



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle \overset{CAN}{CMN}) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Последнее уравнение $xc^2 + 2\sqrt{3}t \cdot x + (4t^2 - 4) = 0$ имеет $D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 4(4 - t^2) = 4(2 - t)(t + 2)$.

П.к. D по условию > 0 (следует из наличия двух различных корней у уравнения), то $(2 - t)(t + 2) > 0$, $t \in (-2; 2)$.

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}t + \sqrt{4(2-t)(t+2)}}{2} = -\sqrt{3}t + \sqrt{(2-t)(t+2)}.$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3}t - \sqrt{4(2-t)(t+2)}}{2} = -\sqrt{3}t - \sqrt{(2-t)(t+2)}.$$

Погда произведение $x_1 \cdot x_2 = 3t^2 - \sqrt{3(2-t)(t+2)} \cdot t + \sqrt{3(2-t)(t+2)} \cdot t - (2-t)(t+2) = 3t^2 + t^2 - 4 = 4(t-1)(t+1) > 0$.

$(t-1)(t+1) > 0 \Rightarrow \cancel{t > 1} \quad t < -1$ или $t > 1$. Погда $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия $a + b = 40$, a и b — натуральные.

$$(a - b)^2 + 15(a - b) = 14p^5, \text{ где } p - \text{простое.}$$

Заметим, что разность $a - b \leq 38$,
(т.к. иначе $b \leq 0$ из $a + b = 40$)

т.к. $a \leq 39$, $a - b \geq 1$. Тогда

$$(a - b)^2 + 15(a - b) = (a - b + 15)(a - b) \leq \\ \leq 38 \cdot (38 + 15) = 2014. \text{ Тогда если } p \geq 3, \text{ то } 14 \cdot 3^5 = 14 \cdot 243 > 3400 > 2014, \\ \text{то есть равенство точно не будет} \\ \text{соблюдаться. Если } p = 2, \text{ то } 14 \cdot 2^5 = \\ = 14 \cdot 32.$$

Тогда если $a - b = k$, то уравнение имеет вид $k(k + 15) = 14 \cdot (14 + 15) \cdot \cancel{11}$

Значит $k_1 = 14$, $k_2 = -32$. В первом случае $a = b + 14$, $a = 40 - b \Rightarrow b = \frac{23}{2}$ — не натуральное число. А во втором случае $a = b - 32$, $a = -b + 40 \Rightarrow b = \frac{72}{2} = 36$ — подходит. Если $b = 36$, то $a = 40 - 36 = 4$.

Ответ: $a = 4$; $b = 36$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если $BM = MN = NC = \frac{BC}{3} = \frac{12}{3} = 4$ и $AN \parallel MP$, то $\triangle NCA \sim \triangle MCK$ (все соответствующие стороны параллельны и соответственные углы равны).

с пропорциями $\frac{NC}{MC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{CA}{CP} \Rightarrow CP = 2CA = AB, AC = \frac{1}{2}AB$.

И тогда далее заметим, что в $\triangle ABC$ $\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{CN} \Rightarrow AN$ — биссектриса $\angle BAC \Rightarrow \angle BAN = \angle CAN \Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN$.

Тогда по условию $\cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4}$.

Тогда по теореме косинусов $BC^2 = 444 = AC^2 + (2AC)^2 - 2 \cos(\angle BAC) \times AC \cdot 2AC = 6AC^2, AC^2 = 24, AC = 2\sqrt{6}, AB = 2AC = 4\sqrt{6}$.

Ответ: $4\sqrt{6}$.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разберём два таких случая: когда пустое место во втором ^{горизонтальном} ряду и когда оно в первом или третьем ^{вертикальном} ряду.

Если оно во втором ^{горизонтальном} ряду, то вариантов для него 3, и для каждого всего $8!$ расположений учеников. Заметим, что из 6 ($3!$) расположений в ряду (без пустого места) равно одно только равно одно подойдёт. Такие рассуждения можно провести и для второго ряда без пустого места. То, как сидят два ученика в ряду с пустым местом, не имеет значения. Значит всего будет $3 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8!}{12}$ способов для этого случая.

Для второго случая расположений пустого места в расположении учеников $8!$, также в каждом ряду без пустого места только 1 из $3!$ расположений трёх учеников будет подходить, и в ряду с пустым местом будет подходить только одно из двух расположений (т.к. они сидят подряд и это уже имеет значение).

