



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ
11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен -2 , а девятый член равен -19 .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1 = 2 - x; \quad \frac{b_1}{q^2} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}; \quad b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \quad \left| \begin{array}{l} q \neq 0 \\ c \neq 0 \end{array} \right.$$

$$25x+34 = a \quad 3x+2 = c \quad 2-x = 8c-a+20$$

1) $a \geq 0 \quad c \geq 0$

$$\begin{cases} b = 8c - a + 20 \\ \frac{b}{q^2} = \sqrt{ac} \Rightarrow b > 0 \\ bq^6 = \sqrt{\frac{a}{c^3}} \end{cases} \Rightarrow b^2 q^4 = \frac{a}{c} \Rightarrow \begin{cases} bq^2 = \sqrt{\frac{a}{c}} \\ bq^2 = -\sqrt{\frac{a}{c}} \text{ , т.к. } b > 0 \end{cases}$$

$$q^4 \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} = \sqrt{\frac{a}{c^3}} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{|c|} = \frac{1}{c} \Rightarrow b^2 = a$$

$$b = 8c - b^2 + 20$$

$$2-x = 8(3x+2) - (2-x)^2 + 20$$

$$24x+16-4+4x-x^2+20=2-x$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0 \quad \begin{cases} x = 30 \Rightarrow b = 0 \\ x = -1 \Rightarrow c < 0 \end{cases}$$

2) $a < 0 \quad c < 0$

$$25x+34 = a \quad 3x+2 = c \quad 2-x = 8c-a+20$$

$$\begin{cases} b = 8c - a + 20 \\ \frac{b}{q^2} = \sqrt{ac} \Rightarrow b > 0 \\ bq^6 = \sqrt{\frac{a}{c^3}} \end{cases} \Rightarrow b^2 q^4 = \frac{a}{c} \Rightarrow \begin{cases} bq^2 = \sqrt{\frac{a}{c}} \\ bq^2 = -\sqrt{\frac{a}{c}} \text{ , т.к. } b > 0 \end{cases}$$

$$q^4 \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} = \sqrt{\frac{a}{c^3}} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{|c|} = -\frac{1}{c} \Rightarrow b^2 = -a$$

$$b = 8c + b^2 + 20$$

$$2-x = 24x+16+4-4x+x^2+20$$

$$(2-x) = 8(3x+2) + (2-x)^2 + 20$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$\begin{cases} x = -2 & b > 0 \quad a < 0 \quad c < 0 - \text{верно} \\ x = -19 \end{cases}$$

3) $a = 0 \Rightarrow b = 0$ и $b = 2 - (-\frac{34}{25}) \Rightarrow$ невозможно

Ответ: $x = -2; \quad x = -19$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-2^2} \end{cases}$$

$$f(y) = |y+2| + 2|y-18|$$

$$y \geq 18 \quad f(y) = 3y - 34 \nearrow \Rightarrow f(y)_{\min} \text{ в } m. y = 18 \quad f(y) = 20$$

$$-2 \leq y \leq 18 \quad f(y) = (y+2) - 2(y-18) \searrow \Rightarrow f(y)_{\min} \text{ в } m. y = 18 \quad f(y) = 20$$

$$y \leq -2 \quad f(y) = -(y+2) - 2(y-18) \downarrow \Rightarrow f(y)_{\min} \text{ в } m. y = -2 \quad f(y) = 40$$

$$\Downarrow f(y)_{\min} = 20$$

$$\sqrt{400-2^2} \leq 20$$

$$|y+2| + 2|y-18| \geq 20$$

Равенство когда они могут быть равны - это

$$\begin{cases} \sqrt{400-2^2} = 20 \\ |y+2| + 2|y-18| = 20 \end{cases}$$

$$2=0; y=18$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$-6 \leq x \leq 3 \quad \sqrt{x+6} = a \quad \sqrt{3-x} = b \quad x = a^2 - 6; \quad b^2 = 3 - x$$

$$a - b + 7 = 2ab$$

$$a^2 + b^2 = 9$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + 14(a - b) + 49 = 4a^2b^2$$

$$9 - 2ab + 14(2ab - 7) + 49 = 4a^2b^2$$

$$26ab - 40 = 4a^2b^2$$

$$2a^2b^2 - 13ab + 20 = 0$$

$$1) \quad ab = 4 \quad a, b \neq 0$$

$$2) \quad ab = \frac{5}{2}$$

$$2) \quad a - b = -2$$

$$a^2 + b^2 = 9$$

$$2b^2 - 4b - 5 = 0$$

$$b = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2}; b \geq 0 \Rightarrow b = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}$$

$$x = \frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2}$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}$$

$$\left(\text{Ответ: } \begin{cases} \frac{\sqrt{14}-3}{2} \\ \frac{-3-2\sqrt{14}}{2} \end{cases} \right)$$

$$1) \quad a - b = 1$$

$$a^2 + b^2 = 9$$

$$2b^2 + 2b - 8 = 0$$

$$b^2 + b - 4 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$b \geq 0 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{14}-3}{2}$$



