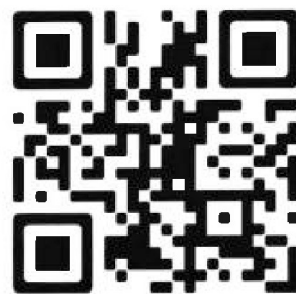




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle C\text{ДМ}) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}t x + 9(t^2 - 9) = 0$$

x_1, x_2 - решения

Если есть 2 корня, то дискриминант полож. $\Rightarrow$

$$32t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

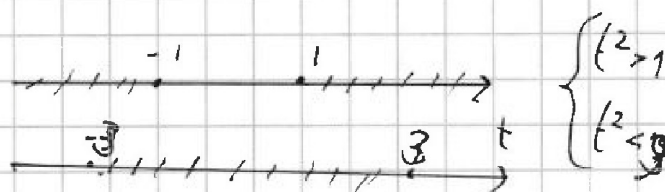
Если $x_1 \cdot x_2 > 0$, то по т. Виета $9(t^2 - 9) > 0$

$$t^2 > 1$$

$$8t^2 - 9t^2 + 9 > 0$$

$$-t^2 + 9 > 0$$

$$t^2 < 9$$



$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12 \quad a = b + 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

$\uparrow$ чет $\Rightarrow 19p^4$ - чет $\Rightarrow p^4$ - чет $\Rightarrow p = 2$,
всё все другие простые числа нечетные $\Rightarrow$

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 16$$

$$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 8$$

$$2b^2 + 27b + 90 = 152$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$2b^2 - 4b + 31b - 62 = 0$$

