



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[12]{1.} \text{ } q\text{-шар прогрессии, тогда } q^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \\ = 2-x \text{ и } q^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow q^8 = \sqrt{(3x+2)^{-4}} \text{ при выполнении ОДЗ} \Rightarrow \\ \Rightarrow q^2 = \pm \sqrt[4]{\sqrt{(3x+2)^{-4}}} = \pm \sqrt[4]{(3x+2)^{-2}} = \pm (3x+2)^{-1/2} \Rightarrow$$

$$\text{Т.к. прогрессия состоит из действ. чисел } q^2 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow q^2 = (3x+2)^{-1/2} \Rightarrow (3x+2)^{1/2} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \\ = 2-x \Rightarrow \sqrt{25x+34} = 2-x \text{ при выполнении ОДЗ.}$$

$$25x+34 = 4-4x+x^2 \Rightarrow x^2-29x-30=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ или } x = 30. \text{ При } x = -1 \text{ не выпол-}$$

няется ОДЗ, т.к. подкоренное выражение

$$(25x+34)(3x+2) < 0 \Rightarrow x \neq -1. \text{ При } x = 30 \text{ 12-й}$$

шар прогрессии отрицательный, чего не мо-
жет быть так как он является про-
изведением арифм. корня и квадрата дей-
ствительного числа $q \Rightarrow x \neq 30 \Rightarrow$ таких x
не существует.

Ответ: таких x не существует



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2}. \quad \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение: $|y+2| + |y-18| + |y-18| = \sqrt{400-z^2}$. Заметим, что $|y+2| + |y-18| \geq y+2 - y+18 = 20$; $|y-18| \geq 0$, а $\sqrt{400-z^2} \leq \sqrt{400} = 20 \Rightarrow$ равенство достигается только при $|y-18| = 0$; $z = 0 \Rightarrow y = 18, z = 0$. Тогда первое уравнение такое: $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$. Пусть $x+6 = a$ $3-x = b$:

~~$$\begin{aligned} \sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 &= 2\sqrt{ab} \leq a+b \text{ по кр-ку средних} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 &\leq a+b = x+6+3-x=9 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 2 \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 &= 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + a+b+7 = a+2\sqrt{ab}+b = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \\ a+b=9 &\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 16 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \quad | \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\ a-b+16(\sqrt{a}+\sqrt{b}) &= (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3 \end{aligned}$$~~

$$\begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} + 7 &= 2\sqrt{ab}, \quad a+b = x+6+3-x=9 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 &= \sqrt{a} - \sqrt{b} + a+b-2 = 2\sqrt{ab} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + a - 2\sqrt{ab} + b - 2 &= 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-2=0. \quad t=\sqrt{a}-\sqrt{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2+t-2=0 \Rightarrow t=1 \text{ или } t=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a}-\sqrt{b}=1 \\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}=1 \\ \sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+7=8=2\sqrt{(x+6)(3-x)} \\ -2+7=5=2\sqrt{(x+6)(3-x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+6)(3-x)=16 \\ 4(x+6)(3-x)=25 \end{cases}$$

$$-x^2-3x+18=16 \Rightarrow x^2+3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$-4x^2-12x+72=25 \Rightarrow -4x^2-12x+47=0 \Rightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144+16\cdot 47}}{-8}=$$

$$=\frac{12\pm 4\sqrt{9+47}}{-8}=\frac{-3\pm\sqrt{56}}{2}=\frac{-3\pm 2\sqrt{14}}{2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{14}$$

Проверим, удовл. ли эти x $0 \leq x \leq 3$. $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -6 \leq x \leq 3 \quad 0 < -\frac{3}{2} + \sqrt{14} \vee 3 \Leftrightarrow 14 \vee 4,5^2 > 16 \underset{14}{\Rightarrow} \text{удовл.}$$

$$0 > -\frac{3}{2} - \sqrt{14} \vee -6 \Leftrightarrow 14 \vee 4,5^2 > 16 \underset{14}{\Rightarrow} \text{неудовл.}$$

$$0 < -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \vee 3 \Leftrightarrow \frac{17}{4} \vee 4,5^2 > 16 > \frac{17}{4} \Rightarrow \text{удовл.}$$

$$0 > -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}} \vee -6 \Leftrightarrow \frac{17}{4} \vee 4,5^2 > 16 > \frac{17}{4} \Rightarrow \text{неудовл.}$$

