



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$bq^3 = \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

✓1

Пусть b - первый член прогрессии

q - знаменатель, тогда

$$bq^3 = \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$q^8 = \frac{\sqrt[3]{15x+6} \cdot \sqrt[3]{(x-3)^3}}{\sqrt[3]{15x+6}} = (x-3)^2 \quad \left(\frac{bq^8}{bq^3} = q^5\right)$$

$$bq^9 = x+4$$

$$q = \sqrt[4]{x-3} \quad q^6 = \sqrt{(x-3)^3}$$

$$bq^9 = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$\sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(x-3)^3} = x+4 \quad (bq^3 \cdot q^6 = bq^9)$$

$$\begin{cases} 15x+6 = x^2+8x+16 & x > 3 \\ -15x-6 = x^2+8x+16 & -4 \leq x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{15x+6} = x+4 & x > 3 \\ \sqrt{-15x-6} = x+4 & x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)(x-5) = 0 & x > 3 \\ (x+22)(x+1) = 0 & x < -\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \{5\} & (x > 3) \\ x = \{-1, -22\} & (-4 \leq x < 3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \{5, -1\}$$

Ответ: $\{5, -1\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 7x - 19 = 0 \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{129}}{2}$$

Ответ: $(1 + \sqrt{5}, 35, 0)$ $(1 - \sqrt{5}, 35, 0)$

• Если $a > b$ ($x > 6$) то $2\sqrt{ab} > 6$ $\sqrt{ab} > 3$

$$\sqrt{ab} > 3 \quad ab > 9 \quad -x^2 - 7x + 35 = \frac{9}{4} \quad x^2 + 7x - \frac{131}{4} = 0$$

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{435}}{2} = 1 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Подходим только $x = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Если $a < b$ ($x < 6$) то $2\sqrt{ab} < 6$

$$\sqrt{ab} = 4 \quad ab = 16 \quad -x^2 - 7x + 35 = 16 \quad x^2 + 7x - 19 = 0$$

не подходит подходит ~~также~~ $x = 1 + 2\sqrt{5}$

$x = 1 + 2\sqrt{5}$ < 6 ~~Всего~~ $\Rightarrow$ ~~какой-то~~ $x > 6$

• Если $a < b$ ($x < 6$) то $2\sqrt{ab} < 6$ $\sqrt{ab} < 3$

$$\sqrt{ab} = \frac{3}{2} \quad ab = \frac{9}{4} \quad -x^2 - 7x + 35 = \frac{9}{4} \quad x = 1 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Подходим только $1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $(1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}, 35, 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2}$$

$\sqrt{2}$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2} \quad (1)$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad (2)$$

Рассмотрим (2)

$$\begin{cases} y \leq 20 & -3y + 90 = \sqrt{225-z^2} \\ 20 \leq y \leq 35 & -y + 50 = \sqrt{225-z^2} \\ y \geq 35 & y - 90 = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

Но тогда $-3y + 90 \leq 15 \quad y \geq 25 \quad (z=0)$

$-y + 50 \leq 15 \quad y \geq 35$

$y - 90 \leq 15 \quad y \leq 35$

$\Rightarrow$ Если решения есть, то $y = 35 \quad z = 0$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{-x^2-2x+35}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{-x^2-2x+35}$$

$x+2=a \quad 5-x=b$

$a+b=12$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 6 = 2\sqrt{ab} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{ab} - 6$$

$a+b-2\sqrt{ab} = 4ab-24\sqrt{ab}+36$

возведем в квадрат

$\sqrt{ab} = \frac{3}{2} \quad ab = \frac{9}{4}$

$\sqrt{ab} = 4 \quad ab = 16$

$ab - \frac{1}{2}\sqrt{ab} + 6 = 0 \quad (\sqrt{ab}-4)(\sqrt{ab}-\frac{3}{2}) = 0$

