



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что i -ый член прогрессии имеет формулу $a \cdot d^{i-1}$ где a - первый член, и d - отношение соседних членов
Тогда:

$$\begin{cases} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = a \cdot d^9 & [1] \\ 2-x = a \cdot d^{11} & [2] \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{(25x+34)^2}{(3x+2)^3}} = a \cdot d^{12} & [3]$$

Считаем, что $a \neq 0$ и $d \neq 0$ т.к. иначе

$x=2$ (т.к. 12-ый член равен 0), но тогда 10 и 16 не равны 0

То-гда из [1] и [2]

$$\sqrt{(3x+2)^4} = \frac{1}{d^3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} = \frac{1}{d^3} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

Каждое [2] [1]

$$\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = d^2$$

Заметим, что $x < 2$ т.к. $2-x > 0$

$$d^3 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 (3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

сократим $\frac{1}{3x+2}$ т.к. оно точно $\neq 0$

$$\frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2} = 1$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2$$

Пусть $25x+34 < 0$, тогда $3x+2 < 0$ и $x < -\frac{34}{25}$

$$x < -\frac{34}{25}$$

$$(2-x)^2 = -25x-34$$

$$4-4x+x^2 = -25x-34$$

$$x^2+21x+38=0$$

$$x_1=-19$$

$$x_2=-2$$

Пусть $25x+34 \geq 0$ тогда $x \geq -\frac{34}{25}$ и $3x+2 \geq 0$ и $x \geq -\frac{2}{3}$

$$(2-x)^2 = 25x+34$$

$$4-4x+x^2-25x-34=0$$

$$x^2-29x-30=0$$

$$x_1=30 \text{ не удовлетворяет } x < 2$$

$$x_2=-1 \text{ не удовлетворяет } x \geq -\frac{2}{3}$$

Заметим, что при полученных x отрицательно d и т.к. [3] = $\left(\frac{[2]}{[1]}\right)^4$, то мы получили корректную пометку - не

Ответ: $x \in \{-19, -2\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Рассмотрим на второе уравнение:

~~замечаем~~ заметим, что если заметить

$2|y-18|$ на $|y-18|$ мы получим

$|y+2| + |y-18|$ лев-а. Но заметим, что

$|y+2| + |y-18|$ всегда ≥ 20 , а равно 20 только при $y \in [-2; 18]$ (так как сумма расстояний от y до -2 и от y до 18 равна 20 только если y на отрезке от -2 до 18).

Но заметим, что в исходном выражении было $2|y-18|$ значит $|y+2| + 2|y-18| = 20$ только при $y = 18$. (т.к. иначе $|y-18| > 0$ и равенство не будет выполнено)

Также заметим, что $\sqrt{400-z^2} \leq 20$ и равно 20 только при $z=0$ по монотонности корня и т.к. $z^2 \geq 0$.

Таким образом $y=18$, а $z=0$ т.к.

только тогда достигается ~~минимум~~ ^{максимум} равенство.

Найдем x :

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3x-2 \cdot 0} + 7 = \sqrt{18-3x-x^2+0}$$

$$a = \sqrt{x+6} \quad b = \sqrt{3-x}$$

$$a - b + 7 = \sqrt{ab}$$

$$\text{заметим, что } a^2 + b^2 = x+6 + 3-x = 9$$

$$a - b + 7 - 4,5 = \frac{1}{2}(-a^2 + 2ab - b^2)$$

$$t = a - b$$

$$t + 7 - 4,5 = -\frac{1}{2}(t^2) \quad -2t - 5 = t^2$$

$$t^2 + 2t + 5 = 0 \\ D = 4 - 20 = -16$$

Таким образом решений нет.