Значит подходят только $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{14}$ и $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$

Ответ: $(-\frac{3}{2} + \sqrt{14}; 48; 0)$, $(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}; 48; 0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}. \quad p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0;$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0;$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0;$$

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0;$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0;$$

$$(\cos x + 1)^3 = (1-p) \cos^3 x;$$

$$\cos x + 1 = \sqrt[3]{1-p} \cos x;$$

$$1 = \cos x (\sqrt[3]{1-p} - 1) \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ чтобы было хотя бы одно решение $\left| \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right| \leq 1$

$$\Rightarrow \left| \sqrt[3]{1-p} - 1 \right| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \\ \sqrt[3]{1-p} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-p \geq 8 \\ 1-p \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \leq -7 \\ p \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left| \sqrt[3]{1-p} - 1 \right| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} - 1 \geq 1 \\ \sqrt[3]{1-p} - 1 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-p \geq 8 \\ 1-p \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \leq -7 \\ p \geq 1 \end{cases}$$

При таких p $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{1-p^2-1}}\right) + 2\pi k$,
 $k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. Разберём 3 случая симметрии: относительно горизонт. и верт. ср. лин.

~~указана~~ относительно вертикальной сред. линии;

3) относительно горизонтальной средней линии.

В 2) и 3) случае достаточно выбрать ~~четыре~~ ^{четыре} ~~точки~~ из соотвеств. половины прямоугольника (в 2) из  в 3) ). В обоих случаях мы выбираем 4 объекта без учёта порядка (т.к. клетки одинаковые) из $\frac{500 \times 120}{2} = 30000$ объектов.

Значит таких способов ~~составляем~~ для каждого случая C_{30000}^4 .

В 1) случае достаточно выбрать ~~четыре~~ ^{две} ~~клетки~~ ^{клетки} из соотв. четверти прямоугольника (т.к. остальные 6 будут определены симметрией, как и в случаях 2) и 3) оставшиеся 4 клетки определяются симметрией). Мы выбираем 2 объекта без учёта порядка из $\frac{500 \times 120}{4} = 15000$ объектов $\Rightarrow$ таких способов C_{15000}^2 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Количество клеток симметрии. В 1) случае - C
В 2) случае A B 3) случае B. Тогда

~~$A \cap B = C$, т.к. ^{количество} симметрии отн. центра это есть количество симметрии отн. обеих средних линий. Тогда ~~способ~~ клеток которые считаются ~~выражением~~ ~~$A \cap B$~~ и~~
Тогда, считая способы для A и B

~~$C = A \cap B \Rightarrow$ кол-во способов для~~ 
~~таких симметрий $P(A) + P(B) - P(C)$,~~
~~где P возвращает кол-во способов~~

Тогда $C = A \cap B$, а посчитать кол-во способов можно так $C_{30000}^4 + C_{30000}^4 - C_{15000}^2$. Т.к. мы два раза подсчитываем клетки удовл. $C (C = A \cap B)$.

Посчитаем теперь кол-во способов выбрать точки, которые обладают только центральной симметрией. Для этого достаточно выбрать четыре точки из какой-то из двух четвертинок прямоугольника ( или ). Остальные будут определены симметрией. Выбираем 4 из $50000/2 = 10000$ объектов - C_{15000}^4 для каждой четвертинки. Тогда всего способов: $C_{30000}^4 + C_{30000}^4 - C_{15000}^2 + C_{15000}^4 + C_{15000}^4 = 2C_{30000}^4 - C_{15000}^2 + 2C_{15000}^4$

