



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle \frac{CEM}{CAN}) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$. Пусть x_1, x_2 — корни. Тогда по теореме Виета:

$x_1, x_2 = 4t^2 - 4$. Заметим, что если есть 2 реальных корня, то $\frac{D}{4} \geq 0$, то $\frac{D}{4} = (\sqrt{3}t)^2 - (4t^2 - 4)$

По условию задачи составим сист. нер-в, выполняющихся:

$$\begin{cases} (\sqrt{3}t)^2 - 4t^2 + 4 \geq 0 & (1) & 1) (\sqrt{3}t)^2 - 4t^2 + 4 \geq 0 & 2) 4t^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t^2 - 4 \geq 0 & (2) & 3t^2 - 4t^2 + 4 \geq 0 & 4t^2 \geq 4 \quad / : 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$-t^2 + 4 \geq 0 \quad / \cdot (-1) \leq 0$$

$$t^2 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t \leq -1 \end{cases}$$

$$t^2 - 4 \leq 0$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$t^2 \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \quad t \in (-2; 2)$$

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b=40 \Rightarrow a=40-b \quad \text{Решение} \quad p - \text{простое число} \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 14p^5 \quad - \text{заметим квадрат разности и вынесем общий множитель}$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 14p^5 \quad - \text{поставим зп. } a \text{ и приведем подобные слагаемые}$$

$$(40-b)^2 + 15(40-b) = 14p^5 \quad] \quad t = 40-b$$

$$t^2 + 15t = 14p^5 \quad (*)$$

Заметим, что если $a+b=40$ и $a, b \in \mathbb{N}$, то $t \leq 39-1=38$. Значит,

$$14p^5 \leq 38^2 + 15 \cdot 38$$

$$14p^5 \leq 2014$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \wedge 38 \\ + 304 \\ \hline 1444 \end{array} \quad \begin{array}{r} 38 \\ \wedge 15 \\ + 190 \\ + 38 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$1444 + 540 = 2014$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 32 \\ + 94 \\ \hline 544 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 9 \\ \hline 243 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 12 \\ + 1404 \\ + 243 \\ \hline 4131 \end{array}$$

Рассмотрим первые значения p :

$$p=2: 2^5=32 \Rightarrow 14p^5=14 \cdot 32=544 \leq 2014 \quad (1.)$$

$$p=3: 3^5=3^3 \cdot 3^2=27 \cdot 9=243 \Rightarrow 14p^5=14 \cdot 243=4131 \leq 2014 \quad (2.) \Rightarrow p \neq 3$$

Сравнительно, что p при $p > 3$ $14p^5$ ещё больше $\Rightarrow$ больше 2014. Значит, $p=2$

Тогда найдем из уравнения от $t(1)$:

$$t^2 + 15t = 544$$

$$\begin{array}{r} 544 \\ \times 4 \\ \hline 2146 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ 343 \\ 49 \\ 49 \\ 1 \end{array}$$

$$2401 = 7^4 = 49^2$$

$$t^2 + 15t - 544 = 0$$

$$b = 15^2 - 4 \cdot (-544) = 225 + 2146 = 2401 = 49^2$$

$$t_1 = \frac{-15 - \sqrt{b}}{2} = \frac{-15 - 49}{2} = \frac{-64}{2} = -32 = 40 - 26 \Rightarrow -2b = -42 \Rightarrow b = 36, a = 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t_2 = \frac{-15 + \sqrt{25}}{2} = \frac{-15 + 5}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \quad \text{но } 20 \times 2 = 40 \Rightarrow -26 = -29, \text{ но } 20 \times 2 = 40 \Rightarrow 68 \checkmark$$

Ответ: $a=4, b=36$.