Значит всего будет $6 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8!}{12}$.

Значит всего существует $\frac{8!}{12} + \frac{8!}{12} = \frac{8!}{6}$ способов рассадить учеников в классе, так, чтобы всем было хорошо видно доску.
Ответ: $\frac{8!}{6}$ способов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если из любой вершины графа можно добраться в любую другую, то граф связный, а если единственным способом — то без циклов. Значит, дорожная сеть на острове является деревом (в последующем дорожки — рёбра, деревни — вершины).

Значит в дереве есть вершины степеней 3, 4, 5, 7 и висячие (степени 1). Чтобы граф сохранил связность, нужно, чтобы вершины степеней 3, 4, 5, 7 были связными (иначе получится ~~компонента~~ ^{или ещё одна} ~~компонента~~ вида  или ). Тогда заметим, что всего рёбер в графе k (между вершинами степеней 3, 4, 5, 7) $+ (3+4+5+7) - 2k$ (т.к. каждое ребро считаем по 2 раза) $= 3+4+5+7 - k = 19 - k$ рёбер.

Если между вершинами 3, 4, 5, 7 хотя бы 3 ребра (и при этом не более 6 (6 в полном графе на четырёх вершинах)), то $19 - 2k$ ~~или~~ (число рёбер k висячих вершин, равное их количеству) $\geq 19 - 2 \cdot 6$ и $\leq 19 - 2 \cdot 3 \Rightarrow$ количество висячих вершин 7, 9, 11 или 13 (т.к. $2k$ всегда чётно, то $19 - 2k$ всегда нечётно), а значит всего вершин (деревень) 11, 13, 15 или 17.

Ответ: 11, 13, 15, 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В выражении $\sqrt{2x - x^2 + 2y - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1$ $|x + y - 2| \leq 1$, иначе оно не имеет смысла.

т.к. x и y — целые, то $|x + y - 2|$ тоже целое $\Rightarrow x + y - 2 = -1$ или $x + y - 2 = 0$, или $x + y - 2 = 1$, $x + y = 3$ или $x + y = 2$, или $x + y = 1$. Значит или (пусть без ограничения общности (так как выражение симметричное) $x \geq y$) $x = 2, y = 1$, или $x = 3, y = 0$, или $x = 2, y = 0$, или $x = 1, y = 1$, или $x = 1, y = 0$, или $y < 0$, $x \geq 0$ (при $y < 0$ и $x < 0$ первое слагаемое не имеет смысла).

Заметим, что все варианты, где или $x, y \leq 2$ (по модулю) или $x, y > 2$ (при этом второе > 2 по модулю) не подойдут, т.к. $\sqrt{x(2-x) + y(2-y)}$ имеет смысл и $x(2-x) + y(2-y) \geq 0$

Для $x = 2, y = 1$ $\sqrt{4 - 4 + 2 - 1} + \sqrt{1 - |1|} = 1$ выполняется, для $x = 3, y = 0$ $\sqrt{6 - 9 + 0 - 0} + \sqrt{1 - |1|}$ не имеет смысла, для $x = 2, y = 0$ $\sqrt{4 + 0 - 4 - 0} + \sqrt{1 - |0|} = 1$ выполняется, для $x = 1, y = 1$ $\sqrt{2 - 1 + 2 - 1} + \sqrt{1 - |0|} = 1 + \sqrt{2} \neq 1$, для $x = 1, y = 0$ $\sqrt{2 - 1 + 0 - 0} + \sqrt{1 - |-1|} = 1$ выполняется.

Если же $x > 0, y < 0$, и $|y|$ меньше чем $|x|$ пос 1, 2 или 3, то слагаемое $\sqrt{2x - x^2 + 2y - y^2} = \sqrt{x(2-x) + 2y - y^2}$, которое имеет смысл только при $x \leq 2$ и $|y| \leq 2 - x = 1$. Значит опять получаем варианты $x = 2, y = \pm 1$; $x = 1, y = 0$ или -1 ; $x = 0, y = -1$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но из этих случаев не были ещё рассмотрены только $x=2, y=-1$; $x=1, y=-1$ и $x=0, y=-1$.