Ответ: $2C_{30000}^4 - C_{15000}^2 + 2C_{15000}^4$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N6. (a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c = b-c = \pm p \\ \begin{cases} a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm p^2 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} a-c = \pm p^2 \\ b-c = \pm 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b - \text{не номер ДС}, \\ \text{т.к. } a < b \\ \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ a-b = \pm 1 \mp p^2 \\ a+b^{2c} = \pm p^2 \pm 1 \\ a-b = \pm p^2 \mp 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ \begin{cases} a-b = \pm 1 \mp p^2 \\ a-b = \pm p^2 \mp 1 \end{cases} \end{cases}$$

$a-b < 0 \Rightarrow 1) a-b = 1-p^2 < 0$ - не подходит; 2) $-1+p^2 < 0$ - не подходит; 3) $p^2-1 < 0$ - не подходит; 4) $-p^2+1 < 0$ - не подходит

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ \begin{cases} a-b = 1-p^2 \\ a-b = -p^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ a-b = -p^2 \pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = a + p^2 - 1 \Rightarrow b-a = p^2 - 1. \text{ Т.к. } b-a \not\equiv 3$$

$$a^2 + b = a^2 + a + p^2 - 1 = 1000 \Rightarrow a^2 + a + p^2 - 1001 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(p^2 - 1000)}}{2}$$

$$\text{Если } p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3}, \text{ то } p^2 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow p = 3 \begin{cases} p^2 - 1 \equiv 2 \\ p^2 - 1 \equiv 1 \end{cases}$$

Если $p^2 - 1 \equiv 1 \pmod{3}$, то $p^2 \equiv 2 \pmod{3}$. Но такого не может быть, т.к. $p \not\equiv 3 \pmod{3}$ (если разбирать случай $p \equiv 3 \pmod{3}$).

$$\text{Тогда } \begin{cases} p = 3k+1 \\ p = 3k+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \\ p^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow p = 3$$

$$\text{Значит } b-a = 9-1 = 8 \Rightarrow b = a+8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b = a^2 + a + 8 = 1000 \Rightarrow a^2 + a - 992 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a+1) = 992 = 31 \cdot 32 \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ a = -32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 39 \\ b = -24 \end{cases}$$

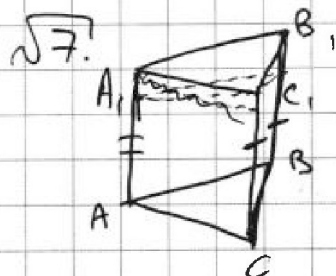
$$\Rightarrow 2c = a+b \mp 1 \mp p^2 \Rightarrow \begin{cases} c = 30 \\ c = -23 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } (31, 39, 30); (-32, -24, -23).$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

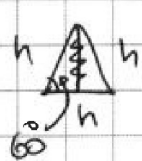
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Боковые грани - трапеции с одинаковой высотой. Основания трапеций: AA_1 , CC_1 , BB_1 .
Тогда $S_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1)h$; $S_2 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) \cdot h$; $S_3 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1)h \Rightarrow$ Если две площади равны, то и две образующие равны. Без ограничения общности будем считать, что $6 = S_1 = S_2 \Rightarrow BB_1 = CC_1 \Rightarrow S_3 = \frac{2BB_1}{2}h = BB_1 \cdot h$.

h - сторона равност. треугол, лежащего в основании. Его площадь $\frac{1}{2}h \cdot h \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}h^2 = 4 \Rightarrow$



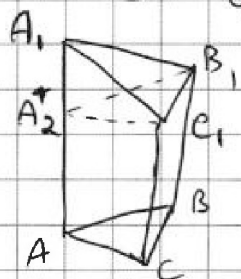
$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 = BB_1 \cdot h = BB_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 5 \Rightarrow BB_1 = \frac{5}{4}\sqrt{3}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1)h = \frac{1}{2}(AA_1 + \frac{5}{4}\sqrt{3}) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{12}{\sqrt{3}} - 5 \right) =$$

$$= 3 - \frac{5}{4}\sqrt{3}. \text{ Тогда } V = V_{ABCA_2B_1C_1} + V_{A_2B_1C_1A_1} \text{ (см. рис.).}$$