Ответ: решений нет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

Пусть $t = \cos x$

$$\cos 3x = 4t^3 - 3t$$

$$\cos 2x = 2t^2 - 1$$

$$\cos x = t$$

Подставим:

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4t^3 p - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4t^3 p + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$t^3 p + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t^3(p-1) + t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t^3(p-1) + (t+1)^3 = 0$$

$$t^3 k^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$(tk+1)(t^2 k^2 - tk(t+1) + (t+1)^2) = 0$$

[1] [2]

Пусть $k = \sqrt[3]{p-1}$

[1]: $tk + t + 1 = 0$

$$t(k+1) = -1$$

$$t = \frac{-1}{k+1}$$

т.к. $|t| \leq 1$,

то $k+1 \in [1; +\infty) \cup (-\infty; -1]$

$k \in [0; +\infty) \cup (-\infty; -2]$

Пусть $k=0$ получим

$$t = -1$$

[2]: $t^2 k^2 - t^2 k - tk + t^2 + 2t + 1 = 0$

Пусть $k=0$ ~~тогда~~ $t = -1$

иначе:

$$D = (2-k)^2 - 4(k^2 - k + 1) = k^2 - 4k + k^2 -$$

$$-4k^2 + 4k - 4 = -3k^2$$

Таким образом при $k=0$

уравнение имеет корень $t = -1$

иначе $D < 0$ и корней нет

т.к. при $k=0$ [1] и тем

жеим корень $t = 1$, то [2]

не даёт новых корней

отсюда [1]

Таким образом получаем, что ~~при~~ корень

есть только при $k \in [0; +\infty) \cup (-\infty; -2]$ и равен

$$t = \frac{-1}{k+1}$$

$$k \geq 0 \rightarrow \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \rightarrow p \geq 1$$

$$k \leq -2 \rightarrow \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \rightarrow$$

$$\rightarrow p \leq -7$$

Ответ: при $p \in (-7; 1)$ корней нет

при $p \in [-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$$\cos(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$$

и $x = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k$

$x = -\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k$

при $k \in \mathbb{Z}$

(при $p = -7$ или $p = 1$ $x = -\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k$ считаем не учитываем)

Для каждой из 3 видов симметричных
множеств с ней это $\frac{5 \cdot (5-2) \cdot (5-4)}{(5-6)}$.
А если множество имеет $2^4 \cdot 4!$
все 3 симметричны, то такое же
множество равно $\frac{5 \cdot (5-4)}{4^2 \cdot 2!}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда ответ это:

$$\frac{x \cdot 5(5-2)(5-4)(5-\frac{6}{8})}{2^2 \cdot 4 \cdot x \cdot 2 \cdot 1} - \frac{x \cdot 5(5-4)}{2^4 \cdot x} =$$

$$= \frac{5(5-4)}{16} \left(\frac{(5-2)(5-\frac{6}{8})}{2} - 1 \right)$$

ответ: $\frac{5(5-4)}{16} \left(\frac{(5-2)(5-\frac{6}{8})}{2} - 1 \right)$



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$b - a \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad p - \text{простое}$$

$$a^2 + b = 1000$$

заметьте, что $a \neq b$ т.к. иначе $a - b \equiv 0$,
но по условию $b - a \not\equiv 0$

Таким образом $a - c \neq b - c$, а значит
т.к. и a и b и c целые и $(a-c)(b-c) = p^2$
где p - простое, то одно из чисел $(a-c)$, $(b-c)$
но должно быть равно p^2 , а другое 1.

заметьте, что $a - c < b - c$, значит
либо $a - c = -p^2$ и $b - c = 1$ либо $a - c = 1$ $b - c = p^2$

Пусть $a - c = -p^2$ и $b - c = 1$

тогда $b = c + 1$

$$a^2 + b = 1000$$

$$a^2 + c - 1 = 1000 \quad a^2 + c = 1001 \equiv 2 \pmod{3}$$

если $a \equiv 0 \pmod{3}$ то $c \equiv 2 \pmod{3}$ тогда $a^2 - c \equiv 1 \pmod{3}$, но
 $-p^2$ может иметь остаток либо 2 либо 0 $\pmod{3}$.

значит $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ значит $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$ и $c \equiv 1 \pmod{3}$

тогда $a - c \equiv 0 \pmod{3}$ значит $a - c = -9$ $a = c - 9$

$$(c-9)^2 + c = 1001 \quad c^2 - 18c + 81 + c = 1001 \quad c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$c_1 = 40 \rightarrow a = 31 \quad b = 39$$

$$c_2 = -23 \rightarrow a = -32 \quad b = -24$$

Вывод: если $a - c = -p^2$ и $b - c = 1$ мы
получили не ответ, а условие, что и тогда $a - c \equiv p^2$,
но для любых a, b, c мы
знаем, будем считать $(-b, -a, -c)$
в обратном порядке и наоборот.

