



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
 $\angle CAN$
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 9t^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow D > 0$$

$$\frac{D}{4} = 40(2\sqrt{2}t)^2 - 9(t^2 - 1) = 8t^2 - 9t^2 + 9 = 9 - t^2 > 0$$

$$x = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9-t^2} \quad (\text{п.к. } 9-t^2 > 0, x \text{ действительна}) \quad t \in (-3; 3)$$

$$x_1, x_2 > 0$$

$$x_1, x_2 = 9t^2 - 9 \quad \text{из макс. значения}$$

$$9(t^2 - 1) > 0 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$\begin{cases} t \in (-3; 1) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow t \in (-3; -1) \cup (1; 3) \quad \text{Ответ:}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12 \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 1a + 3b = 19p^7 \Rightarrow (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3)$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+b+3) = 19p^7; \quad \therefore p^7$$

$$a - b = 12 \Rightarrow a + b = 2b + 12$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^7$$

$$\begin{aligned} 2b+12 &= 2 \Rightarrow 19p^7 = 2 \Rightarrow p^7 = 2 \Rightarrow p = 2 \quad \text{так как} \\ &= 2(12+15) \end{aligned}$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 2^7 = 16 \cdot 19 \quad a$$

$$2b+15 = 2(b+7) + 1 \cdot 2 \Rightarrow (2b+12) : 16$$

т.к. 19 - простое, и $2b+15 > 12$, если $(2b+12) : 19$, $(2b+15)$ не делится.

А так ни одного прост. дел. для $(2b+12)(2b+15)$, тогда возможно $\Rightarrow (2b+12) : 19 \Rightarrow 2b+12 = 16; 2b+15 = 19$

$$\Rightarrow b = \frac{16-12}{2} = 2 \Rightarrow a = 2+12 = 14$$

Ответ: $a = 14; b = 2$

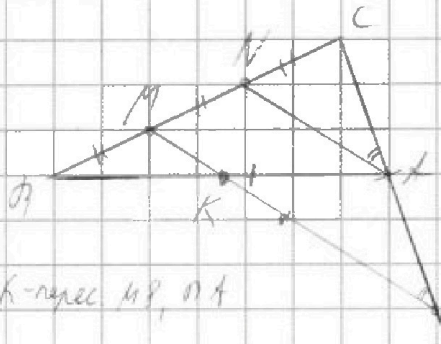


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
7 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BM = MN = NC; M, N \in BC \Rightarrow BM = \frac{BC}{3}$$

$$AB = CB \quad MS \parallel NA$$

$$BC = 6$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4} \quad \text{[Косинус } \angle B]$$

K-перес. MS, NA

$$MS \parallel NA, MN = NC \Rightarrow NK - \text{ср. линия } \triangle MNA \Rightarrow NK \parallel MA \Rightarrow \triangle KNC \sim \triangle MNC$$

$$MK - \text{ср. линия } \triangle MNA \Rightarrow BK = KN = CL = AB = \frac{AB}{2}$$

$$\Rightarrow \angle KAP = \angle KAN \Rightarrow \angle PKL = \angle LPK \Rightarrow \triangle KAP \sim \triangle KAN \Rightarrow \angle KAP = 180^\circ - 2\angle CAN$$

теор. кос. $\triangle KAN$

$$KN^2 = 2 \cdot \frac{AB^2}{4} - 2 \cdot \frac{AB^2}{4} \cos(180^\circ - 2\angle CAN) =$$

$$= \frac{AB^2}{2} (1 + \cos(2\angle CAN)) = \frac{AB^2}{2} (1 - \frac{3}{4}) = \frac{AB^2}{8} \quad KN = \frac{AB}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos(2\angle CAN) = 1 - 2\sin^2(\angle CAN)$$

$$\frac{AB^2}{8} \sin^2(\angle CAN) = 1 - \cos^2(\angle CAN) \Rightarrow \cos^2(\angle CAN) = 1 - \frac{1 - \cos(2\angle CAN)}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\angle CAN)}{2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\cos(\angle CAN) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