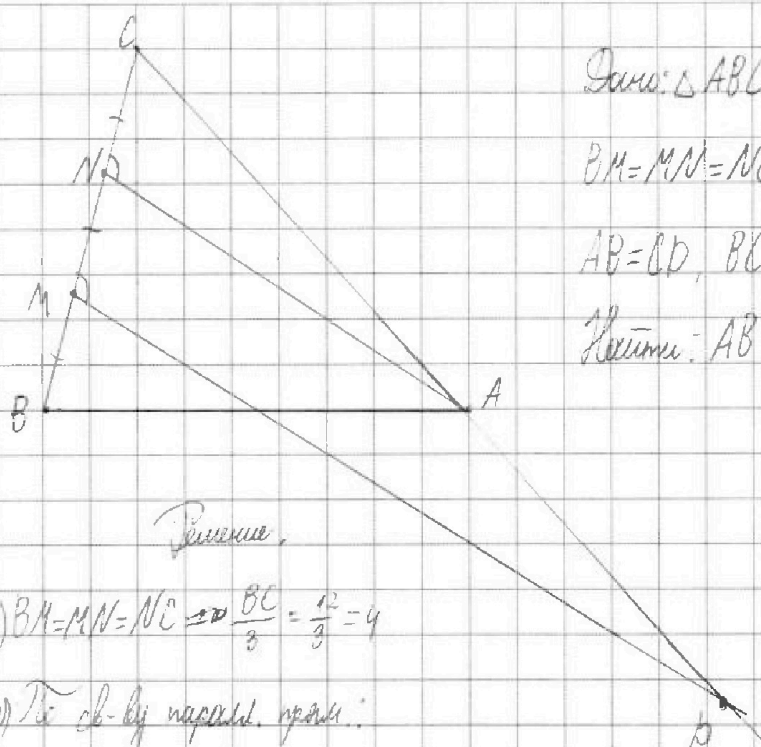
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$, $M, N \in BC$

$BM = MN = NC$, $D \in AC$, $AN \parallel MD$

$AB = CD$, $BC = 12$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$

Найти: AB

Решение.

1) $BM = MN = NC \Rightarrow \frac{BC}{3} = \frac{12}{3} = 4$

2) По св-ву паралл. прям:

$\angle CAN = \angle CMB$ ($AN \parallel MD$, ос. BC)

В то же время $\angle C$ - общий. Значит, $\triangle ACN \sim \triangle BCM$ (по 2-м углам), откуда

$k = 2$ ($\frac{CM}{CN} = \frac{8}{4} = 2$). Из этого следует, что $CD = 2AC$.

3) Ит.к. $AB = CD$ и $CD = 2AC$ (из (2)), $AB = 2AC$

4) Заметим, что $\frac{AC}{AB} = \frac{CM}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AN$ - бис. (по признаку) $\Rightarrow \angle CAB =$

$= 2\angle CAN$ (по свойству бис.) $\Rightarrow \cos(2\angle CAN) = \cos \angle CAB$.

5) Применим теорему косинусов для $\triangle ABC$ и стороны BC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle CAB$ - подставляем значения из (4), (3) и условия:

$12^2 = (2AC)^2 + AC^2 - 2 \cdot 2AC \cdot AC \cdot (-\frac{1}{4})$

$4AC^2 + AC^2 + AC^2 = 144$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6AC^2 = 144 \quad / : 6 \neq 0$$

$$AC^2 = 24$$

$$AC = \pm 2\sqrt{6} \quad - \text{учитывая то, что сторона всегда положительна, } AC = 2\sqrt{6}$$

6) Из (3) и (5):

$$AB = 2AC = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } AB = 4\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Очевидно, что в классе должно быть только 1 место. Значит, в ≥ 2 рядах так:

x
y
z

где x ниже y, y ниже z. Выберем 2-ух случайных учеников и посадим их (рядом и ватен): $\frac{5 \cdot 4}{2} = 28$ способов. Пусть a выше b. Тогда есть

1) b
a

2)
b
a

3) a
b

4) b
a

только 4 способа их посадить:

$$28 \cdot 4 = \frac{28}{11.2} = 112$$

вариантов выбрать 2-ух учеников и

посадить в отведенный ряд.

Р-м 3 группы учеников. Разделим случай на 2 группы без порядка

(выберем в 1-ую 3-их случ, ост. - 2-ая группа): $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$ вар.

Сраведливо, что всех людей в группе можно посадить за 1 ряд только одним способом. Значит, есть 20 вариантов расставить остальных.