$$2b(b-2) + 31(b-2) = 0$$

$$(2b+31)(b-2) = 0$$

$$b = -\frac{31}{2} \quad b = 2 \Rightarrow a = 14$$

$\uparrow$
 b - натуральное $\Rightarrow$
и подходит

Ответ: $a = 14 \quad b = 2$

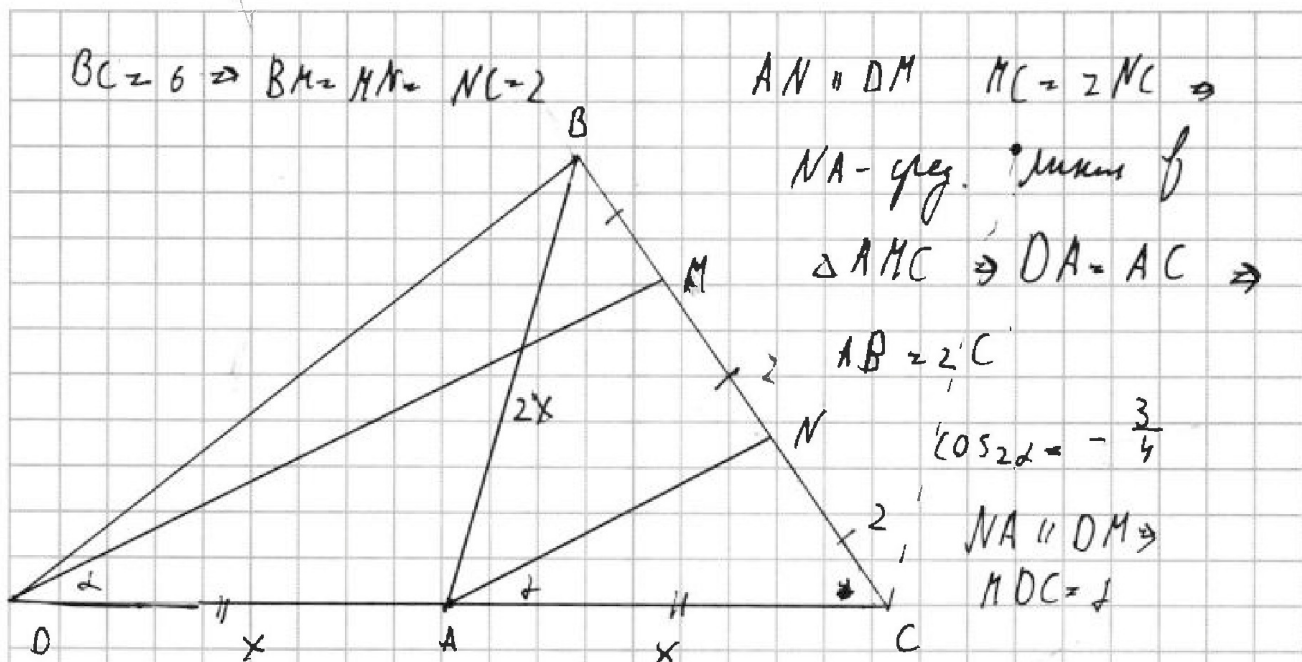


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

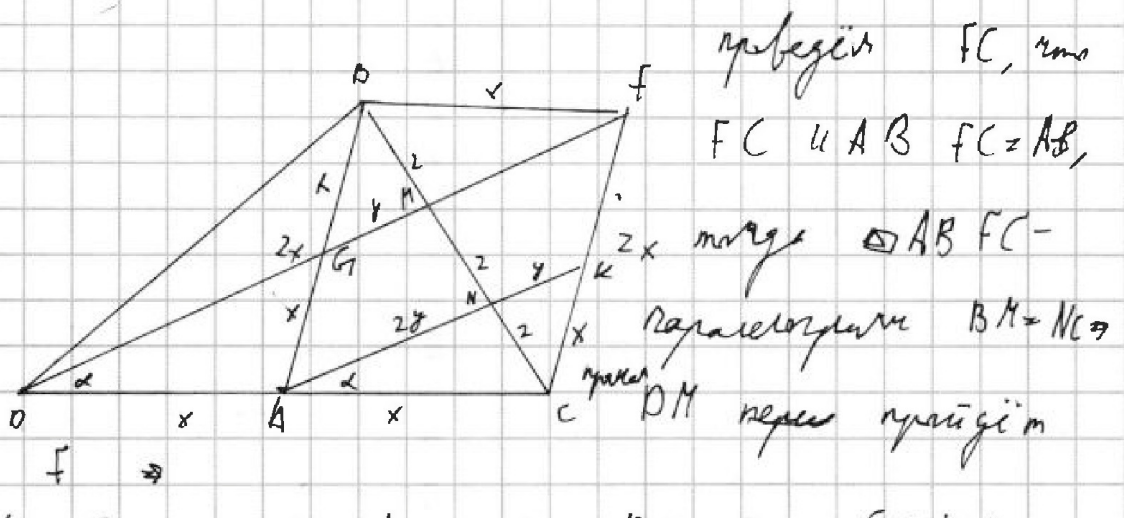
$$-\frac{3}{4} = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{8}}$$



По th. Паскаля $BG = AG$, ведь $BM = NC$ $GM \parallel AN$

Если $AN = 2y$, то $GM = y$ по параллелограмму $\Rightarrow MK = y \Rightarrow AK = 3y$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

th cos

$$x^2 = x^2 + 9y^2 - 2\cos 2 \cdot 3y \cdot x$$

град KC

$$4 = x^2 + 9y^2 - 2\cos 2 \cdot 2y \cdot x$$

гк Δ ANC

$$9y^2 = 6\cos 2 yx$$

$$y = \frac{2}{3} \cos 2 x$$

4x²

$$9y^2 = 2\cos 2$$

$$4 = x^2 + \frac{16}{9} \cos^2 2 x^2 - 2\cos 2 \cdot \frac{4}{3} \cos 2 x^2$$

$$4 = x^2 \left(1 + \frac{16}{9} \cos^2 2 - 2\cos 2 \cdot \frac{4}{3} \right)$$

$$2x = \sqrt{1 + \frac{16}{9} \cos^2 2 - 2\cos 2 \cdot \frac{4}{3}}$$

$$2x = \sqrt{1 + \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{1 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}} = \frac{36\sqrt{2}}{11\sqrt{2} - 8}$$

Answer: $AB = \frac{36\sqrt{2}}{11\sqrt{2} - 8}$

$$\sqrt{\frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим мы выбрали каких-то 3 школьника, чтобы они сели в один ряд. Их рассаживаем - 1 вариант. Везде свободных мест нет $\Rightarrow$ 1 сидит на первую парту, все остальные выше него. Второй сидит на вторую парту, все третий выше него.

Если мы выбрали двух школьников и посадили в один ряд, то сядет также третий.

к - низкий в - высокий х - пустая

1) к в х в этих случаях перед низким сядет высокий. $\Rightarrow$ количество вариантов

2) к х в

3) х к в

4) в х к

зависит от того, как мы расположим предметы увеличив по партам ряды.

