



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
- он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

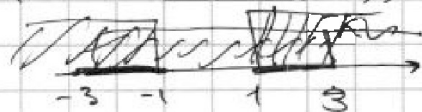
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + (4\sqrt{2}t)x + (9t^2 - 9) = 0$, чтобы у ур-ния было 2 корня, надо $D > 0$,
то есть $32t^2 - 4(9t^2 - 9) > 0 \Rightarrow 36 - 4t^2 > 0 \Rightarrow 9 > t^2$. Также
произв. корней по т. Виета это свободный член $\Rightarrow 9t^2 - 9 > 0 \Rightarrow$

$t^2 > 1$. Отсюда $1 < t^2 < 9 \Rightarrow t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$ (если

$t < 0 \Rightarrow t < -1$, иначе $t \geq 0 \Rightarrow 1 < t < 3$ ($t^2 < 9 \Leftrightarrow 0 < (t-1)(t+1)$),
 $t^2 < 9 \Leftrightarrow (3-t)(3+t) < 0$



Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2.

Заметим, что $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) =$

$= (a+b)(a+b+3)$, $a+b$ и $a+b+3$ разной четности $\Rightarrow a+b$ или

$a+b+3 : 2 \Rightarrow (a+b)(a+b+3) : 2$, но $(a+b)(a+b+3) = 19p^4$,

$19p^4 : 2 \stackrel{(19,2)=1}{\Rightarrow} p^4 : 2 \Rightarrow p=2$ (групи нечет. и $p^4 : 2 \Rightarrow$

$(a+b)(a+b+3) = 19 \cdot 16$, пусть $a+b=t \Rightarrow t^2+3t=19 \cdot 16 \Rightarrow$

$(t^2-16)(t+19)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=16 \\ t=-19 \end{cases}$, но $t=a+b>0$, т.к. $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$t=a+b=16$, так как $a-b=12$ складываем $\Rightarrow 2a=28 \Rightarrow a=14$

и $b=2$.

Ответ: $a=14$ и $b=2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

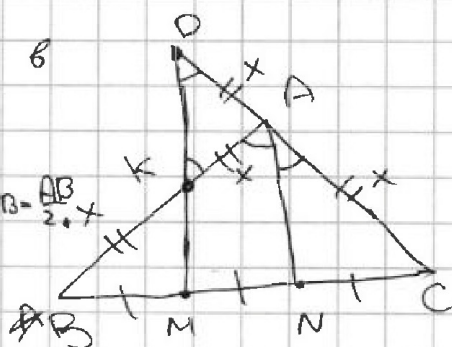
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть DM перес. AB в K , т.к. $\angle B$

$\triangle ABN$ MK - параллельна AN (стор.) и

$BM = MN \Rightarrow MK$ - сред. линия $\Rightarrow AK = KB = \frac{AB}{2} = x$

В $\triangle MDC$ AN - параллельна DM



(сторона) и $MN = NC \Rightarrow AN$ - средняя линия $\Rightarrow AD = AC = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2}$.

Значит $AK = AD \Rightarrow \triangle AKD$ - $\triangle \Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$, но

$AN \parallel DM \Rightarrow \angle ADK = \angle DAN$ и $\angle AKD = \angle BAN \Rightarrow \angle DAN = \angle BAN$

$\angle ABC = 2\angle CAN$. Пусть $AC = x$, тогда $AB = 2x$.

Запишем теорему косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle ABC$$

$$36 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \cos \angle CAN$$

$$36 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$36 = 5x^2 - 3x^2$$

$$x^2 = \frac{3}{2} \quad (\text{т.к. } x > 0)$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



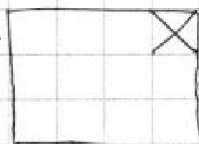
СТРАНИЦА

1 из 1

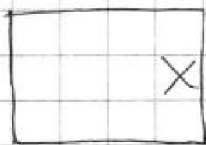
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

БОО общности пусть нет узелка в 4 ряду (всего 12 карт и 11 ут. $\Rightarrow$ ровно 4 карты пустя) $\Rightarrow$ тогда есть 3 варианта:



(1)



(2)



(3)

В 1 и 3 случаях мы можем выбрать в 1 ряд 3 узелка (далее они однозначны по росту садятся), далее выбрать 3 узелков

в 2 ряд, далее в 3 ряд и в 4 ряд оставшихся в двух узелков, заметим, что везде узелки садятся однозначно по росту (это и будет $\Rightarrow$ переставить в

рядах мы их ~~не~~ не можем) $\Rightarrow$ в каждом из (1) и (3) вариантах по $C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ вариантов $\Rightarrow$ всего в (1) и (3) вариантах $2 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ вариантов.

В (2) случае у нас тоже самое, только в 4 ряду узелки могут садиться как угодно (они оба и так видят) $\Rightarrow$ вариантов $C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 \Rightarrow$ всего

вариантов $4 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$, заметим, что

такое же кол-во вариантов будет, если карта свободна в 1 или 2 или 3 ряду $\Rightarrow$ общее кол-во вар. $16 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$

Ответ: $16 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проясняется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS.

Заметим, что из вписанности $ABCD \Rightarrow \angle EDC =$

$= \angle CBA = 2\beta$ (обозначим за 2β), тогда

$\angle OBE = \beta$, т.к. BO - бис. $\angle EBA$, т.к. D'

EO - бис. $\angle BEA \Rightarrow$ давайте сделаем

симметрично точки D относ. EO , пусть B

получилась точка $D' \Rightarrow D'E = DE, D'O = DO \Rightarrow D'E + D'O =$

$= DE + DO$, а также $\angle ED'O = 2\beta$ (также из симметрии)

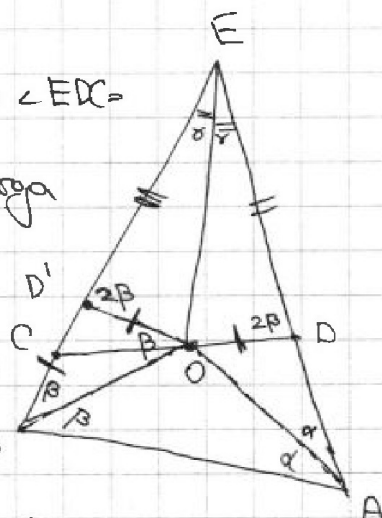
но $\angle ED'O = \angle D'BO + \angle D'OB$ (внеш. для $\angle BDO \Rightarrow$)

$2\beta = \beta + \angle D'OB \Rightarrow \angle D'OB = \beta \Rightarrow \triangle BD'O - \text{р.б.} \Rightarrow D'O = D'B \Rightarrow$

$DE + DO = D'E + D'O = D'E + D'B = BE = 12$. Значит всегда

$DO + DE = 12$ всегда.

Ответ: 12.





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ROB
N6

Построим граф, где вершины - деревни, дороги - рёбра.
Тогда наш граф - дерево (иногда есть цикл).



 , тогда есть 2 пути от верш. к другой ?!)

Задача: Обозначим вершины со степенями 5, 6, 7, 9 "особенными", а со степенями 1 — "неособенными".

Тогда из каждой вершины ребро идет в соседнюю (иначе  и граф не связный?!). Тогда

граф такой. Заметим, что под граф из отдельных вершинных тоже дерево (подграф дерева - дерево).

6. Если 3 ребра $\Rightarrow$ сумма степеней ~~не~~ вершин

если считаем рёбра $с_{св.} - с_{св.}$ б., ~~то~~ ^{то} получим что

УСТАЛЫЕ РЕБРА ЗАДЫРАЮТ У ОЖЕННЫХ ВЕРШИН ПО
 ≠ ОЖЕННЫМ

~~$$\sum \text{ребра осед.} - \text{не осед.} = 5 + 6 + 7 + 9 - 6 = 21 + 9 = 30$$

$$= 21 \Rightarrow \text{не осед. вершин}$$~~

Пусть k — количество вершин $\Rightarrow$ сумма степеней.