Если $x=2, y=-1$, то $\sqrt{2-1-2-1} < 0$ — не имеет смысла; если $x=1, y=-1$, то $\sqrt{1-1-2-1} < 0$ — не имеет смысла; если $x=0, y=-1$, то $\sqrt{0-1-1-0} < 0$ также не имеет смысла. ~~Также для $x=y=0$~~

Значит координаты только $x=2, y=1$ (и наоборот), $x=2, y=0$ (и наоборот), $x=1, y=0$ (и наоборот).

Ответ: $(2; 1); (1; 2); (2; 0); (0; 2); (1; 0); (0; 1)$.

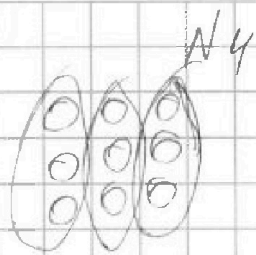


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

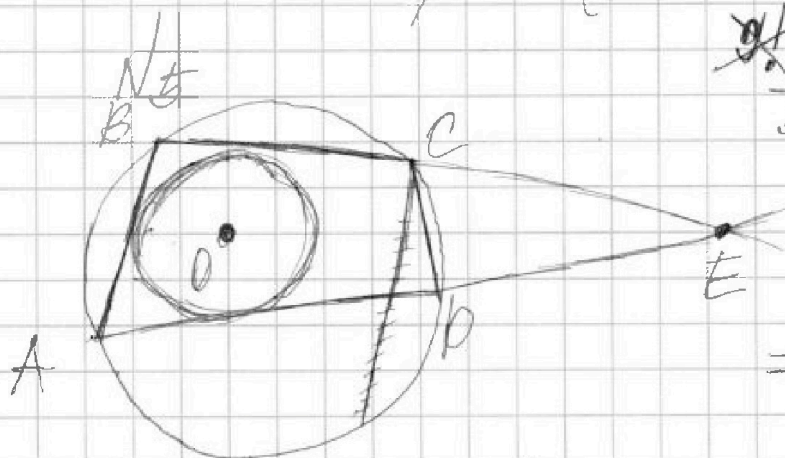
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

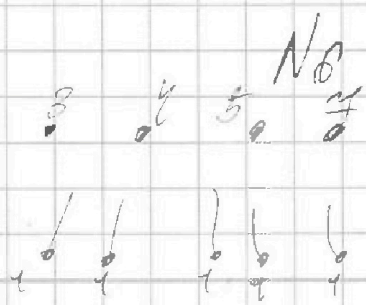
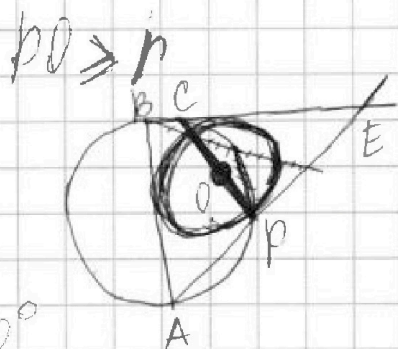
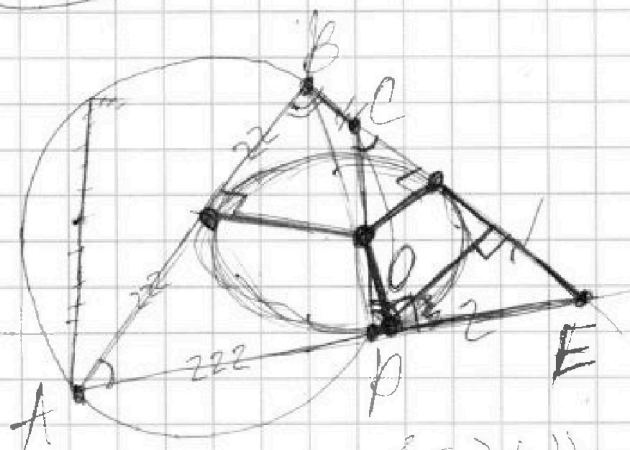


1 2 3 4 5 6 7 8
 8 — не может сидеть в первом ряду, иначе 2 не сможет свободно и всего 4 занято.
 1 — не сидит в последнем ряду.