$x^2-2x+35=16 \quad x^2-2x-19=0 \quad x^2-2x-3=0$
 $\sqrt{ab} = \frac{3}{2} \quad \text{не подходит по ОЗ}$
 $\sqrt{ab} = 4 \quad \text{не подходит по ОЗ}$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13

$$\cos 2x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p \quad | \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$4 \cos^2 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

Рассмотрим функцию $f(t) = 4t^2 - 6t^2 + 3t + 3 - p$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$$

Заметим, что $f'(t) \geq 0$ всегда $\Rightarrow f(t)$ - всегда растёт (в $t = \frac{1}{2}$ - точка перегиба)

Значит $f(t)$ - имеет только один корень вне зависимости от p

Тогда рассмотрим значения p , при которых

$$f(-1) = 0 \quad \text{и} \quad f(1) = 0 : \quad \text{по Т. Безу:}$$

$$(t+1)(4t^2 - 10t + 13) = 0 \quad | \quad 4t^2 - 10t + 13 = 0 \quad p = -10$$

$$(t-1)(4t^2 - 2t + 1) = 0 \quad | \quad 4t^2 - 2t + 1 = 0 \quad p = 4$$

(p - зависит только на свободный член по этому с помощью Т. Безу мы можем однозначно восстановить многочлен с единственными корнями)

Ответ: при $p \in [-10, 4]$ будет хотя бы одно решение



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

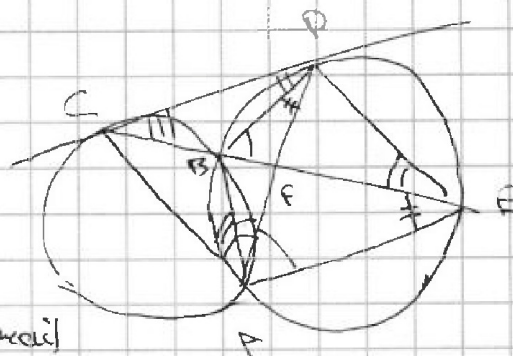
$$CE \cap AD = F$$

$$\angle EAD = \angle EBD$$

$$\angle CDB = \angle DAB$$

$$\angle DCB = \angle BAC$$

(много углов
и их смежных)



$$\angle DBE = \angle BCD + \angle BDC \Rightarrow AF - \text{дисктриса } \triangle ACE$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{25}{9} \text{ по свойствам дисктрисы, пусть } AE = 25, AC = 9$$

(BA - диаметр) (треугольник равнобедренный)

$$\angle ADB = \angle BEA \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE \Rightarrow \text{пропорция}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

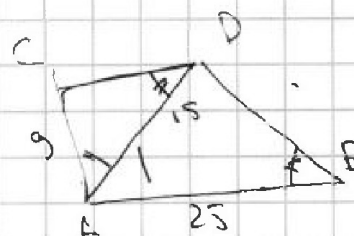
$$AD = \sqrt{AC \cdot AE} = 15$$

$$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACD$$

$$\left(\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}, \right.$$

$$\angle CAD = \angle DAE)$$

$$\angle AED = \angle ACD$$



$$\frac{DE}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
6 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

Подсчитаем кол-во способов выбрать закрашивать так, чтобы была симметрия относительно

средней линии:

$$C_{15000}^8 + C_{15000}^4 - \cancel{C_{15000}^8} - \cancel{C_{15000}^4} = 2C_{15000}^4$$

(сначала считаем относительно первой, затем второй, ~~после второго повторяется~~)