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos x = t, -1 \leq t \leq 1$$

$$4p t^3 + 12 t^2 + (-3p + 3(p+4)) t + 4 = 0$$

$$4p t^3 + 12 t^2 + 3t + 4 = 0$$

1) $p > 0$, тогда $f(t) \uparrow$ монотонно $\Rightarrow$ 1 точка пересечения $y=0$, чтобы пересечение было при $t \in [-1, 1]$ должно выполняться $\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f(-1) \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} p+7 \geq 0 \\ -p+1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow p \geq 1$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0$$

$$t+1 = -\sqrt[3]{p-1} t$$

$$t = \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$$

$$\cos x = \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$$

$$x = \begin{cases} \arccos \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}} + 2\pi k \\ -\arccos \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}} + 2\pi k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

2) $p = 0$

$$3t^2 + 3t + 1 = 0 \quad D < 0 \Rightarrow t \notin \mathbb{R}$$

3) $p < 0$

$$(t+1)^3 = -\sqrt[3]{p-1} t$$

$$t \leq \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0$$

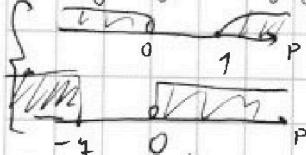
$$t+1 = -\sqrt[3]{p-1} t$$

$$t = \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}} \quad t \in [-1, 1]$$

$$\frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}} \geq -1 \quad \frac{1+\sqrt[3]{p-1}-1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq 0$$

$$\frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}} \leq 1 \quad \frac{1+\sqrt[3]{p-1}+1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq 0$$

Метод рационализации:



$$\begin{cases} \frac{p-1}{p+4} \geq 0 \\ \frac{p+4}{p} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \leq -4 \\ p \geq 1 \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$$

$$x = \begin{cases} \arccos \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}} + 2\pi k \\ -\arccos \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}} + 2\pi k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \begin{cases} \arccos \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}} + 2\pi k \\ -\arccos \frac{-1}{1+\sqrt[3]{p-1}} + 2\pi k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$p \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$$

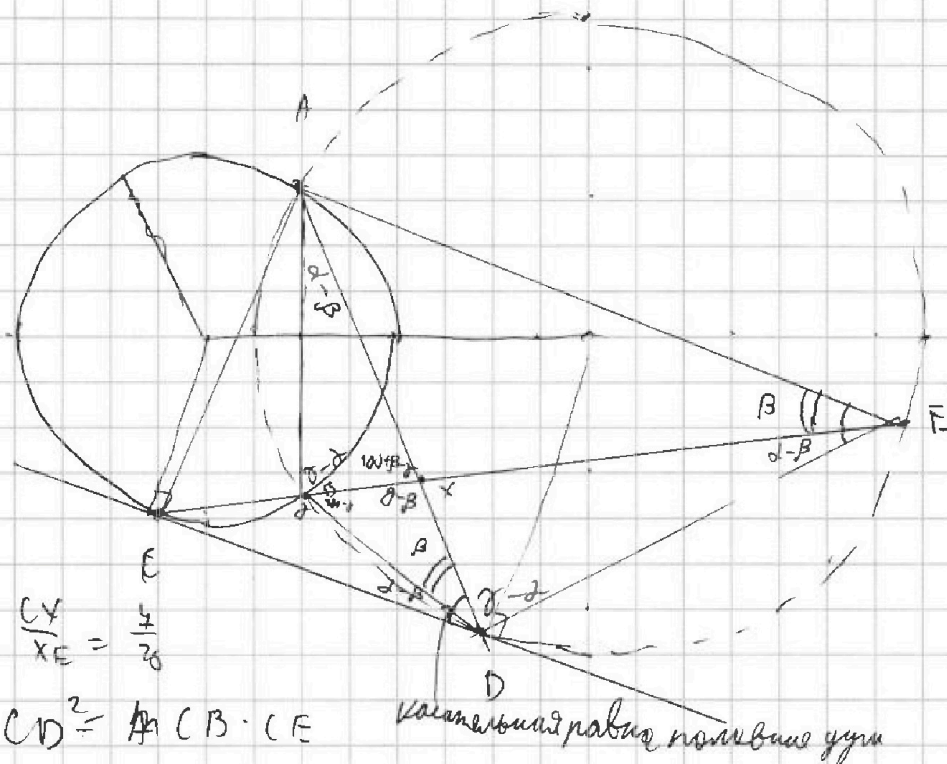


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$\frac{CY}{XE} = \frac{1}{20}$$

$$CD^2 = AC \cdot CE$$

касательная равна произведению отрезков

$$\triangle ABX \sim \triangle EDX$$

$$\frac{AB}{ED} = \frac{DX}{EX} = \frac{AX}{EX}$$

$$\triangle CBD \sim \triangle CDE$$

$$\triangle CBD \sim \triangle CDE$$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{BD}{DE} = \frac{CD}{CE}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(a; b; c)$