теор. кос. $\triangle BAE$ $\triangle NAK$

проведен $BE \parallel NA$; $E \in CD$

$$\triangle BAE \sim \triangle KAN \Rightarrow BE = 2KN = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

$$\text{теор. кос. } \triangle BCE: BC^2 = (1.5AB)^2 + \left(\frac{AB}{\sqrt{2}}\right)^2 - AB^2 \left(\frac{1.5}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\angle CAN)\right)$$

$$\frac{AB^2}{2} \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = AB^2 \left(2.125 + \frac{3}{8} \right) = AB^2 \cdot 2.375 = BC^2 = 6^2 = 36$$

$$AB^2 = \frac{36}{2.375} = \frac{36 \cdot 8}{19} = \frac{288}{19} \Rightarrow AB = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{19}} = \frac{12\sqrt{38}}{19}$$



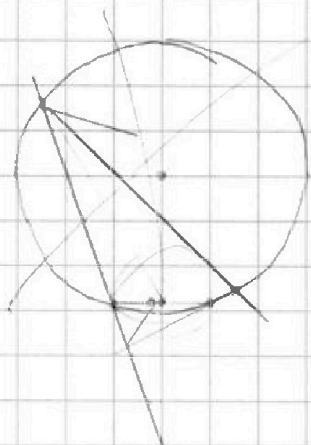
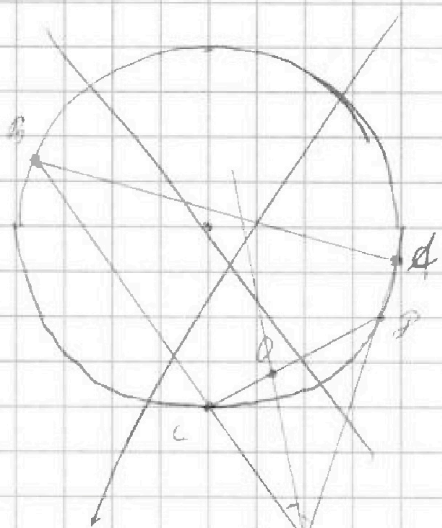
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

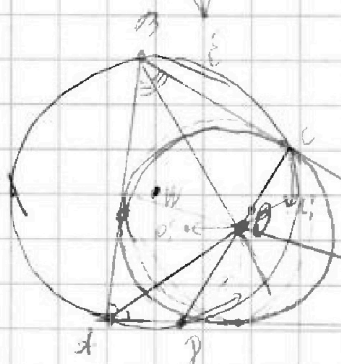
СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



U-UM. Kpa. OTC.
OKOM. ZEM. P. C. A. P.
OKA



O-целая часть в ΔABE $\Rightarrow$ AO -медиана $\perp AC$
 $BE = 72$ AO -медиана $\Rightarrow$
 $max (BE + AO)$

$$\vec{EO} = \vec{EP} + \vec{PO} = \vec{EC} + \vec{CO}$$

Р. Задача решена. А. В. и

сдвинем O до O' в предположении $\angle APO' < \angle APO \Rightarrow C', P'$ сдвинуты по AC

$\angle BAP' < \angle BAP$ P' против $AC \Rightarrow$ от P, P' линия

$\angle BAP' < \angle BAP$

длина если сдвинем O в P'

P и P' сдвинуто по AC

C против $AC \Rightarrow P'$ сдвинуто в P' по PC

P и P' сдвинуто по AC

P' против $AC \Rightarrow$ от P, P' линия

все в $\Delta PO'$ в P' сдвинуто по PC

от P и P' линия сдвинуто по PC

(длина - угловая PC)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть всего n деревьев

т.е. из любой деревни можно добраться до любой другой, упр. Γ вершины которого - деревни, а ребра - дороги (верн. соедин. между соотв. дерев. есть * перуор через другие деревни дорога) связный

т.е. из любой деревни можно добраться до любой другой Γ м. способом, в Γ нет циклов $\Rightarrow \Gamma$ - дерево.