$$V_{ABCA_2B_1C_1} = S_{ABC} \cdot BB_1 = 4 \cdot \frac{5}{4}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$V_{A_2B_1C_1A_1} = \frac{1}{3} S_{A_2B_1C_1} \cdot AA_2 = \frac{1}{3} S_{ABC} (AA_1 - BB_1) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \left(3 - \frac{5}{4}\sqrt{3} - \frac{5}{4}\sqrt{3} \right) = 4 - \frac{10}{3}\sqrt{3}$$

$$= 4 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}\sqrt{3} = 4 - \frac{10}{3}\sqrt{3} \Rightarrow V = 5\sqrt{3} + 4 -$$

$$- \frac{10}{3}\sqrt{3} = 4 + \frac{5}{3}\sqrt{3} \text{ Ответ: } 4 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

$$a+b=9$$

$$a-b+7=2ab$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+7=2\sqrt{ab}$$

$$a-ab+1-b+6=ab$$

$$a+\sqrt{a}+b-\sqrt{b}+7=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$(a+1)(1-b)+6=ab$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+a+b-2=2\sqrt{ab}$$

$$2 \frac{10000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{4!}$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-2=0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \quad 2C_{15000}^4 + C_{15000}^2$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\frac{30000}{30000} \cdot 7$$

$$(p-1)(\cos^3 x) + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$\sqrt[3]{p-1} \cos x = -\cos x - 1$$



$$\cos x (\sqrt[3]{p-1} + 1) = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} - 1 \quad (\sqrt[3]{p-1} + 1)$$

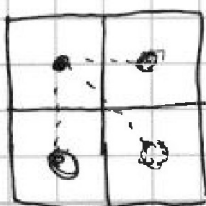
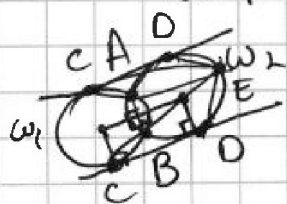
$$(p-1)^{1/3} + 1^{1/3} = \sqrt[3]{p-1+1+3(p-1)^{2/3}+(p-1)^{1/3}}$$

$$\sqrt[3]{1-p-1} \geq 1$$

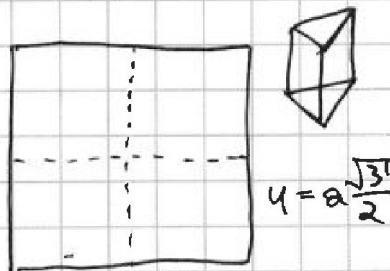
$$\sqrt[3]{1-p} \geq 2$$

$$\sqrt[3]{1-p-1} \leq -1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \leq 0$$



$$2 \frac{15000}{15000}$$



$$y = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2C_{15000}^4 = 2C_{30000}^2 - C_{15000}^2$$

$$1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 3123 \\ 7 \\ \hline 1001 \end{array}$$



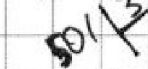
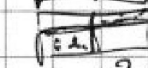
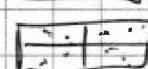
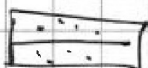
$$\begin{array}{r} 1001 \overline{) 14311} \\ 7 \overline{) 143} \\ 201 \overline{) 301} \\ 301 \overline{) 301} \\ \hline 0 \end{array}$$

1) Γ

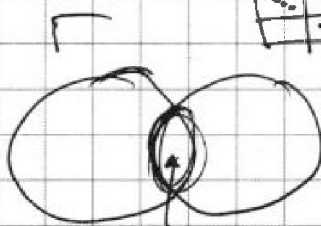
2) ΓB

3) B

4) U



$$501 \overline{) 13}$$



$$(3k+1)(3k+2)$$

4

$$1001 = 143 \cdot 7$$

$$\Gamma + B - \Gamma B + U$$

$$p^2 - 1001 = n^2 = 37 \cdot 11 \cdot 7$$

$$(p-n)(p+n) = 1001$$

$$a(a+1) + b - a = 1000$$

$$0,2 \quad 4,2 \quad 3,1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3 \\ a \equiv 1 \\ b - a \equiv 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \equiv 1 \\ a \equiv 1 \\ b \equiv 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \equiv 0 \\ b \equiv 1 \\ b \equiv 1 \\ b \equiv 2 \end{cases}$$

