



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, двенадцатый член равен $2-x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b-a$ не кратно 3,
- число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W 1.

$$(b_n) - \sqrt{\pi}; \quad b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}; \quad b_{12} = 2-x;$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}; \quad q - \text{знаменатель } (b_n) \Rightarrow \Rightarrow 3x+2 \neq 0.$$

$$1) \quad 25x+34=0 \Rightarrow b_{10}=0; \quad b_{12} \neq 0; \quad b_{18}=0 \Rightarrow$$

$$0 \cdot q^2 = b_{10} \cdot q^2 = b_{12} \neq 0 - \text{нет решений.}$$

$$2) \quad 25x+34 \neq 0 \Rightarrow q \neq 0.$$

$$q^8 = \frac{b_{18}}{b_{10}} = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^2 = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{(3x+2)^2}} \Rightarrow q^2 = \sqrt[4]{\frac{1}{(3x+2)^2}} \quad (\text{п.к. } q^2 > 0).$$

$$2-x = b_{12} = b_{10} \cdot q^2 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{(3x+2)^2}} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-x = \sqrt{(25x+34)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = \sqrt{25x+34} \\ 2-x = \sqrt{-(25x+34)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 25x + 34 \\ x^2 - 4x + 4 = -(25x + 34) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 29x - 30 = 0 \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$2-x \geq 0$$

$$(x-30)(x+1) = 0$$

$$(x+10)(x+2) = 0$$

$$x \leq 2.$$

$$x = 30$$

$$x = -1$$

$$x = -2$$

$$x = -10$$

$$x \leq 2$$

$$x = -1$$

$$x = -2$$

$$x = -10$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

$$|y+2| + |18-y| + |18-y| \geq 20 + |18-y| \geq 20$$

$$\sqrt{400-z^2} \leq \sqrt{400} = 20.$$

Равенство возможно только при $y=18; z=0$.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}.$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{x+6}; b = \sqrt{3-x} \Rightarrow a, b \geq 0 \\ \begin{cases} a-b+7=2ab \\ a^2+b^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=2ab-7 \\ a^2+b^2=9 \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 28ab + 49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2ab = 4a^2b^2 - 28ab + 49 \Leftrightarrow 4a^2b^2 - 26ab + 40 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2ab-5)(2ab-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab=5 \\ 2ab=8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=3-2 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2=14 \\ a^2+2ab+b^2=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{14} \\ a+b=\sqrt{17} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{14}-2}{2}; b = \frac{\sqrt{14}+2}{2} \\ a = \frac{\sqrt{17}-2}{2}; b = \frac{\sqrt{17}+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{17}+1}{2}; b = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

Проверка:

$$I) a = \frac{\sqrt{19}-2}{2}; b = \frac{\sqrt{19}+2}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 9 - \text{верно};$$

$$a - b = 2ab - 7 - \text{верно.}$$

$$II) a = \frac{\sqrt{17}+1}{2}; b = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 9 - \text{верно};$$

$$a - b = 2ab - 7 - \text{верно.}$$

$$I) \sqrt{x+6} = \frac{\sqrt{19}-2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{19}-2}{2} - 6 = \frac{\sqrt{19}-14}{2} - \sqrt{19} - 5.$$

$$\sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{19}+2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{19}+2}{2} - 3 = \frac{\sqrt{19}-4}{2} - \sqrt{19} - 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{19}-10}{2} - \sqrt{19} - 1 =$$

$$II) \sqrt{x+6} = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{17}+1}{2} - 6 = \frac{\sqrt{17}-11}{2} - \sqrt{17} - 5.$$

$$= \frac{\sqrt{17}-11}{2} - \sqrt{17} - 5 =$$

$$\sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Leftrightarrow x = 3 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{6-\sqrt{17}+1}{2} = \frac{7-\sqrt{17}}{2}.$$

$$= \frac{7-\sqrt{17}}{2}. \text{ Ответ: } \left\{ \left(\frac{7-\sqrt{19}-5}{2}; 18; 0 \right); \left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}; 18; 0 \right) \right\}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{7-\sqrt{19}-5}{2}; \frac{\sqrt{17}-3}{2} \right) \right\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0.$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x = -(\cos x + 1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{p-1} \cos x = -\cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{p-1} \cos x = -\cos x - 1 \Leftrightarrow \cos x (\sqrt[3]{p-1} + 1) = -1.$$

1) $\sqrt[3]{p-1} = -1 \Leftrightarrow p-1 = -1 \Leftrightarrow p = 0$. Тогда $\cos x \cdot 0 = -1$ - нет решений.