Вершин $1 + k + 5 + 6 + 7 + 9 = k + 27$, а ребер $(k+4) - 1 = k+3$
(кол-во вершин $- 1$, т.к. дерево) $\Rightarrow k + 27 = 2(k+3) \Rightarrow k = 21 \Rightarrow$
всего деревьев $21 + 4 = 25 \Rightarrow$ ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7.

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = \sqrt{2-(x-1)^2-(y+1)^2} \leq \sqrt{2}$$

≤ 0 .

Заметим, что $|x-y-1|$ — целое, неотриц. (модуль ≥ 0),

Также $|x-y-1| \leq 1$ (иначе $1-|x-y-1| < 0$ (но это

выбран. под корнем $\Rightarrow$ противоречие) $\Rightarrow |x-y-1| = 0$ или

$$|x-y-1| = 1$$

$$1) |x-y-1| = 0 \Rightarrow x = y+1 \Rightarrow x-1 = y \Rightarrow 2-(x-1)^2-(y+1)^2$$

$$= 2-x^2-y^2. \text{ Такого не может быть, т.к. тогда}$$

$$\sqrt{2-(x-1)^2-(y+1)^2} = 2, \text{ но этот корень } \leq \sqrt{2}.$$

$$2) |x-y-1| = 1 \text{ Тогда } \sqrt{1-|x-y-1|} = 1 \Rightarrow \sqrt{2-(x-1)^2-(y+1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow 2-x^2-y^2 = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1 \Rightarrow (y+1)^2+y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2+2y+x=0$$

$$2y(y+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y=-1 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow \text{пары } (1;0) \text{ и } (0;-1).$$

$$2) |x-y-1| = 1 \Rightarrow \sqrt{1-|x-y-1|} = 0 \Rightarrow \sqrt{2-(x-1)^2-(y+1)^2} = 2,$$

$$\text{но } \sqrt{2-(x-1)^2-(y+1)^2} \leq \sqrt{2} ?!$$

Ответ: $(1;0)$ и $(0;-1)$.