Теперь по рядам. Есть 6 комбинаций по (3-2-1) распределим по рядам наши

группы (1 из 2 чел, 2 из 3 чел). Значит, ответ: $112 \cdot 20 \cdot 6 = 13440$

$$\begin{array}{r} 13440 \\ \times 10 \\ \hline 134400 \end{array}$$

Ответ: 13440



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что схема дорог и деревни — ^{лучший} граф. Д-жим, что раз из любой деревни в любую только 1 путь, то в графе нет циклов.

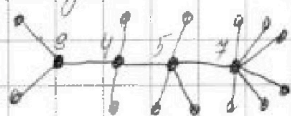
Пусть это не так, есть цикл.



Возьмем почта А и В такие, что об. почта в цикле. Но тогда из т. А в т. В есть 2 пути. Значит, в графе нет циклов.

Заметим, что граф на вершинах ст. 3, 4, 5 и 7 тоже связн. Т.к. иначе нет вершина С, степени которой больше 1, что противоречит условию.

Тогда ~~н-мн~~ такой граф:



— 14 вершин. Изменим со начала, т.е. тогда ст. вершины 3, 4, 5 или 7 ^{изменяется} ~~увеличивается~~ или появится вершина степени 2. Также если

попытаемся сделать др. граф, в нем будет цикл.

Ответ: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1, \quad x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{подкоренные выражения могут быть целыми.}$$

Заметим, что подкоренные выражения равны 0 и 1 или 1 и 0 соотв. (т.к. значения выражения неотрицательны) или выражения больше 1 или сумма больше 1 (>1).

$$1) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 & (a) \\ 1-|x+y-2|=1 & (b) \end{cases} \quad \begin{cases} 1-|x+y-2|=1 \\ |x+y-2|=0 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x+y)^2 - (x^2+y^2)=0 \\ 4-(x^2+y^2)=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$x^2+y^2=4$ — радиус до кв. суммы

$$(x+y)^2 = 4 + 2xy \Rightarrow 4 = 4 + 2xy \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow xy=0$$

Получим систему: $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (2; 0); (0; 2)$

$$2) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 & (a) \\ 1-|x+y-2|=0 & (b) \end{cases} \quad \begin{cases} 1-|x+y-2|=0 \\ |x+y-2|=1 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$I \quad x+y=3 \Rightarrow x+y=3$$

$$a) 2(x+y)^2 - (x^2+y^2)=1$$

$$x^2+y^2=5$$

$$(x+y)^2 = 5 + 2xy \Rightarrow 9 = 5 + 2xy \Rightarrow 2xy=4 \Rightarrow xy=2$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow y=3-x$$

$$x(3-x)=2 \Rightarrow x^2-3x+2=0, \quad x_1=1, x_2=2 \Rightarrow y_1=2, y_2=1 \Rightarrow (1; 2); (2; 1)$$

$$II \quad x+y=1 \Rightarrow x+y=1$$

$$a) 2(x+y)^2 - (x^2+y^2)=1$$

$$x^2+y^2=1$$

$$(x+y)^2 = 1 + 2xy \Rightarrow 1 = 1 + 2xy \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow xy=0$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (1; 0); (0; 1)$$

Ответ: $(1; 0); (0; 1); (2; 0); (0; 2); (1; 2); (2; 1)$.