в дереве n вершин $n-1$ ребер

$\Rightarrow$ $5+6+7+9+(n-4)$ $n-4$ деревень, с которыми соедин. 1-ая деревня дорога

$$\frac{5+6+7+9+(n-4)}{2} = n-1 \quad (\text{кажд. степень вершин есть удв. число ребер})$$

$$23+n = 2n-2$$

$$23+n = 2n-2$$

$$25 = n$$

ответ: на остове 27 деревень всего 25



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{7-|x-y-1|} = 2 \quad x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-y \in \mathbb{Z}$$

$$\text{кор. бор.} \geq 0 \Rightarrow |x-y-1| \leq 1; 2x \geq 2y+x^2+y^2$$

$$7-|x-y-1| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{7-|x-y-1|} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} \geq 2-1=1$$

$$|x-y-1| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-y-1 \leq 1 \Rightarrow x-y \leq 2 \\ x-y-1 \geq -1 \Rightarrow x-y \geq 0 \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-y \in \{0, 1, 2\}$$

пусть $x-y=0$

$$x=y$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{7-|x-y-1|} = \underbrace{\sqrt{-2x^2}}_{\text{невозм}} + \sqrt{6} \neq 2$$

пусть $x-y=1$

$$x=y+1$$

$$\sqrt{2(y+1)-2y-(y+1)^2-y^2} + \sqrt{7-|1-1|} = \sqrt{2y+2-2y-y^2-2y-7-y^2} + \sqrt{7} =$$

$$= \sqrt{-2y^2-2y+1} + 1 = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-2y+1} = 1$$

$$-2y^2-2y+1 = 1$$

$$-2y(y+1) = 0$$

$$y = 0; -1$$

$$x = 1; 0$$

пусть $x-y=2$

$$x=2+y$$

$$\sqrt{2(y+2)-2y-(y+2)^2-y^2} + \sqrt{0} = \sqrt{4-2y^2-4y-4} = \sqrt{-2y(y+2)} = 2$$

$$-2y(y+2) = 4$$

$$-2y^2-4y-4 = 0$$

$$y^2+2y+2 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \Rightarrow \text{корней } y \text{ нет} \Rightarrow$$

случай $x-y=2$ невозможен

ответ: $(x, y) \in \{(0, 1); (1, 0)\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

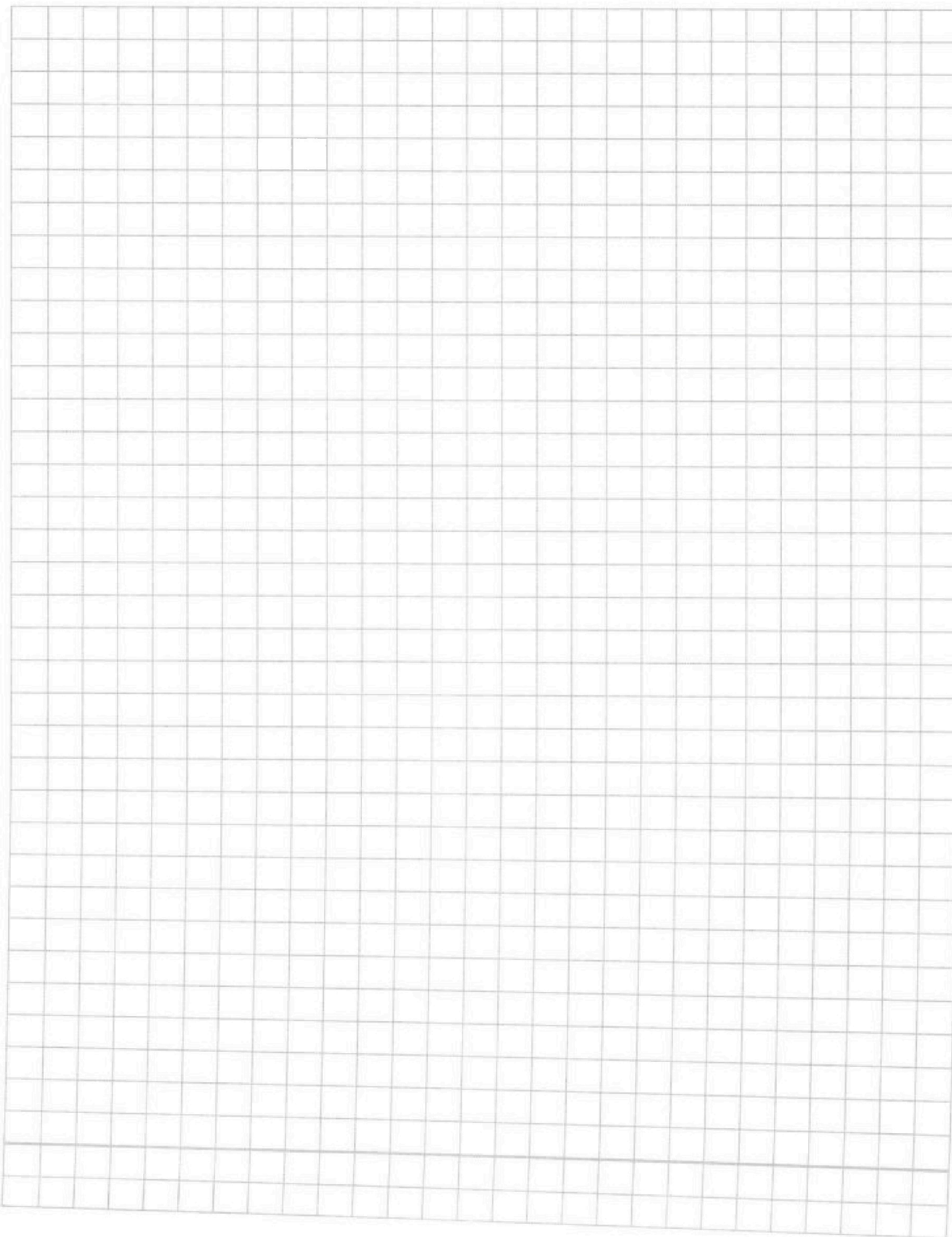
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$k:$