$$\frac{3 \cdot 8!}{3! \cdot 3!} + \frac{6 \cdot 8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8!}{12} + \frac{8!}{12} = \frac{8!}{6}$$

$$EC \cdot CB = EB \cdot DA$$



В графе нет циклов!
 он — дерево $\Rightarrow$
 $\text{рёбер} = \text{вершин} - 1$
 $\text{рёбер} = (3 + 4 + 5 + 4 - 2k) + k$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k \cdot (k+15) = 17 \cdot 32.$$

$$k_1 = 17$$

$$k_2 = -32$$

$$k^2 + 15k - 17 \cdot 32 = 0.$$

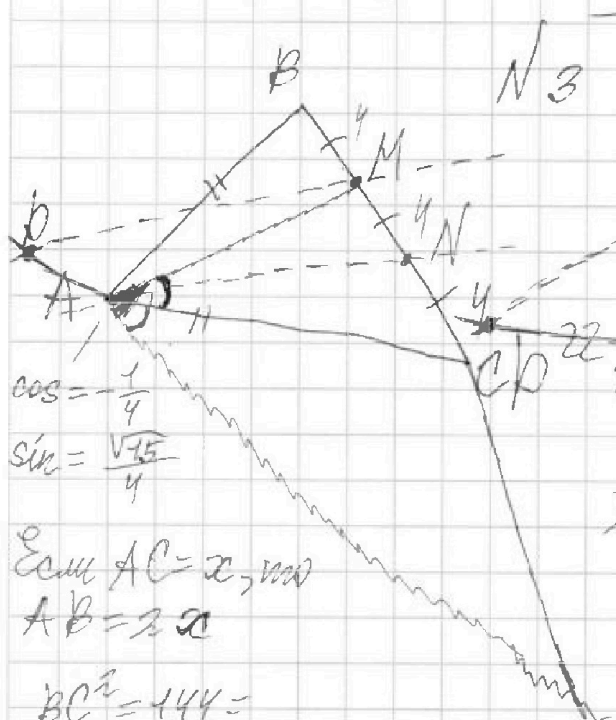
$$D = 225 + 8 \cdot 17 \cdot 128 = 2401 = 49^2.$$

$$k_1 = \frac{-15 + 49}{2} = 17.$$

$$k_2 = \frac{-15 - 49}{2} = -32.$$

$$1) \begin{cases} \alpha - \beta = 17 \\ \alpha + \beta = 40 \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{23}{2} - \text{не имеет.}$$

$$2) \begin{cases} \alpha - \beta = -32 \\ \alpha + \beta = 40 \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{42}{2} = 30, \alpha = 4$$



$$\cos = -\frac{1}{4}$$

$$\sin = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Если } AC = x, \text{ то}$$

$$AB = 2x$$

$$BC^2 = 144 =$$

$$= 5x^2 + x^2 = 6x^2$$

$$x = 2\sqrt{6}, AB = 4\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin(\angle CAN) = \frac{\sqrt{15}}{8} =$$

$$= (\sin \angle CAN) \cdot (\cos \angle CAN)$$

$$\frac{AC}{CN} = \frac{AB}{BN} \Rightarrow AN -$$

$$\angle CAN = \angle BAN \Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN \Rightarrow \cos \angle BAC = -\frac{1}{4}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1
 $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 9 = 0.$

$D = 12t^2 - 16t^2 + 36 = 4(1 - t^2) = 4(1 - t)(1 + t).$

от -1 до 1
не вых. все осмисл.
 $t \in (-1; 1).$

$x_1 = (-\sqrt{3}t + \sqrt{(1-t)(1+t)})$

$x_2 = (-\sqrt{3}t - \sqrt{(1-t)(1+t)})$

$3t^2 - \sqrt{3(1-t)(1+t)} \cdot t + \sqrt{3(1-t)(1+t)} \cdot t -$

$-(1-t)(1+t) = 3t^2 + t^2 - 1 = 4t^2 - 1$

$> 0, t^2 > 0,25$

$t > 0,5 \text{ или } t < -0,5.$

$t \in (-1; -0,5) \cup (0,5; 1).$

N2
 $a + b = 40$; a и b — натуральные.

$(a - b)^2 + 15(a - b) = 17p^5$, p — простое.

$a = b$ не пойдёт. ($a - b \leq 38$).

$(a - b)(a - b + 15) = 17p^5 \leq 38 \cdot 53 = 2014.$

p^5 — хотя бы $2^5 = 32$; далее

$3^5 = 243$, $5^5 = 3125 \Rightarrow$ подходит

только $2^5 = 32$. Тогда пусть $a - b = k$: