



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.
Пусть q - знаменатель прогрессии

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^4 = |x+1|$$

$$q = \pm \sqrt[4]{|x+1|}$$

$$b_{13} = b_4 \cdot q^6 = 5-x$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (\sqrt[4]{|x+1|})^6 = 5-x$$

$$\sqrt{(13x-35) \cdot \frac{|x+1|}{x+1}} = 5-x$$

$$\begin{cases} \sqrt{13x-35} = 5-x \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 13x-35 = 25-10x+x^2 \\ 5-x \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sqrt{-13x+35} = 5-x \\ x < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -13x+35 = 25-10x+x^2 \\ 5-x \geq 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-23x+60=0 \\ x \leq 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x=20 \\ x=3 \end{cases} \\ x \leq 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ x=-5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2+3x-10=0 \\ x \leq 5 \\ x < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ x=-5 \end{cases} \\ x \leq 5 \\ x < -1 \end{cases}$$

Ответ: -5; 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1+3|y-12| = \sqrt{16y-z^2} \end{cases}$$

$\sqrt{16y-z^2}$ принимает значения от 0 до 13 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} |y+1+3|y-12| \leq 13 \\ |y+1+3|y-12| \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y-35 \leq 13 \\ 4y-35 \geq 0 \\ y \geq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y+37 \leq 13 \\ -2y+37 \geq 0 \\ y \leq 12 \\ y \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y+35 \leq 13 \\ -4y+35 \geq 0 \\ y \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 12 \\ y \geq 8,5 \\ y \geq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 12 \Rightarrow \\ y \leq 8,5 \\ y \geq 1 \\ y \leq 12 \\ y \geq 3,5 \\ y \leq 8,75 \\ y \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=12 \Rightarrow |12+1+3|$$

$$+3|12-12| = \sqrt{16y-z^2}$$

$$13 = \sqrt{16y-z^2} \Rightarrow z=0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-0} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

1) Рассмотрим, когда отрезок делит большой прямоугольник на прямоугольники 100×250 клеток.

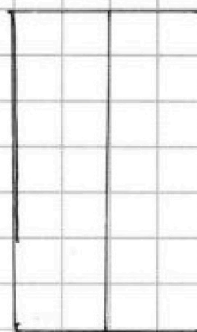
В каждом из них тогда

будет по 4 закрашенные клетки, при этом расположение будет симметрично относительно отрезка.

Вариантов закрашки у нас будет:

$$\frac{(100 \cdot 250)!}{4! \cdot (100 \cdot 250 - 4)!} = \frac{25000!}{4! \cdot 24996!}$$

100 100



250

Пример



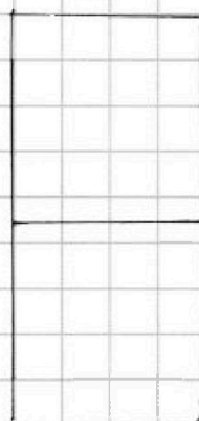
для 4x6

2) Теперь отрезок делит на прямоугольники 200×125 клеток.

Вариантов будет:

$$\frac{(200 \cdot 125)!}{4! \cdot (200 \cdot 125 - 4)!} = \frac{25000!}{4! \cdot 24996!}$$

200



125

125

Пример для 4x6



3) Когда мы рассматривали симметрию относительно отрезков, мы два раза посчитали закрашки с



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

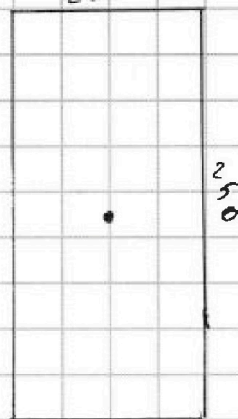
центральной симметрии, т.к. если закрашенное множество сходает

3) В этом случае половину (4)

клеток мы можем расставить как угодно, а другую половину нужно расставить так чтобы

имелась симметрия относительно центра.

Всего вариантов:
$$\frac{(200 \cdot 250 : 2)!}{4! (200 \cdot 250 : 2 - 4)!} = \frac{25000!}{4! 24996!}$$
 Пример для 4x6



4) Мы же тогда мы считаем

прочие варианты, мы 3 раза

рассчитаем случаи, когда закрашенные

множество будет симметрично и относительно своих отрезков, и центра.

Пример для 4x6

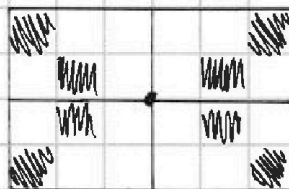
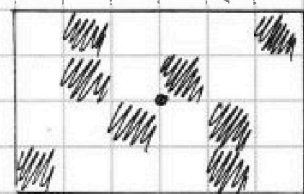
Почему вариантов у нас:

$$\frac{(250 \cdot 200 : 4)!}{(8 : 4)! (250 \cdot 200 : 4 - 8 : 4)!} = \frac{12500!}{2! 12498!}$$

$$\frac{(8 : 4)! (250 \cdot 200 : 4 - 8 : 4)!}{2! 12498!}$$

Это число мы должны вычесть 2 раза.

Ответ: $3 \cdot \frac{25000!}{4! 24996!} - 2 \cdot \frac{12500!}{2! 12498!}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c - целые числа $\Rightarrow (a-c)$ и $(b-c)$ - целые

Пусть $(a-c)(b-c) = x^2$, где x^2 - квадрат целого числа. x^2 можно делиться только на $\pm 1; \pm x; \pm x^2$.

Значит:

$$a-c = b-c = x$$

или

$$a-c = b-c = -x$$

или

$$a-c = \pm 1 \text{ и } b-c = \pm x^2$$

или

$$a-c = \pm x^2 \text{ и } b-c = \pm 1$$

$$a > b \Rightarrow a-c > b-c \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нам подходит вариант

$$a-c = 1 \text{ и } b-c = -x^2$$

или

$$a-c = x^2 \text{ и } b-c = 1$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = -x^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = x^2 - 1$$

$$\begin{cases} a-c = x^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b = x^2 - 1$$

$a-b$ не кратно 3 $\Rightarrow x^2 - 1$ не кратно 3

Если x не кратно 3, то $x = 3n+1$ или $x = 3n+2$ (где n - целое неотрицательное число)

$$\text{Тогда } x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = (3n+2) \cdot 3n$$

$$\text{или } x^2 - 1 = (3n+3)(3n+1) = 3(n+1)(3n+1)$$

Но получаем, что $x^2 - 1$ кратно 3, а этого

быть не должно $\Rightarrow x$ - простое число кратно 3 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow a-b = 3^2 - 1 = 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a+b^2=560 \\ a-b=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2+b=552$$

$$b^2+b-552=0$$

$$b^2+84b-23b-552=0$$

$$(b+24)(b-23)=0$$

$$\begin{cases} b=23 \\ a=31 \\ b=-24 \\ a=-16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=23 \\ b=-24 \end{cases}$$

Найдем c :

При $b=23; a=31$:

$$a-c=1 \text{ или } b-c=1$$

$$c=a-1$$

$$c=b-1$$

$$c=32$$

$$c=22$$

При $b=-24; a=-16$:

$$a-c=-1 \text{ или } b-c=1$$

$$c=-15$$

$$c=-25$$

Ответ: $(31, 23, 32), (31, 23, 22), (-16, -24, -15), (-16, -24, -25)$.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a > b \quad 24999 \cdot 24998 \cdot 24997 \text{ простое}$$

$$a - b \div 3$$

$$(a-c)(b-c) = ab - ac - bc + c^2 = x^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 100 \\ 81 \cdot 92! \\ \hline 250 \end{array}$$



$$\begin{aligned} a-c &= -1 \\ b-c &= -x^2 \\ a-b &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$(a-c)(b-c) = x$$

$$(a-c)(b-c) = -x \quad a-c > b-c$$

$$(a-c) = \pm x^2$$

$$(b-c) = \pm 1$$

$$(a-c) = x^2$$

$$b-c = 1$$

$$a-b = x^2 - 1$$

$$b^2 + b = 560 + 1 - x^2$$

$$b^2 + b = 561 - x^2$$

$$25000!$$

$$\begin{array}{r} 25000! \\ 8! \cdot 24998! \\ \hline a-b=8 \end{array}$$

$$b^2 + b = 552$$

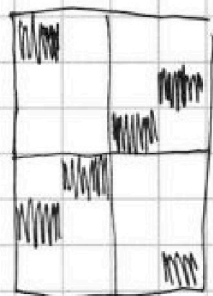
$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$(b+24)(b-23) = 0$$

$$\begin{aligned} b &= 23 & 529 \\ b &= -24 & 576 \end{aligned}$$

$$a = 31$$

$$a = -16$$



$$12599!$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \\ 13 \\ 17 \\ 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4-1 \\ 9-1 \\ 25-1 \\ 49-1 \\ 121-1 \\ 169-1 \\ 289-1 \\ 361-1 \end{array}$$

$$x = 3n + 1$$

$$9n^2 + 6n + 1$$

$$x = 3n + 2$$

$$x = 3$$

$$C_n^k$$

$$276 \cdot 2$$

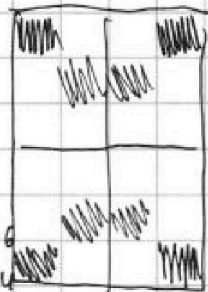
$$138 \cdot 4$$

$$69 \cdot 8$$

$$23 \cdot 24$$

$$(x+1)(x-1)$$

$$(3n+1+1)(3n+1-1)$$



$$\begin{array}{r} a \ 31 \ 31 \ -16 \ -16 \\ b \ 23 \ 23 \ -24 \ -24 \\ c \ 32 \ 22 \ -15 \ -25 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \quad -8 \quad +9 \quad -10 \quad +11 \quad -12 \quad +13 \quad -14 \quad +15$$