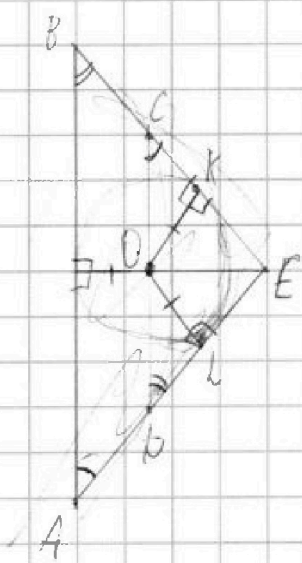


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



15
K, L - т. кас. сср. O и BE и AE
OK = OL (кас. r)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

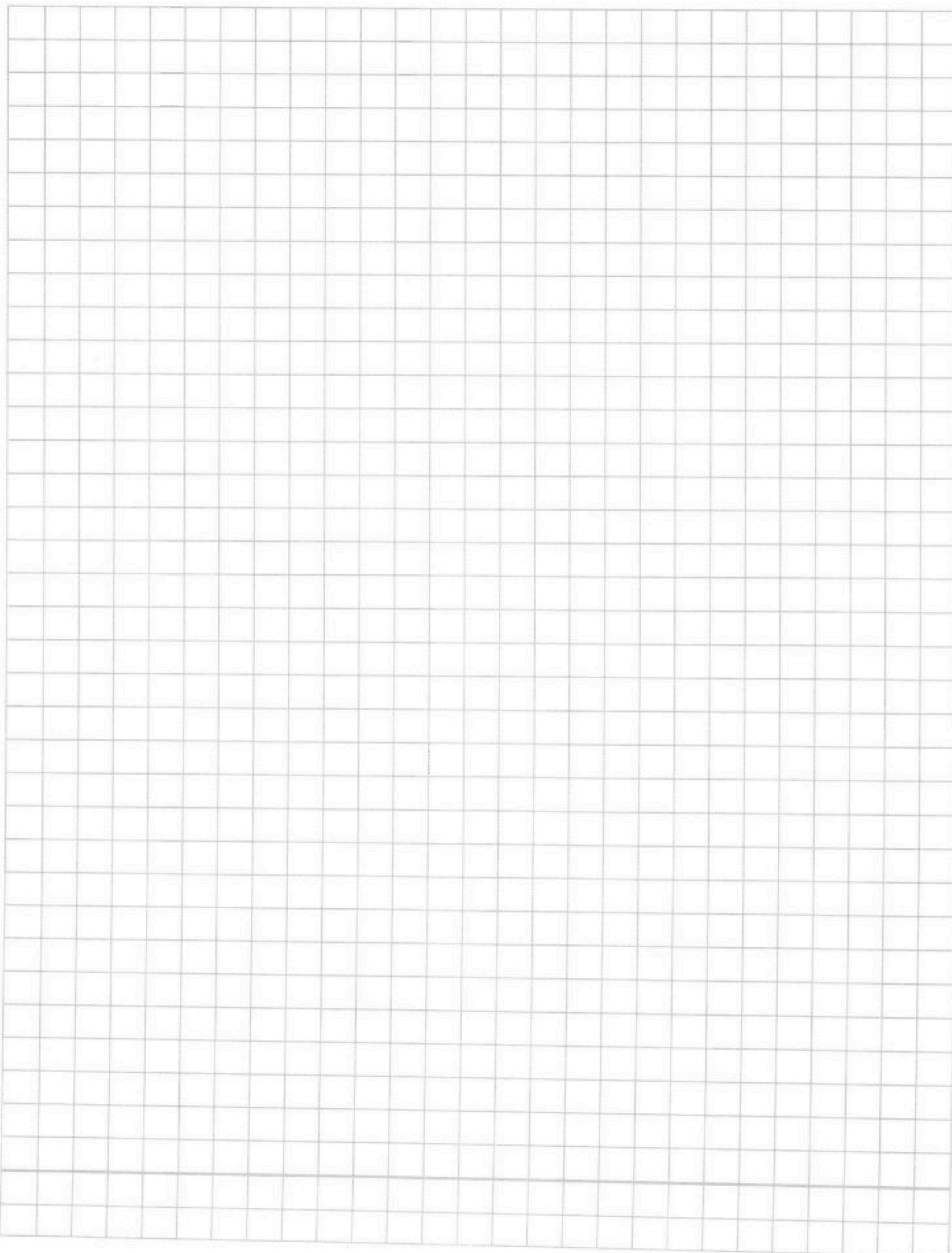
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$1) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 & (a) \\ 1-|x+y-2|=1 & (b) \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 1-|x+y-2|=1 \\ |x+y-2|=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 2(x+y)-(x^2+y^2)=0 \\ 4-(x^2+y^2)=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$(x+y)^2 = 4 + 2xy$$

$$\begin{cases} 4 = 4 + 2xy \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (2, 0); (0, 2)$$

$$2) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 & (a) \\ 1-|x+y-2|=0 & (b) \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 1-|x+y-2|=0 \\ |x+y-2|=1 \end{cases}$$