2) $\sqrt[3]{p-1} \neq -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$. Имеем
 решения $\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq 1 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{p-1}+2}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq 0 \\ -\frac{\sqrt[3]{p-1}}{\sqrt[3]{p-1}+1} \leq 0 \end{cases} \quad \text{и } 3, \quad \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{p-1}+2}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{p-1}}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq 0 \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} p \in (-\infty; 0) \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{matrix} p \in (-\infty; 0) \cup p \in (-\infty; -7] \cup [0; +\infty) \\ p \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty) \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \in (-\infty; 7] \cup [1; +\infty).$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

~~$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$$~~

~~$$\text{Ответ: } (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$~~

~~$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty);$$~~

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите **номер страницы** и **суммарное количество страниц** в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

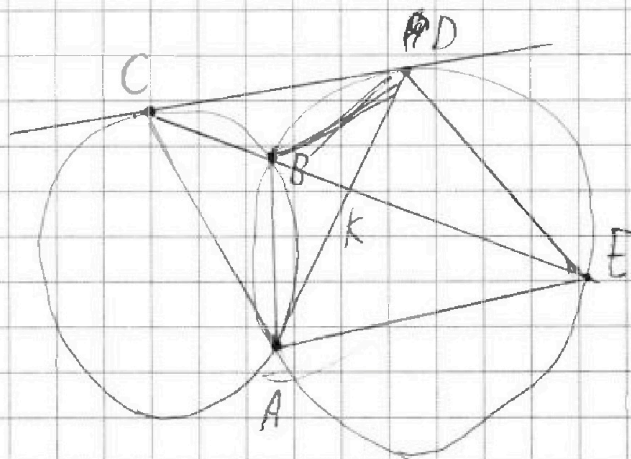
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W 9.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У6.

$$0 < b; b - a \mid 3; (a - c)(b - c) = p^2; p - \text{простое}; \\ a^2 + b = 1000; a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

$$a < b \Leftrightarrow a - c < b - c.$$

~~Делители~~ p^2 . Разлагая делители p^2 :

$$-p^2; -p; -1; 1; p; p^2 \Rightarrow \text{с учётом, что}$$

$$a - c < b - c: \begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b - a = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) \mid 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p - 1 \mid 3, p + 1 \mid 3, \text{ но одно из чисел}$$

$$p - 1; p; p + 1 \text{ делится на } 3 \Rightarrow \text{с учётом, что}$$

$$p - \text{простое}: p = 3 \Rightarrow b - a = 2 \cdot 4 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = a + 8 \Rightarrow a^2 + a + 8 = 1000 \Leftrightarrow a^2 + a - 992 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - 31)(a + 32) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 31; b = 39; c = 30, 40. \\ a = -32; b = -24; c = -33, -23. \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

Проверка:

$b = b - a \setminus 3$ - верно; $b > a$ - верно; $(a - c)(b - c) = 3^2$ - верно;
 $a^2 + b = 4000$ - верно.

Ответ: $\{(-32; -29; -33); (-32; -29; -33);$
 $(31; 39; 30); (31; 39; 40)\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

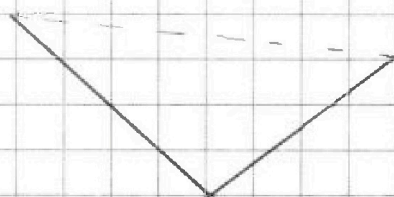
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W7.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

Проверка:

I) $x = -1$: ~~Решение~~ $(25x+34)(3x+2) = 9 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ не подходит.

~~II) $x = -2$: $b_{10} = \sqrt{(-50+34)(-8)} = 8\sqrt{2}$;~~

~~$b_{12} = 4$; $b_{18} = \sqrt{\frac{-16}{(-8)^3}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$~~

~~Умножим $q = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$~~

II) $x = -2$: $b_{10} = \sqrt{(-50+34)(-4)} = 8$; $b_{12} = 4$;
 $b_{18} = \sqrt{\frac{-16}{(-4)^3}} = \frac{1}{2}$. Умножим $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

III) $x = -19$: $b_{10} = \sqrt{(-90+34)(-5+2)} = 21\sqrt{55}$;
 $b_{12} = 21$; $b_{18} = \sqrt{\frac{-441}{(-55)^3}} = \frac{21}{55} \sqrt{\frac{1}{55}}$;
 $= \frac{21}{55\sqrt{55}}$. Умножим $q = \frac{1}{\sqrt{55}}$