- 1) $a = b$
- 2) $b - a \not\equiv 3$
- 3) $(a - c)(b - c) = n^2$, n - простое
- 4) $a^2 + b = 1000$

3) произведение 2 чисел равно квадрату простого только в 6 случаях

$$\times \begin{cases} a - c = n \\ b - c = n \end{cases} \begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = n^2 \end{cases} \begin{cases} a - c = n^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \begin{cases} a - c = -n \\ b - c = -n \end{cases} \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -n^2 \end{cases} \begin{cases} a - c = -n^2 \\ b - c = -1 \end{cases}$$

$a = b$ усл. 1 все ок пока
 $a = c + n^2$ $b = c + 1$ $a = b$ усл. 1 не подходит
 $c + n^2 < c + 1$ только при $n = 0$, но n - простое
 $a = c - 1$ $b = c - n^2$ $a = b$ усл. 1 не подходит
 $c - 1 < c - n^2$ $c + n^2 < c + 1$ только при $n = 0$, но n - простое

случай 1, пусть $a = 1 + c$ $b = n^2 + c$ $b - a = n^2 - 1 \not\equiv 3$ если $|n| > 3$, то $n = 3k + 2$

$$a = c + 1 \quad b = 9k^2 + 12k + 4 + c$$

$$a^2 + b = c^2 + 2c + 1 + 9k^2 + 12k + 4 + c = 1000$$

$$c^2 + 2c + 5 = 1000 - 9k^2 - 12k - 4 \Rightarrow c^2 + 2c + 9 = 990 - 9k^2 - 12k - 4 \Rightarrow c^2 + 2c + 9 = 986 - 9k^2 - 12k - 4$$

$$n = 3 \quad a = 1 + c \quad b = 9 + c$$

$$c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 1000$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$c = -33 \quad a = -32 \quad b = -24$$

$$c = 30 \quad a = 31 \quad b = 39$$

теперь, пусть $a = c - n^2$ $b = c - 1$ $b - a = n^2 - 1$ $n = 3k + 2$, $|n| > 3$

$$a = c - 9k^2 - 12k - 4 \quad b = c - 1$$

$$\text{усл. 4} \quad \begin{cases} (x-2)^2 + x - 1 \equiv 1 \\ x^2 - 3x + 3 \equiv 1 \\ x^2 \equiv 1 \end{cases}$$

$$1) c = 3m + 1$$

$$a = 3m + 1 - 9k^2 - 12k - 4 = 3m - 9k^2 - 12k - 3$$

$$b = 3m$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = c - n^2 \quad b = c - 1$$

$$n = 3k + 2$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$c^2 - 2cn + n^4 + c - 1$$

$$n \equiv 2 \Rightarrow n^2 \equiv 1$$

$$c \equiv x \quad a \equiv x-1 \quad b \equiv x-1$$

новая переменная

сначала, пусть $a = 1 + c$ $b = n^2 + c$ $b - a = n^2 - 1 \quad \text{ум. 2.}$

если $|n| \neq 3$, то $n \neq 3k$, т.к. n - простое

$$n = 3k + 1 \quad b - a = 9k^2 + 6k + 1 - 1 : 3 \rightarrow n \neq 3k + 1$$

$$n = 3k + 2 \quad b - a = 9k^2 + 12k + 4 - 1 : 3 \rightarrow n \neq 3k + 2$$

единственный случай $|n| = 3$

$$a = 1 + c$$

$$b = 9 + c$$

$$c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 1000$$

$$c = -33 \quad a = -32 \quad b = -24$$

$$c = 30 \quad a = 31 \quad b = 39$$

иначе, пусть $a = c - n^2$ $b = c - 1$ $b - a = n^2 - 1 \quad \text{ум. 2.}$

аналогично тому, что было $|n| = 3$ $a = c - 9$ $b = c - 1$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$c = 40 \quad a = 31 \quad b = 39$$