$$I) \begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y=3 \end{cases} \quad II) \begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y)-(x^2+y^2)=1 \\ 6-(x^2+y^2)=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

$$(x+y)^2 = 9 + 2xy \Rightarrow 2xy = 4 \Rightarrow xy = 2$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow (1, 2); (2, 1)$$

$$II) \begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y)-(x^2+y^2)=1 \\ 2-(x^2+y^2)=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$(x+y)^2 = 1 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow xy = 0$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (0, 1); (1, 0)$$

$$\text{Ответ: } (1, 0); (0, 1); (2, 0); (0, 2); (1, 2); (2, 1).$$

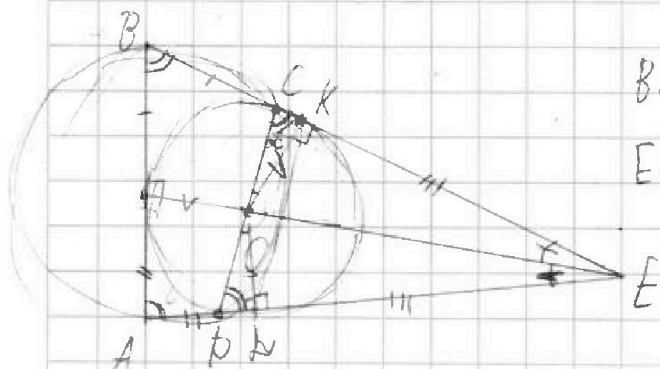
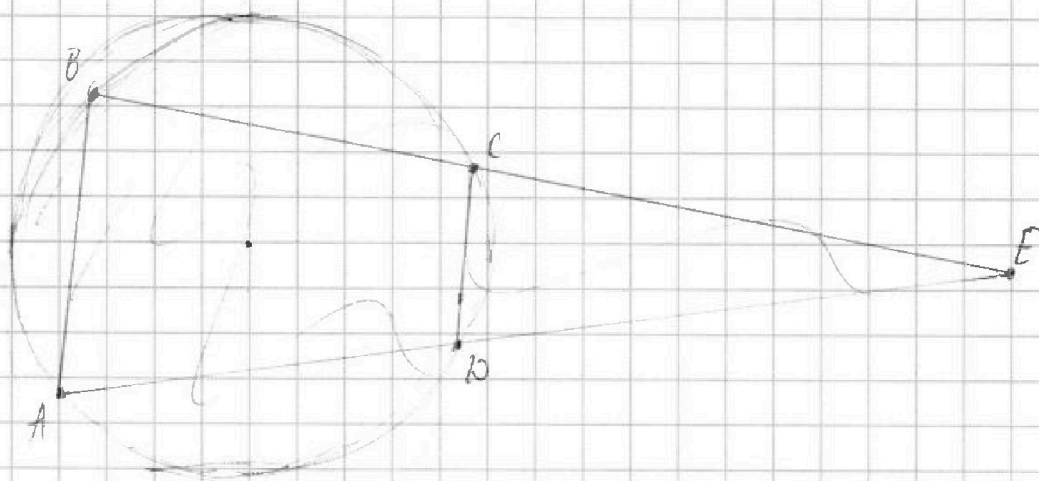


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BE = 10 \quad (ED + BD)_{\text{мин.}} = ?$$

$$ED \cdot EA = EB \cdot EC$$

☐ ☐ ☐

1, 2, 3, ..., 8

☐ ☐ ☐

Заметим, что "8" может быть угадано. Тогда "1" угадано, но

☐ ☐ ☐

не перед тем. При этом перед "1" не должно быть нуля, так

перед 8-ым уже есть. Т.е.:

$$1) 8 \text{ на 1-ой цифре} \Rightarrow 4 \text{ на 1-ой} - 4 \cdot 8$$

$$2) 8 \text{ на 2-ой} \Rightarrow 4 \text{ на 1-ой} - 4 \cdot 8$$

$$3) 8 \text{ на 3-ей} \Rightarrow 4 \text{ на 1-ой} - 4 \cdot 8$$

6. Если угадано, что 8 и 1 на 1-ой цифре, то



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-(x+y)(x+y-2)+2xy \geq 0$$

$$2xy \geq (x+y)(x+y-2)$$

$$2(x+y) - (x+y)(x+y-2) + 2xy - 1 + (x+y-2) = 4 - a - 6$$

$$1) x+y \geq 2 \Rightarrow (x+y-2)(1-x-y) + 2xy - 1 = a - 6 \quad / \cdot (-1)$$