(можно выбрать чтобы 4-ре в одной половине, а остальные определятся сами) ~~также~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$2\sqrt{ab} > 6$$

$$x+2 > 5-x$$

$$ab > 9$$

$$x > 6$$

$$140 - 9 \quad 131$$

$$27$$

$$4$$

$$1-6$$

$$\sqrt{1+80x}$$

$$2\sqrt{20}$$

$$4\sqrt{50}$$

$$\begin{array}{r} 2,2 \\ \times 2,2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times 2,5 \\ \hline \end{array}$$

$$62,5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

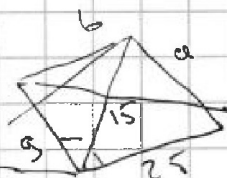
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$CB \cdot BE = 9 \cdot 34 = 302$$

$$CD = \sqrt{CB \cdot BE}$$



$$\sqrt{8+\sqrt{5}} - \sqrt{4+\sqrt{5}} = 2$$



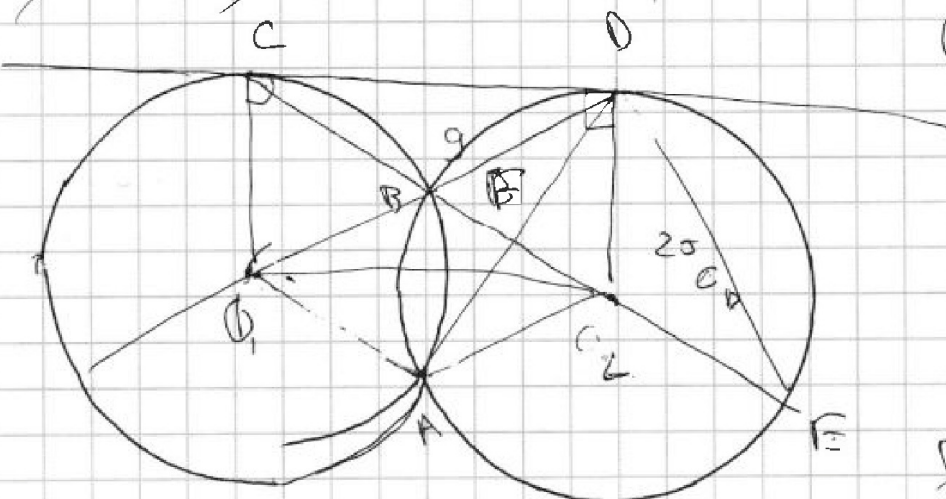
$$\begin{array}{r} 32 \\ 175 \\ \hline 302 \end{array}$$

$$\sqrt{8-\sqrt{5}} - \sqrt{4+\sqrt{5}} = 8$$

$$2 = \sqrt{22+4\sqrt{5}}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 35 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$8-\sqrt{5}+4+\sqrt{5} - 2 \sqrt{32+4\sqrt{5}-5} = 2 \sqrt{22+4\sqrt{5}}$$