$$-25 \quad -2 \quad -15 \quad -1 \quad -95 \quad 0 \quad 95 \quad 1$$

$$35-13x \quad x^2+3x-10=0$$

$$\sqrt{13x-35} \quad \sqrt{13x-35} = 5-x \quad (x+5)(x-2)=0$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \quad x=-5 \quad x=2$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6 = 5-x \quad 13x-35=25-10x+x^2$$

$$\frac{13x-35}{(x+1)^3} \cdot q^{12} = 25-10x+x^2 \quad x^2-23x+60=0$$

$$D=529-240=289 \quad x < \frac{35}{13}$$

$$x = \frac{23 \pm 17}{2} \quad x=20 \quad -13.5 \leq 13$$

$$x=3 \quad x \geq -3$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = q^8 \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2} \right)$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = q^8 \left(|y+1+3|y-12| = \sqrt{169-2^2} \right)$$

$$\sqrt{(x+1)^4} = q^8 \quad 4t^3+8t^2+4t-2t^2-t-3 \quad 4-x-2 \geq 0$$

$$(x+1)^2 = q^8 \quad 4t^3+6t^2+3t-3 \quad x+2 \leq 4$$

$$q = \sqrt[4]{x+1} \quad 108+54+9-3 \quad 4t^3+4t^2+t+2t^2+2t-3$$

$$m_1 \quad -108+54-9-3 \quad 2t(2t^2+1)^2+t^2+2t+1+t^2-4$$

$$\pm \sqrt[4]{21} \quad t(2t^2+1)+(t+1)^2+(t+2)(t-2) \neq$$

$$4 \quad 13x < 35$$

$$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

$$(1-\cos^2 x)$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x \sin^2 x$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a+b^2=560 \\ a-b=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2+b=552$$

$$b^2+b-552=0$$

$$b^2+24b-23b-552=0$$

$$b(b+24)-23(b+24)=0$$

$$(b+24)(b-23)=0$$

$$\begin{cases} b=23 \\ b=-24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b^2=560 \\ a-b=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=23 \\ a=31 \\ b=-24 \\ a=-16 \end{cases}$$

Найти c :

Тип $a=31$; $b=23$:

$$a-c=-1 \text{ или } b-c=1$$

$$c=a+1$$

$$c=b-1$$

$$c=32$$

$$c=22$$

Тип $a=-16$; $b=-24$:

$$a-c=-1 \text{ или } b-c=1$$

$$c=a+1$$

$$c=-15$$

Ответ: $(31, 23, 32)$, $(31, 23, 22)$, $(-16, -24, -15)$,

$(-16, -24, -25)$.

$$h \geq z+x$$

$$8 \leq x$$

$$42 \geq h \quad 58 \leq h \quad 58 \leq h \quad 58 \leq h$$

$$z \leq h$$

$$0 \leq h+z+x+z$$

$$h+z \leq 58$$

$$58 \leq h$$

$$h+z \leq 58$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c - целые $\Rightarrow (a-c)$ и $(b-c)$ - целые

Пусть $(a-c)(b-c) = x^2$, где x^2 - квадрат простого

числа. x^2 можно делится только на

± 1 ; $\pm x$; $\pm x^2$. Значит:

$$\begin{cases} a-c = b-c = x \\ \text{или} \\ a-c = b-c = -x \\ \text{или} \\ a-c = \pm 1 \text{ и } b-c = \pm x^2 \\ \text{или} \\ a-c = \pm x^2 \text{ и } b-c = \pm 1 \end{cases}$$

$$a > b \Rightarrow a-c > b-c \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нам подходит вариант:

$$a-c = -1 \text{ и } b-c = -x^2$$

$$\text{или} \\ a-c = x^2 \text{ и } b-c = 1$$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -x^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = x^2 - 1$$

$$\begin{cases} a-c = x^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow a-b = x^2 - 1$$

$a-b$ не кратно 3 $\Rightarrow x^2 - 1$ не кратно 3

Если x не кратно 3, то $x = 3n+1$ или $x = 3n+2$ ~~$x = 3n+1$~~
 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\text{Тогда } x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = (3n+2) \cdot 3n$$

$$\text{или } x^2 - 1 = (3n+3)(3n+1) = 3(n+1)(3n+1)$$

Но получается, что $x^2 - 1$ кратно 3, а такого

быть не должно $\Rightarrow x$ - простое число кратно 3 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-b = 3^2 - 1 = 8$$