$$(x+y-1)(x+y-2) + 2xy + 1 = 6 - a \quad / - (x+y-2)$$

$$(x+y-2) - 2xy + 1 = 6 - a - x - y + 2$$

$$x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 4x - 4y - 2xy + 1 = 6 - a - x - y + 2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 6 - a - x - y \quad / + (x+y)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 3y = 6 - a \\ a + 6 = 1 \end{cases}$$

$$2b = x^2 + y^2 - 3x - 3y + 1$$

$$2\sqrt{1-(x+y-2)} = x^2 + y^2 - 3x - 3y + 1$$

$$2a = (x+y-2)(1-x-y) + 2xy$$

$$2\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} = (x+y-2)(1-x-y) + 2xy$$

$$2\sqrt{-(x+y)(x+y-2)+2xy} = (x+y-2)(1-x-y) + 2xy \quad / \sqrt{2}$$

$$-4(x+y)(x+y-2)+2xy = (x+y-2)^2(1-x-y)^2 +$$

$$x+y = 1 \leq x+y \leq 3$$

$$2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$x=1 \text{ тогда } y=1$$

$$1) x+y=1$$

$$2-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 2$$

$$y=0 \quad 1$$

$$\text{Далее } x+y=1: (1,0); (0,1)$$

$$2) x+y=2$$

$$2(x+y)-(x^2+y^2) \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 4$$

$$\begin{matrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$(1,1); (2,0)$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0 \quad \begin{cases} D \geq 0 \\ 4t^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 4t^2 \geq 4 \Rightarrow t^2 \geq 1 \Rightarrow t \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases}$$

$$\Delta = (\sqrt{3}t)^2 - 4t^2 + 4 = 3t^2 - 4t^2 + 4 = -t^2 + 4 \geq 0 \quad | \cdot (-1) \leq 0$$

$$t^2 - 4 \geq 0$$

$$t^2 \geq 4 \Rightarrow t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$$

Ответ: $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

$$\begin{cases} a+b=40 \\ p \in \mathbb{P} \end{cases} \quad a=40-b \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 14p^5 \\ (40-b)^2 + 15(40-b) = 14p^5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 38 \\ \hline 304 \\ + 190 \\ \hline 1444 \end{array}$$

2014

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 32 \\ \hline 38 \\ + 57 \\ \hline 544 \end{array}$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 14p^5 \quad (40-b)(55-b) = 14p^5$$

$$t = 40 - 26 \quad t(t+15) = 14p^5 \quad t(t+15) : 14 \Rightarrow \begin{bmatrix} t: 14 & 1 \\ t+15: 14 & 12 \end{bmatrix}$$

1) $t: 14 \Rightarrow t+15: p^5$

Заметим, что $a-b \leq 38 \Rightarrow 38^2 + 15(40-38) = 1494 \Rightarrow 14p^5 \leq 1494 \Rightarrow p=2$

Возможные зн. p : $p=2 \Rightarrow p^5=32 \quad 14 \cdot 32 = 544 \leq 2014$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 73 \\ \hline 213 \\ + 189 \\ \hline 1971 \end{array}$$

$p=3 \Rightarrow p^5=243 \quad 14 \cdot 243 = 3402 > 2014 \Rightarrow p=2$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ \times 7 \\ \hline 16807 \\ + 4802 \\ \hline 16807 \end{array}$$

Может: $t(t+15) = 544$ $D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 544 = 225 - 8704 = -8479$

$$t^2 + 15t - 544 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{8479}}{2}$$

$$t_1: 40 - 26 = -32 \quad t_2: 40 - 26 = 14$$

$$-26 = -32 \quad -26 = -32$$

$$b = 36 \Rightarrow a = 4$$

Ответ: $a=4, b=36$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$1-|x+y-2| \geq 0$$

$$-|x+y-2| \geq -1$$

$$|x+y-2| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2 \leq 1 \\ x+y-2 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq 3 \\ x+y \geq 1 \end{cases}$$