Ответ: 2 $a = 31$ $b = 39$ $c = 40$
 $a = -32$ $b = -24$ $c = -23$
 $a = 39$ $b = 31$ $c = 40$
 $a = 24$ $b = 32$ $c = 23$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a-c=1$, $a-b-c=p^2$

~~тогда~~

~~если $a \not\equiv 3 \pmod 3$, то $a^2 \equiv 1 \pmod 3$. Значит
т.к. $a^2+b \equiv 1000 \pmod 3$, то $b \equiv 2 \pmod 3$.
Т.к. $b \equiv 3 \pmod 3$, $c \equiv 1 \pmod 3$.
но $a-c \equiv 1 \pmod 3$.
но $a \equiv c \pmod 3$~~

пусть $a \equiv 3 \pmod 3$:

тогда $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ значит т.к. $a^2+b \equiv 1 \pmod 3$
то $b \equiv 3 \pmod 3$. Значит т.к. $p^2 \equiv 1$ или $0 \pmod 3$,
то $c \equiv 2$ или $0 \pmod 3$.

с другой стороны $c \not\equiv 2 \pmod 3$ т.к.

тогда $a \equiv c+1 \equiv 0 \pmod 3$

значит $c \equiv 0 \pmod 3$

в таком случае $b-c \equiv 0 \pmod 3$

значит $b-c=9$ и $a-c=1$

$$a^2+b=1000$$

$$(c+1)^2+c+9=1000$$

$$c^2+2c+1+c+9=1000$$

$$c^2+3c+10=1000$$

$$c^2+3c-990=0$$

$$c_1=30 \rightarrow a=31, b=39$$

$$c_2=-33 \rightarrow a=-32, b=-24$$

пусть $a \equiv 3 \pmod 3$:

тогда $c \equiv 2 \pmod 3$ т.к. $a-c=1$

т.к. $a \equiv 3 \pmod 3$, то т.к. $a^2+b=1000 \equiv 1 \pmod 3$, то

$$b \equiv 1 \pmod 3$$

$b-c \equiv 2 \pmod 3$ но p^2 не может быть $\equiv 2 \pmod 3$

Таким образом мы нашли все
варианты a, b, c

Ответ: $a=31$ $b=39$ $c=40$

$$a=-32 \quad b=-24 \quad c=-23$$

$$a=31 \quad b=39 \quad c=30$$

$$a=-32 \quad b=-24 \quad c=-33$$

[illegible]

На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p(4t^3 - 2t) + 6(2pt^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4t^3p - 2tp + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4t^3p + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$t^3p + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$k^3t^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$(kt + t+1)(t^2k^2 - kt(t+1) + (t+1)^2) = (kt + t+1)(t^2(k^2 - k + 1) + t(2-k) + 1)$$

$$a-b+7=ab$$

$$a-b+7=ab$$

$$b^2 + 10c + c^2 + c + 1 = 1000$$

$$t^2 + 2t + 1 = 1000$$

$$t = -1$$

$$a-b+7=ab$$

$$\sqrt{(-25+34)(-3+2)} = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$2(-1) = 0$$

$$\sqrt{(-50+34)(-6+2)} = -16$$

$$c = 40$$

$$(31-40)(33-40) = 2$$

$$t^2 + 2t + 1 = 1000$$

$$t = -1$$

$$a-b+7=ab$$

$$a^2 + b^2 = 9$$

$$a^2 + 19c - 91b = 0$$

$$-475 + 34$$

$$(a-b)^2 = 9 - 14 - 2t$$

$$b = c+1$$

$$t^2 + 2t + 5 = 0$$

$$-25 + 34$$

$$b - c = -1$$

$$b = c - 1$$

$$a - b + 7 = ab$$

$$a^2 + b^2 = 9$$

$$a - b + 7 + \frac{9}{2} = \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2$$

$$a - b = t$$

$$t + 7 = ab$$

$$t + 7 - 4,5 = -\frac{1}{2}(t)^2$$

$$a - c = -p^2$$

$$b - c = 1$$

$$b = c + 1$$

$$a^2 + c + 1 = 1000$$

$$a^2 + c = 999$$

$$b : 3$$

$$c \not\equiv 2 \pmod{3}$$

$$b - c = 1$$