$$\frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB} =$$

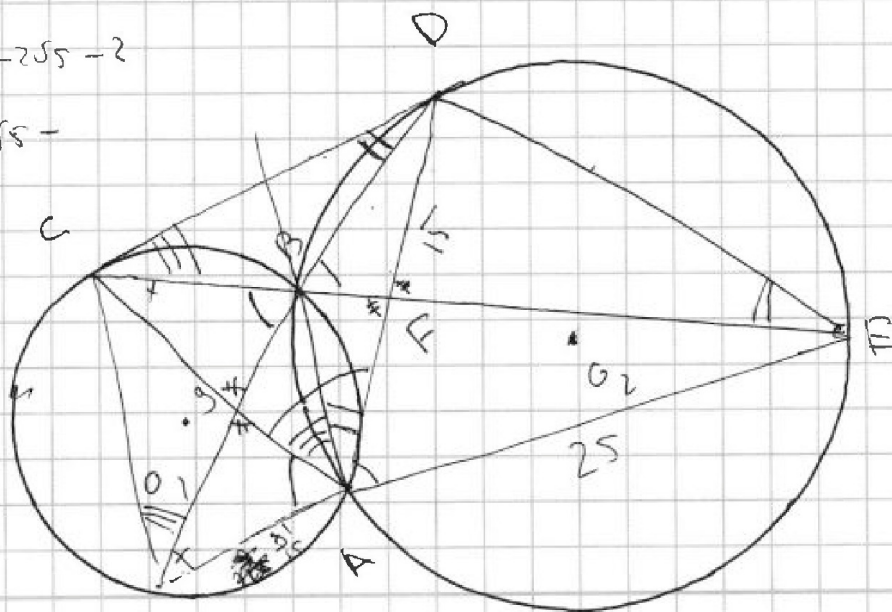
$$8-\sqrt{5}+4+\sqrt{5}$$

$$4-2\sqrt{5}-2$$

$$345$$

$$3 \cdot 25 = 25$$

$$8-\sqrt{5}-$$



$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$
$$AD^2 = AC \cdot AE$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}$$
$$15 \cdot 9 = \frac{AE}{15}$$
$$AE = \frac{15 \cdot 9}{15} = 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x - 6\cos^2 x + 3 - p = 0$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 = p$$

$$\begin{cases} 4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 4 = 0 \\ 4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$12t^2 - 12t + 3$$

$$(\cos y + 1)(4\cos^2 y - 10\cos y + 13) =$$

$$4\cos^3 y - 10\cos^2 y + 13\cos y + 4\cos^2 y - 10\cos y + 13$$

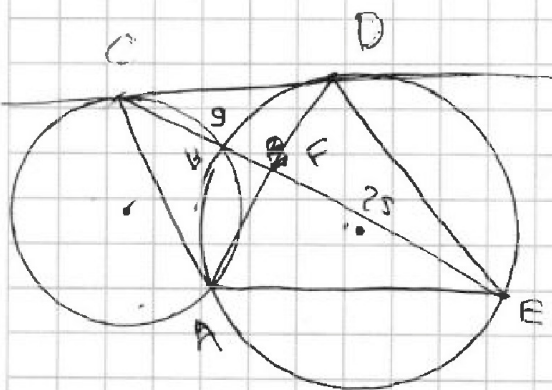
$$= 4\cos^3 y - 6\cos^2 y + 3\cos y + 13$$

$$(\cos y - 1)(4\cos^2 y - 2\cos y + 1) =$$

$$= 4\cos^3 y - 2\cos^2 y + 2\cos y - 4\cos^2 y + 2\cos y - 1 =$$

$$= 4\cos^3 y - 6\cos^2 y + 3\cos y - 1 = 0$$

$$p = 4$$



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 13$$

$$\frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

$$D = 100 - 16b = 0$$

$$100 = 16b$$

$$b = \frac{100}{16}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1$$

$$1 - 1$$

$$3\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$3(2\cos^2 x - 1) =$$

$$6\cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 4$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 4$$

$$4 - 6 + 3 + 4 = 0$$

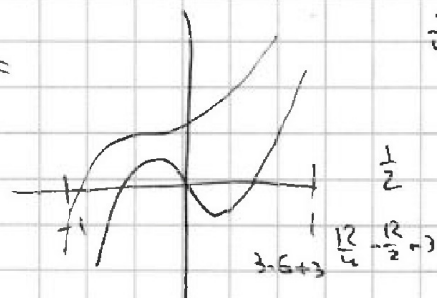
$$-4 - 6 - 3 + 4 = -9$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 4 = -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 4 = -\frac{3}{2}$$

$$p = -10$$

$$p \in [-10; 4] - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 4$$



$$4a^2 - 10a + 6$$

$$D = 100 - 16b = 0$$

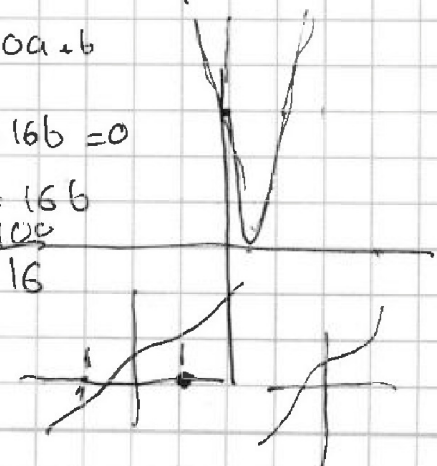
$$100 = 16b$$

$$b = \frac{100}{16}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1$$

$$1 - 1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-15x - 6 > 0$$

$$-15x > 6$$

$$x < -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$$

$$x^2 - 7x + 0 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$y^2 + 23 + 22 = 0$$