$$a - c = b - c$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$$

$$a^2 + a + p^2 - 1 = 1000$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{p^2 - 1001}}{2}$$

$$\begin{cases} a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = \pm p^2 \\ b-c = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < p^2 \\ -1 < -p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} p^2 < 1 \\ -p^2 < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b+1-p^2 \\ a = b+1-p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = p^2 + a - 1 \\ b = p^2 + a - 1 \end{cases}$$

$$(p-n)(p+n) = 13 \cdot 11 \cdot 7$$

$$\begin{aligned} p-n &= 13 \\ p+n &= 77 \\ p-n &= 11 \\ p+n &= 91 \\ p-n &= 7 \\ p+n &= 143 \\ p &= 75 \\ p-n &= 1001 \\ p+n &= 1 \\ p+n &= 1001 \\ p-n &= 1 \\ p &= 501 \\ p &= 501 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c)=p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c=\pm p \\ b-c=\pm p \end{cases} \Rightarrow a=b \quad \text{!}$$
$$\begin{cases} a-c=\{\pm p^2; \pm 13\} \\ b-c=\{\pm 1; \pm p^2\} \end{cases}$$
$$a^2+a+p^2-1001=0 \quad (-32-c)(-24-c)=9$$
$$a_1+a_2=-1 \quad a_1 \cdot a_2 = p^2-1001 = p^2-7 \cdot 11 \cdot 13$$
$$a(-1-a)=p^2-7 \cdot 11 \cdot 13$$
$$a+a^2=1001-p^2 \quad 4005-4p^2=n^2$$
$$4005 = n^2 + 4np + p^2 - 4np = (n+2p)^2 - 4np = 4005$$
$$60 \times 60 = 3600 \quad (31-c)(39-c) = 9$$
$$c=30$$
$$4005 = 63^2 + 36 = 63^2 + 6^2$$
$$63^2 + 6^2 - (2p)^2 = n^2$$
$$(63-2p)(63+2p) = (n-6)(n+6)$$
$$2 \cdot 982 = (a)(a+1)$$
$$31 \cdot 38 = 30$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2
□3
□

4

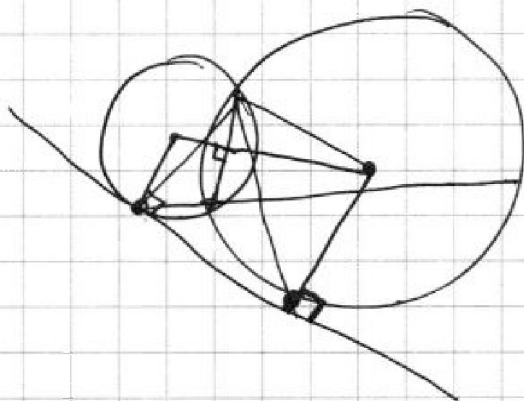
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BX \cdot XE = AX \cdot XD$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{BC}{2R_1} &= \sin \alpha \\ \frac{AC}{2R_1} &= \sin \beta \\ \frac{AF}{2R_2} &= \sin \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{R_1}{R_2} \quad \frac{OE}{BC} = \frac{R_1 \sin B}{R_2 \sin A}$$

$$\frac{(C_X - B_X)}{(C_X - B_C) X_E} \quad \delta - 180 + \alpha + \beta + \delta = \alpha + \beta + 2\delta$$

$$\frac{AE}{AD} = ?$$

$$XD = 2R_2 \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$AX = 2R_2 \sin(\alpha + \beta + 2\gamma)$$

$$\begin{aligned} r - (180 - \alpha - \beta - \gamma) &= \\ &= 2\alpha + \alpha + \beta - 180^\circ \end{aligned}$$

$$180^\circ - (2\alpha + \alpha + \beta - 180^\circ) - \beta =$$

$$= 360^\circ - 2\alpha - 2\beta - \alpha$$

$$(CB + BE)CB = CO^2$$

$$CD^2 = \cancel{CX} \cdot \cancel{CE}$$
$$= CB \cdot CE$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} \frac{AX}{XD}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