Выборать ряд, где 2 человека - 4 вар, положить их - 4 вар. Выбрать в него людей - C_{11}^2 . Выбрать трюх людей в первый из оставшихся - C_3^3 ; во второй из оставшихся - C_6^3 ; в четвертой - 1 вар. $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

всего вариантов:

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 1 =$$

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \Rightarrow$$

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot 20 \cdot 84 =$$

$$4 \cdot 6720 \cdot C_{11}^2$$

$$\text{Итого: } 6720 \cdot C_{11}^2 \\ 26880$$

из трех частей

$$C_6^3 = 20$$

$$C_9^3 = 84$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2$$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0$$

$$|x - y - 1| \leq 1$$

$$-1 \leq x - y - 1 \leq 1$$

$$y \leq x \leq 2 + y$$

Сумма двух корней целых чисел - целое $\Rightarrow$
самые корни - целые числа

$$0 \leq \sqrt{1 - |x - y - 1|} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\text{Если } \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 1, \text{ то}$$

$$x - y - 1 = 0 \quad x = y + 1$$

$$2y + x - 2y - y^2 - 2y - x - y^2 = x$$

$$-2y^2 - 2y = 0$$

$$2y(y + 1) = 0$$

$$\begin{matrix} y = 0 & x = 1 \\ y = -1 & x = 0 \end{matrix}$$

$$\text{Если } \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 0$$

$$|x - y - 1| = 1$$

$$x - y - 1 = 1$$

$$x - y = 2$$

$$x = y + 2$$

$$x - y - 1 = -1$$

$$x = y$$

дискриминант ≤ 0

$$2y + x - 2y - y^2 - 4y - x - y^2 = 4$$

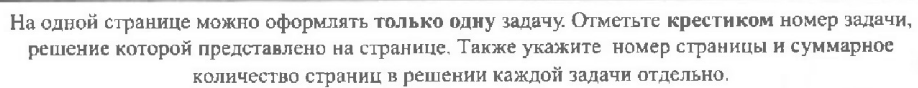
$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{4}$$

$$2y^2 + 4y + 4 = 0 \quad (y + 2) = 0 \quad y = -2 \quad x = 0$$

$$2) x = y \quad 2x - 2x - x^2 - x^2 = 4$$

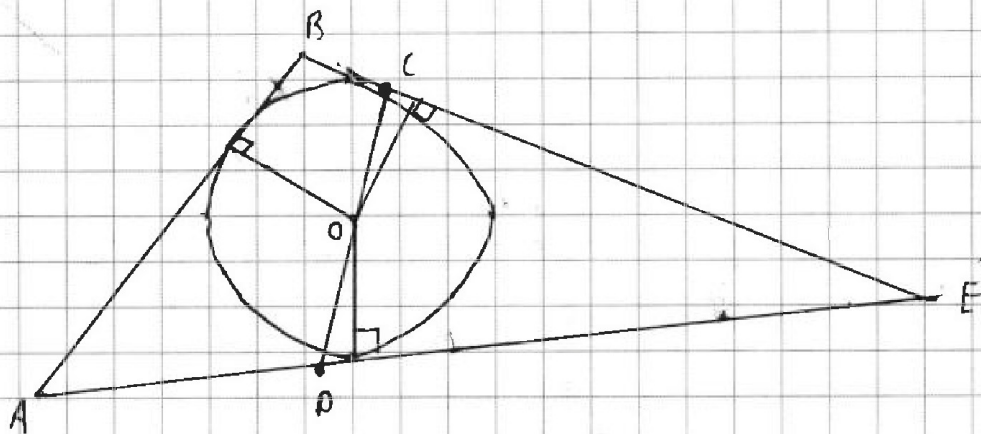
$$-2x^2 = 4 \quad x$$

Ответ: $y = 0 \quad x = 1 \quad y = -1 \quad x = 0$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим деревцо, из которой выходят 1 деревца.
 Она или соединена с деревцем, где 5, 6, 7 и 9 вершин
 или с деревцем, где один деревец. Рассмотрим
 такой вариант. Тогда 2 деревца. Из одного деревца
 — (другое) — из других деревьев
 выходит в эту ветвь — такого не может быть.
 → Все деревца с 1 деревцем соединены с
 деревцем с вершинами 5, 6, 7 и 9.

Рассмотрим эти четыре деревца и вершины
 между ними. Деревце равно 3. Ведь через
 остальные вершины мы не можем никакие
 ребра, кроме тех, — тогда есть на 4 вершинных
 связных, но в нем нет циклов, иначе
 так можно добраться между вершинами дву-
 ма способами — это дерево — у дерева на
 n вершинных $n-1$ ребра — между этими 4 вер-
 шинами 3 ребра — осталось 24 вершины — у нас
 24 вершины с 1 деревцем — ответ: 28 деревьев