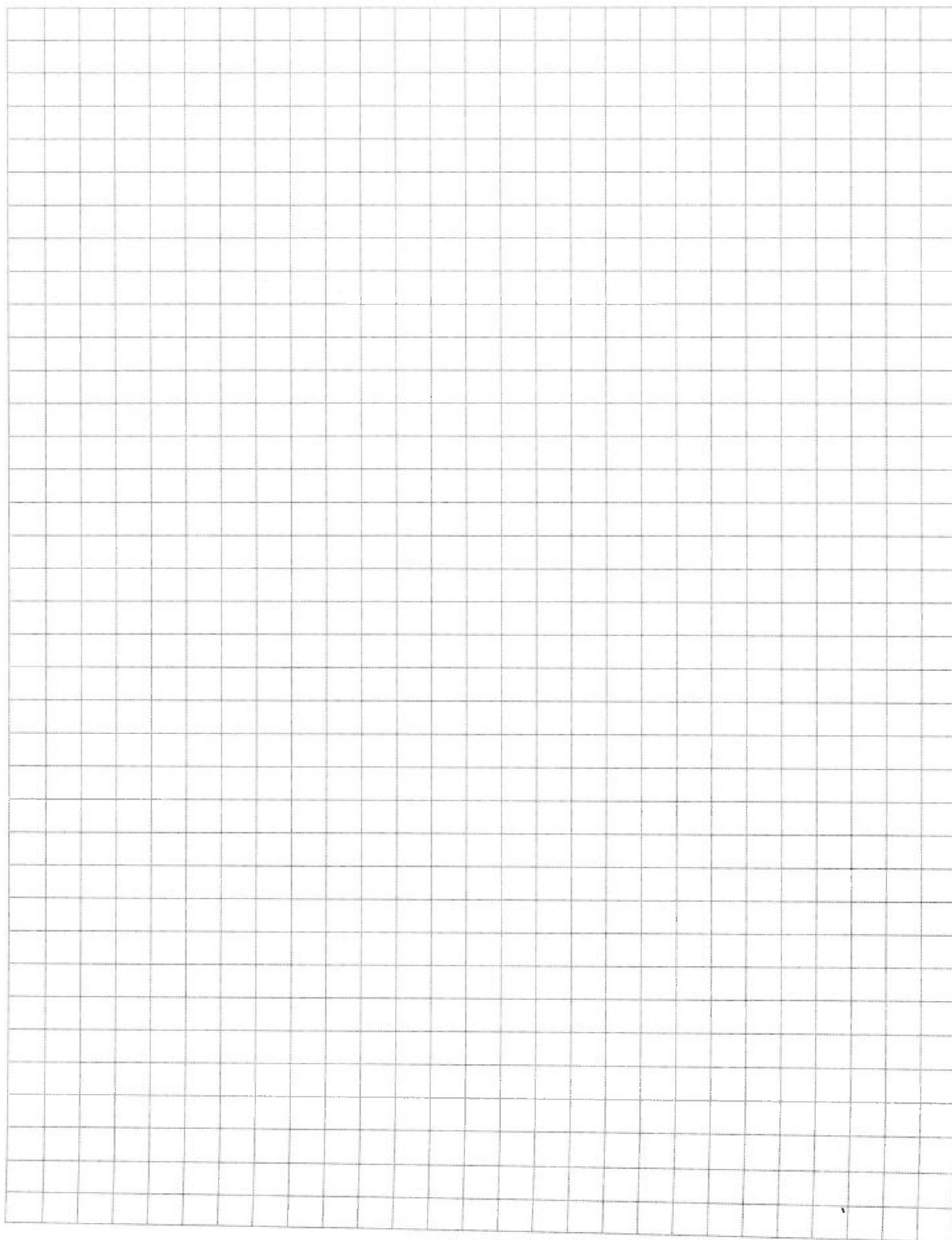


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



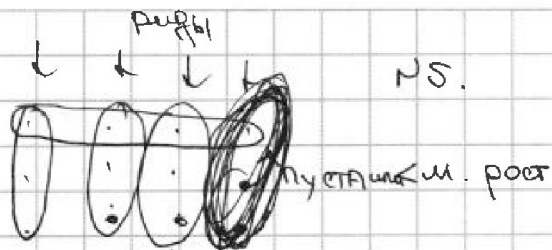


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

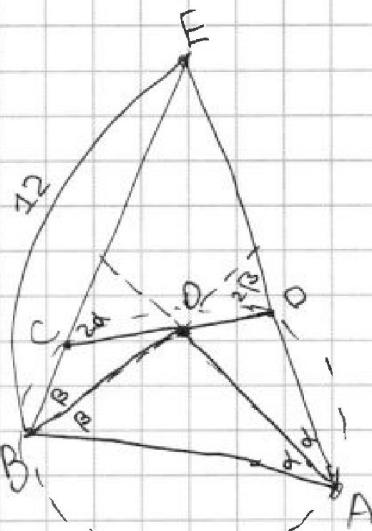
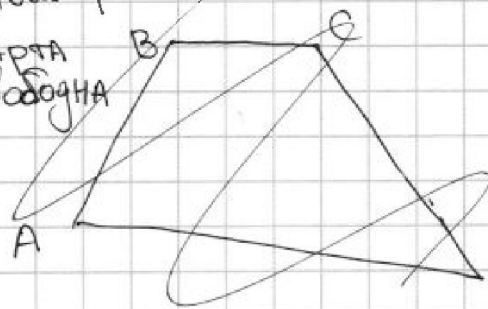
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