$$c = -23 \quad a = -32 \quad b = -24$$

Ответ: $(-32; -24; -23)$, $(31; 39; 40)$, $(-32; -24; -33)$,

~~$(31; 39; 30)$~~ $(31; 39; 30)$

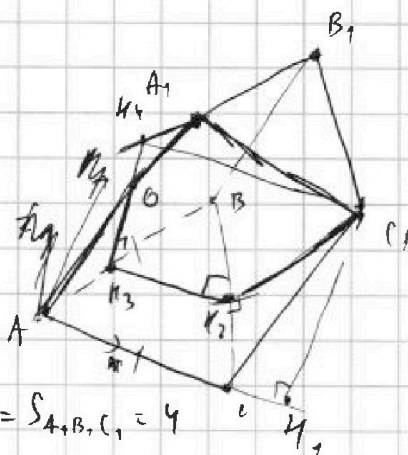


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$A...A_1$ - правильная призма $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} = 4$

$S_{AA_1B_1B} = S_{BB_1CC_1} = 6$ (без потери общности, потому что тут можно выбрать любые две боковые грани, все равно 1 сторона общая)

$S_{AA_1C_1C} = 5$ $AD = \frac{4}{\sqrt{3}}$ $V = h \cdot S_{ABC}$

$A(0,0,0)$ $A_1(x,0,h)$ $C_1(\frac{4}{\sqrt{3}}+x,0,h)$ $B_1(\frac{2}{\sqrt{3}}+x,\frac{2}{\sqrt{3}},h)$
 $B(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},0)$

$C_1H_1 \cdot AC = 5$ (C_1H_1 - высота параллелограмма AA_1C_1C)

$C_1H_2 \cdot BC = 6$ (C_1H_2 - высота параллелограмма BB_1C_1C)

1) $C_1H_2 \perp BC$, затем найдем H_3 так, что $H_3H_2 \perp BC$, на прямой B_1A_1 найдем точку H_4 так, что $H_4H_3 \perp AB$

$C_1H_4H_3H_2$ - ортогональное сечение призмы $\Rightarrow V_{A...A_1} = h \cdot S_{C_1H_4H_3H_2}$

дальше можно найти все стороны из площадей и найти высоту, тогда, заменив все на 4 мы найдем ответ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 - \frac{18 - 2\sqrt{14}}{2} \quad - \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

$$3 - \frac{18 + 2\sqrt{14}}{2}$$

$$b = \frac{2 + \sqrt{14}}{2} \quad b^2 = \frac{2 + 4\sqrt{14} + 14}{2} = \frac{16 + 4\sqrt{14}}{2} = 8 + 2\sqrt{14}$$

$$4 + 4\sqrt{14} + 14$$

$$\frac{18 + 4\sqrt{14}}{2}$$

$$3 - \frac{4 + 2\sqrt{14}}{2}$$

$$\frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2}$$

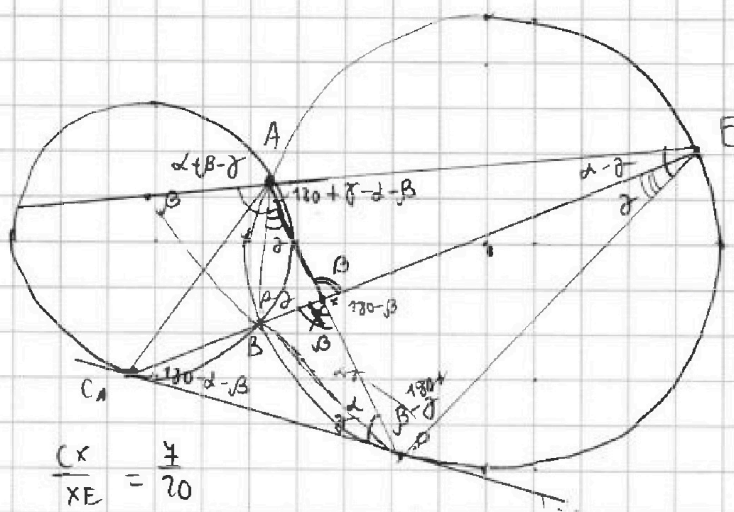


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{ED}{CD} = ? \quad \frac{CX}{XE} = \frac{7}{20}$$

$$\angle ADC = \angle AED, \text{ т.к. } \angle ADC = \frac{\angle AED}{2}$$

$$CD^2 = CB \cdot CE = (CX - BX)(CX + XE)$$

$$\triangle ABX \sim \triangle EDX$$

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BX}{DX} = \frac{AX}{EX}$$

$$\triangle CBD \sim$$

$$\angle BDA = \angle AEB$$

углы углы равны

$$\triangle ABD \sim$$

$$\angle BAE = 180 - \angle BDE$$

$$120 + 2\gamma - \alpha - \beta = 120 -$$

$$CBD \text{ и } CED$$

$$CD$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