✓3

$$AB=CD \quad BC=12, \cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

$$BC=12 \Rightarrow BM=MN=NC = \frac{12}{3} = 4$$

$$\triangle ACN \sim \triangle DCM, k=2 \Rightarrow CD=2AC$$

$$\text{Заметим, } \frac{AC}{AB} = \frac{CN}{NB} \Rightarrow AN - \text{диал.} \Rightarrow 2\angle CAN = \angle CAB$$

$$\text{Попр. косинусов: } BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \angle CAB \neq$$

$$12^2 = AC^2 + (2AC)^2 - 2 \cdot AC \cdot (2AC) \cdot (-\frac{1}{4})$$

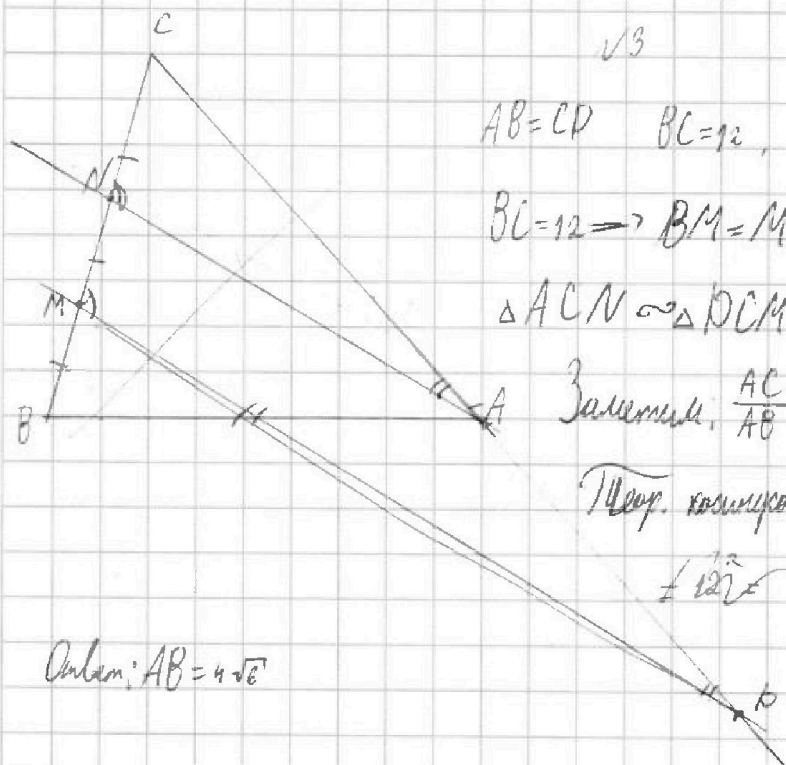
$$AC^2 + 4AC^2 + AC^2 = 144$$

$$6AC^2 = 144$$

$$AC^2 = 24$$

$$AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \Rightarrow AB = 4\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } AB = 4\sqrt{6}$$



$$\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} \geq 0 \quad x+y \geq 1 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 1$$

$$1 \geq 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$1 \geq \frac{1}{2}(x(2-x) + y(2-y)) \geq 0$$

$$-2(x+y)-(x^2+y^2)+1-|x+y-2|$$

$$2(x+y)-(x^2+y^2)+1-|x+y-2|+2\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)}(1-|x+y-2|) = 1$$

$$1) x+y \geq 2 \quad 2(x+y)-(x^2+y^2)-(x+y)+2+2\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)}(2-(x+y)) = 0$$

$$-x^2-y^2+2xy = -2\sqrt{\dots}$$

$$2x+2y-x^2-y^2 = 2x+2y+2xy+x^2+y^2-2x^2 = 2(x+y)+(x-y)(x+y)-2x^2 = (x+y)(x+y+2)-2x^2$$

$$= 2x+2y-(x+y)^2+2xy = (x+y)(x+y+2)+2xy$$