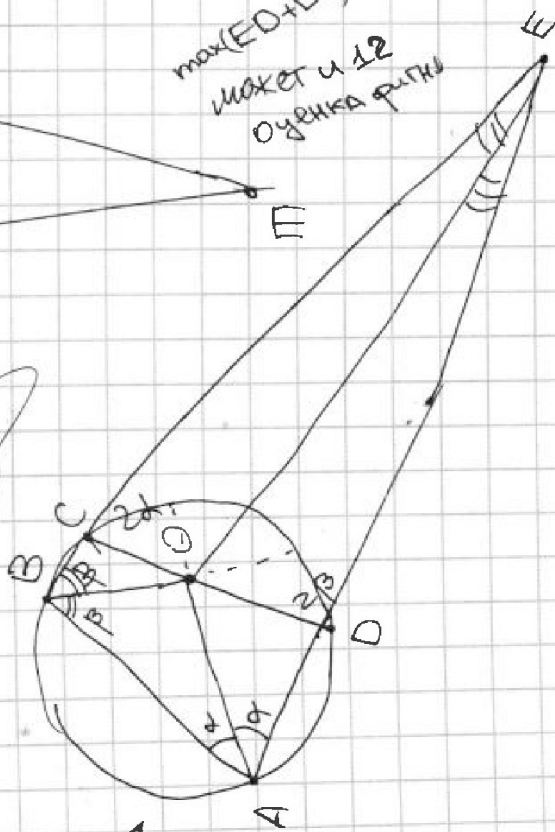
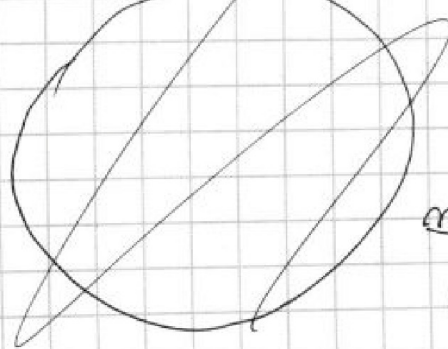
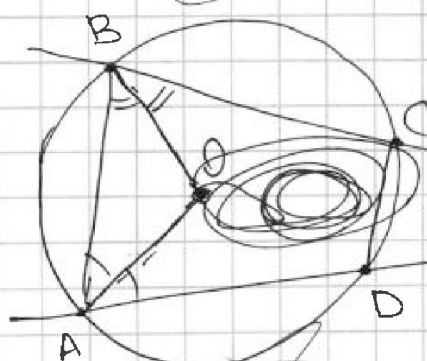
11 угеников
разный рост

1 пирта
свободна

A пирта



max(ED+DO)
макет и 12
оценка рифы



BE=12
max(ED+DO)
BE=12

жесткая довольно конструкция



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

$$(x-y-1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2x + 2y - 2xy$$

* ~~т.е.~~ $|x-y-1| = t$

$$t^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2x + 2y - 2xy$$

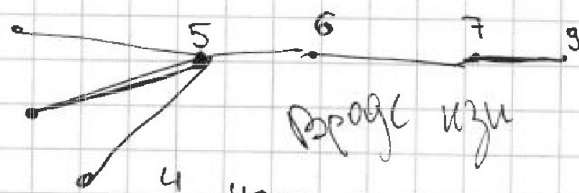
$$-t^2 = 2x - 2y - x^2 - y^2 - 1 + 2xy$$

$$\underbrace{1 - t^2 - 2xy}_{\downarrow} = \underbrace{2x - 2y - x^2 - y^2}_{\downarrow}$$

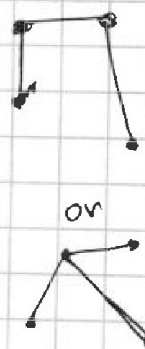
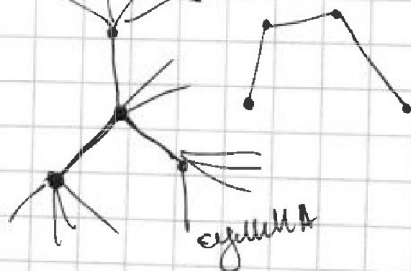
~~$$1 - |x-y-1| = 2 + 2x - 2y - x^2 - y^2 + 2$$~~

~~$$\sqrt{-(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2} + \sqrt{1 - (x-y-1)^2} = 2$$~~

$\sqrt{2}$ $\sqrt{1}$



несколько 1





1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$x^2 + 4\sqrt{2}t x + 9t^2 - 9 = 0$$

$$\begin{cases} D > 0 \\ 9t^2 - 9 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 32t^2 - 4(9t^2 - 9) > 0 \\ 9(t^2 - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32t^2 - 36t^2 + 36 > 0 \\ t^2 > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 9 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow t^2 \in (1; 9) \downarrow$$