Ответ: $\{-19; -2\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

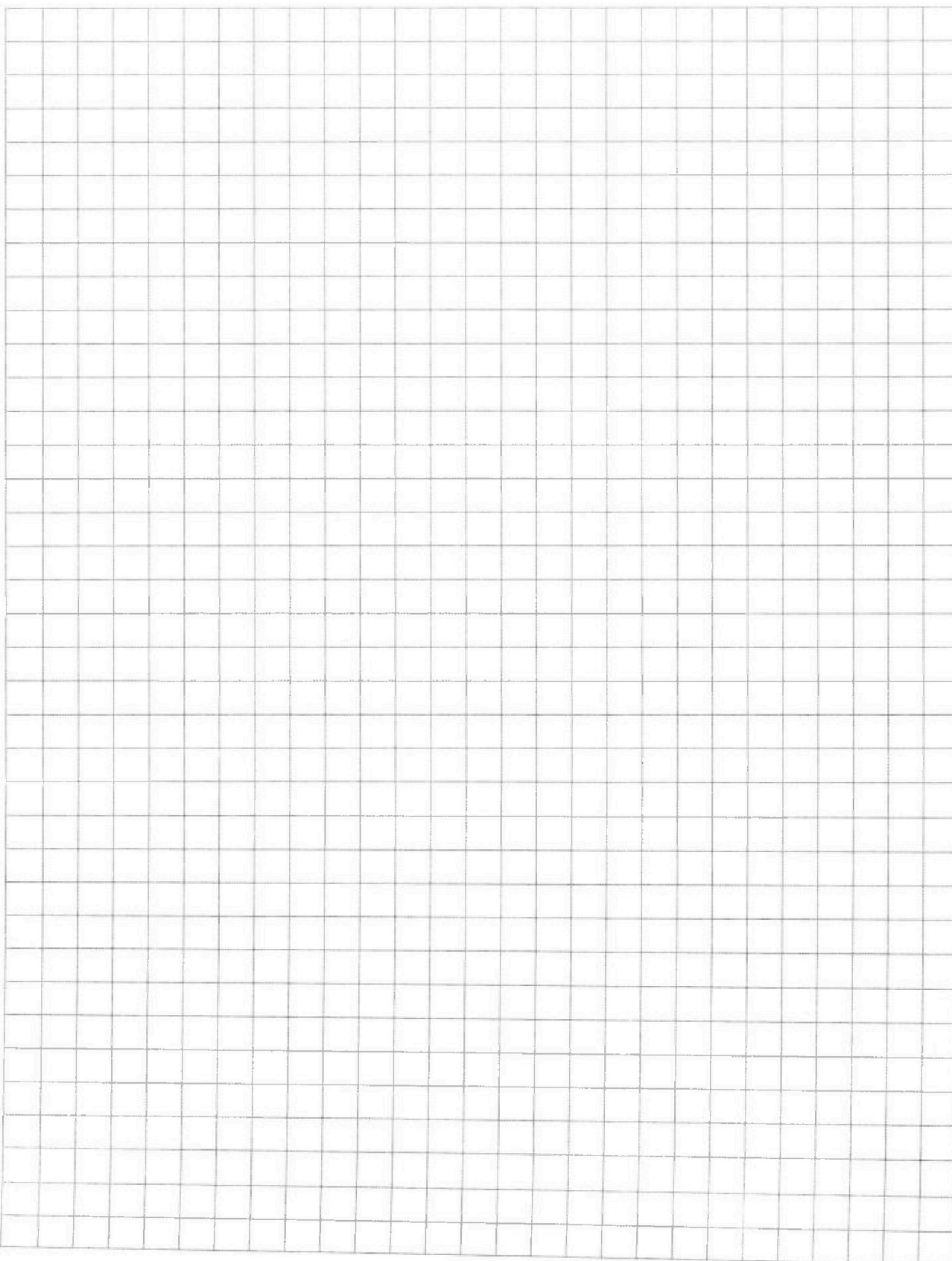
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y+2| + |18-y| + |18-y| \geq 20 \Rightarrow z=0.$$

$$a < b \Rightarrow b - c > a - c$$

$$b \not\equiv a \pmod{3}$$

$$\begin{cases} (y+2)(18-y) \geq 0 \\ 18-y=0 \end{cases} \Rightarrow b=18$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow a-b-c = p^2; a-c=1$$

$$a^2 + b = 1000, \quad a = \sqrt{x+6}, \quad b = \sqrt{3-x}, \quad b-c = -1$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2 \Rightarrow \sqrt{218-3x} - \sqrt{x} = 1$$

$$(x+6)(3-x) = \frac{1}{2} p^2 - 1 = \frac{1}{2} (p-1)(p+1)$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \frac{b-c-a+c}{a^2-b^2} = \frac{p^2-1}{a^2-b^2}$$

$$- \sin 2x \cdot \cos x + \sin x = \frac{b-a}{a^2-b^2} = \frac{p^2-1}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{2 \cos^3 x - \cos x}{3x+2} = \frac{a^3-1}{a^3-1} = \frac{p^3-1}{p^3-1} = \frac{(p-1)(p^2+p+1)}{(p-1)(p^2+p+1)} \Rightarrow p=3$$

$$- 2 \cos x \cdot \sin^2 x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos x (\sqrt[3]{p-1}-1) = 1, \quad a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$9p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 \sqrt[3]{p-1} - 1 \leq 1$$

$$4(p-1) \cos^3 x + 4(\cos x + 1)^3 = 0, \quad \sqrt[3]{p-1} = 1$$

$$\sqrt[3]{4(p-1)} \sqrt[3]{p-1} \cdot \cos x = \cos x + 1$$