$a_1 = k-2 \cos$
 $a_2 = k-2 \cos k-a-1$
 $a_3 = k-2 \cos k-a_2$

$x(2-x) - y(2+y)$
 $2x+2y - (x+y)^2 + 2xy$
 $x(2+y) - y(2-x) - (x+y)^2 > 0$

$7^2 + 7^2 + 9 = 0$
 $9/4 = 76 - 9 =$

$7^2 = 8 \cdot 28$
 $5+8+7+9 =$
 $= 71+9+7+227$

$2-7+2-8+7+1-1+1=2$
 $\pm \sqrt{7-11-1}=2$

$AC=6$
 $\cos \angle B_2(A, B) = \frac{1}{2}$
 $\cos \angle B_2(A, B) = \cos \angle B_2(A, B)$

$180-2 \angle C' A U$
 $AE^2 = 2AD^2 - 2AD^2 \cos(180-2\alpha) =$
 $= 2AD^2 \left(7 - \frac{3}{4}\right) = \frac{2AD^2}{4}$
 $BE = \frac{AD}{2}$
 $DC^2 = BE^2 + 0.25 AD^2 =$

$\cos 2k = -\frac{3}{4} = 7-2 \sin^2 \alpha$
 $2 \sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$
 $\sin^2 \alpha = \frac{3.5}{4}$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3.5}}{2}$

$\cos^2 \alpha = 7 - \sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$
 $\tan^2 \alpha = \frac{7 - \cos 2\alpha}{2}$

$\frac{\sqrt{3.5}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3.5}{8}}$

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 9 + 9 + 23$
 $7+4+5+8 =$
 $= 70+5=21$

$2-7+2-8+7+1-1+1=2$
 $\pm \sqrt{7-11-1}=2$

$AC=6$
 $\cos \angle B_2(A, B) = \frac{1}{2}$
 $\cos \angle B_2(A, B) = \cos \angle B_2(A, B)$

$180-2 \angle C' A U$
 $AE^2 = 2AD^2 - 2AD^2 \cos(180-2\alpha) =$
 $= 2AD^2 \left(7 - \frac{3}{4}\right) = \frac{2AD^2}{4}$
 $BE = \frac{AD}{2}$
 $DC^2 = BE^2 + 0.25 AD^2 =$

$\cos 2k = -\frac{3}{4} = 7-2 \sin^2 \alpha$
 $2 \sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$
 $\sin^2 \alpha = \frac{3.5}{4}$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3.5}}{2}$

$\cos^2 \alpha = 7 - \sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$
 $\tan^2 \alpha = \frac{7 - \cos 2\alpha}{2}$

$\frac{\sqrt{3.5}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3.5}{8}}$

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 9 + 9 + 23$
 $7+4+5+8 =$
 $= 70+5=21$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