$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

№4. $a - b = 12$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$\parallel$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b)$$

Пусть $a+b=t$

$$t^2 + 3t = 19p^4$$

$$t(t+3) = 19p^4 = 19p^2 \cdot p^2$$

$$p=2 \Rightarrow t(t+3) = 19 \cdot 16$$

$$\begin{matrix} t=16 \\ t=-19 \end{matrix} \quad t^2 + 3t - 16 \cdot 19$$

$$1) \begin{cases} a+b=16 \\ a-b=12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=14 \\ b=2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a+b=-19 \\ a-b=12 \end{cases}$$

a и b коор $\Rightarrow X$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2-a^2-b^2} + \sqrt{1-a-b+1} = 2$$

$$a = x-1$$

$$b = y+1$$

Пусть $a \geq b-1$

$$2ab \leq a^2 + b^2 \leq 2$$

$$ab \leq 1$$

целых x, y
~~целых x, y~~

$$\sqrt{1-|x-y-1|} \leq 1$$

$$x = y+1$$

$$\sqrt{2-(x-1)^2-(y+1)^2} = 1$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x=1, y=0$$

$$x=0, y=-1$$

Но не факт
может быть и рау.

$$|x-y-1| - \text{целое}$$

$$1 - |x-y-1| - \text{целое}$$

$$1 - |x-y-1| = 0$$

$$1 - |x-y-1| = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = y+1$$

$$\sqrt{2-x^2-y^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2y^2 + 2y + 1 = 1$$

$$2y(y+1) = 0 \quad \text{всё}$$

$$y=0$$

$$y=-1$$

$$\sqrt{2-}$$

$$|x-y-1| = 1$$

$$\text{Пусть } x \geq y+1$$

$$\begin{cases} x = y+2 \\ x = y \end{cases}$$

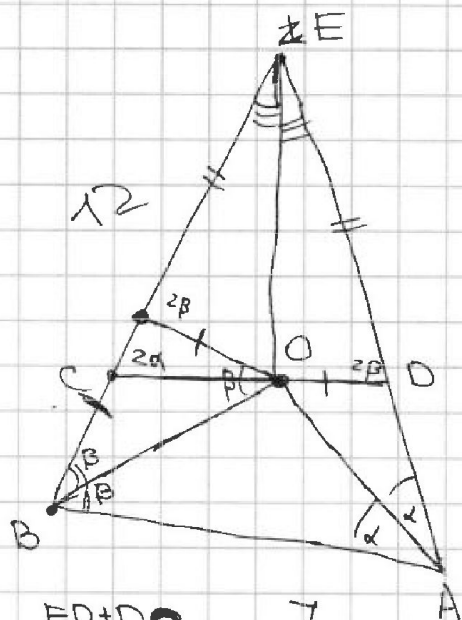


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

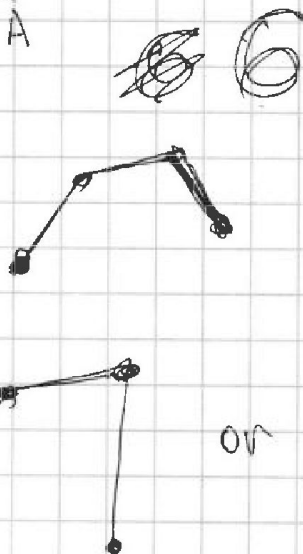
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



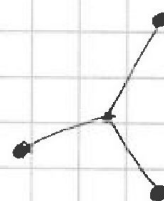
$$\begin{aligned}k + 5 + 6 + 7 + 9 &= 2(k + 3) \\k + 27 &= 2k + 6 \\k &= 21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ED + DO &= 12 \\DE + DO &= 12\end{aligned}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



or



$$\begin{aligned}5 + 8 + 7 + 9 - \\(1 + 2 + 2 + 1)\end{aligned}$$

21

21

первое еще

$$\begin{aligned}5 + 8 + 7 + 9 - \\(1 + 1 + 1 + 3)\end{aligned}$$

21