$$(y+22)(y+11) = 0$$

$$\frac{177}{110} = \frac{165}{12}$$

$$\frac{165}{12} = \sqrt{\frac{55}{4}}$$

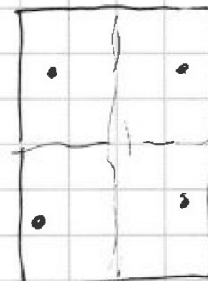
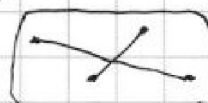
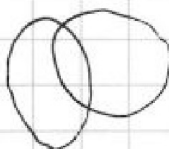
$$\sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{9 \cdot 4} = 6$$

$$x + 4 > 0$$

$$x > -4$$

$$-4 < x$$



$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

$$y \in (-\infty; 35] \cup (35; \infty)$$

$$x^2 - 225 = 0 \Rightarrow x = \pm 15$$

$$y^2 - 225 = 0 \Rightarrow y = \pm 15$$

$$y \geq 35$$

$$x^2 - 225 = 0 \Rightarrow x = \pm 15$$

$$y^2 - 225 = 0 \Rightarrow y = \pm 15$$

$$y \leq 35$$

$$x^2 - 225 = 0 \Rightarrow x = \pm 15$$

$$y^2 - 225 = 0 \Rightarrow y = \pm 15$$

$$y < 20$$

$$x^2 - 225 = 0 \Rightarrow x = \pm 15$$

$$y^2 - 225 = 0 \Rightarrow y = \pm 15$$

$$y \geq 35$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$ $z < 4$

$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$

$(y+2)(5-x-3z) = 5x+35-x^2-7x-3xz-21z$

$-x^2-2x+35+z-3xz-21z$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 6 = 2\sqrt{ab-3xz-22z}$ $-x^2-2x+35=-4$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 6 = 2\sqrt{ab}$ $x^2+2x-35=0$

$\sqrt{a} + 6 = 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}$ $x \leq 5 \quad x > -7$

$a+12\sqrt{a}+36 = 4ab+4b\sqrt{a}+b$ $1 \pm \sqrt{1+4x}$

$x+2+12\sqrt{x+7}+36 = -4x^2-8x+140 + (20-4x)\sqrt{x+7}+5-x$ $1 \pm$

$-1-2+35 \pm 3 \quad -25+10+35 \quad 80$ $\frac{11 \pm 5}{4}$ 4 ± 4

$\sqrt{2} - \sqrt{10} = 0$ $a+b=12$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{ab} + 6$ $a=3 \quad b=3$ $\frac{-11 \pm 5}{4}$

$a - 2\sqrt{ab} + b = 4ab - 24\sqrt{ab} + 36$ $x+2=3 \quad 5-x=3$

$a+b-4ab-22\sqrt{ab} = 35$ $x=-4 \quad x=$

$-4ab+22\sqrt{ab} = 24$ $\frac{121}{4} - \frac{35}{4} = \frac{25}{4}$ $\frac{5}{2}$

$2ab+11\sqrt{ab}+12=0$ $ab + \frac{11}{2}\sqrt{ab} + 6 = 0$ $\frac{-11 \pm 5}{2} = \frac{8}{2}$

$x \geq 6$ $(\sqrt{ab} + \frac{7}{2})(\sqrt{ab} + 4)$ 2

$-x^2-2x+35 > 0$