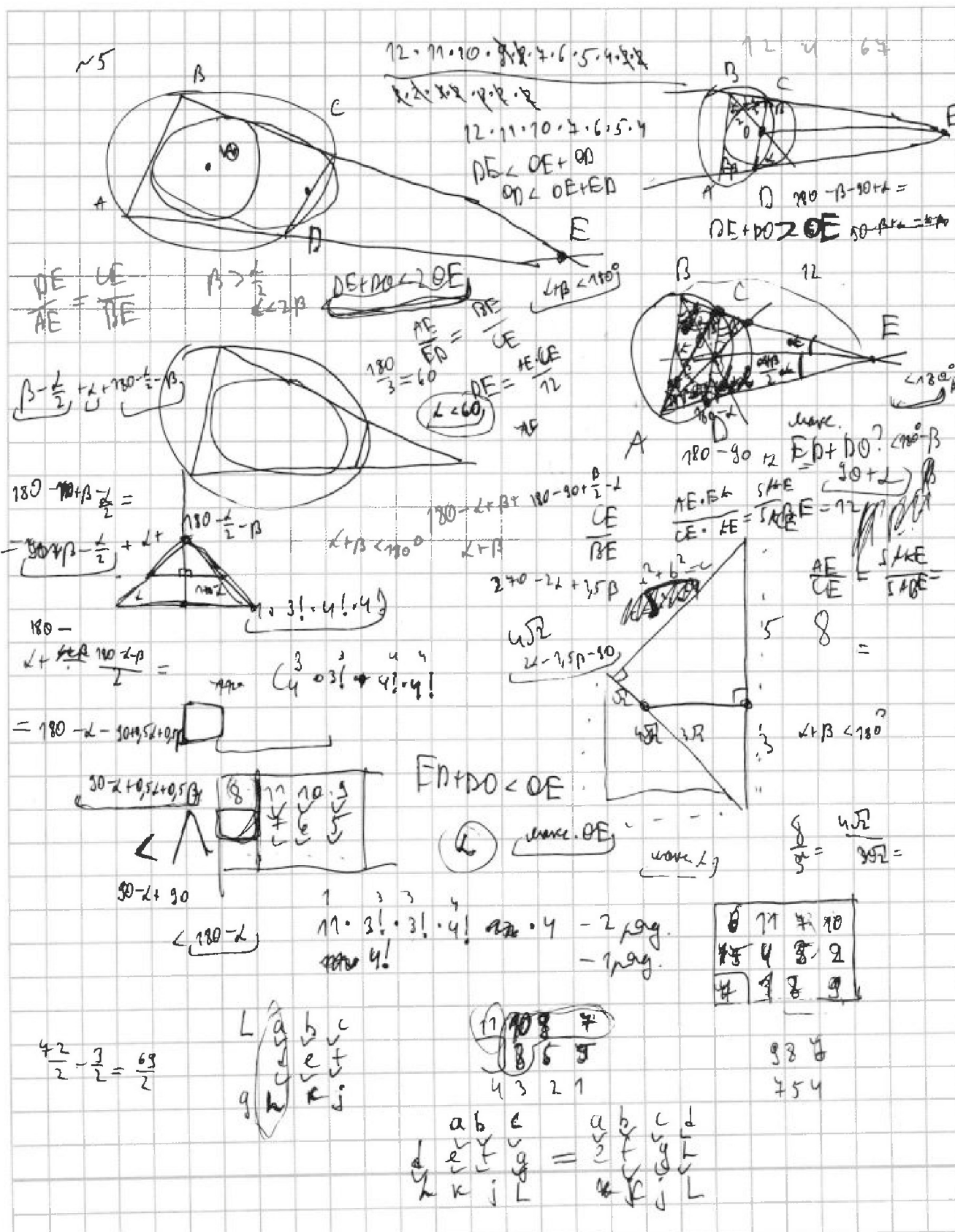
$5 + 6 + 7 + 9 + K = K + 3$

$\frac{5 + 6 + 7 + 9 + K}{2} = K + 3$

$27 + K = 8K + 6$

$K = 21$





$$DE(1 - CF) = CF \cdot AP$$

$$DE = \frac{CF \cdot AP}{1 - CF}$$