



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

$a < b$, A

число $b-a$ не кратно 3, $\checkmark$

число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа, $?$

выполняется равенство $a^2 + b = 710$. $\checkmark$

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $x < 6$

$$x+3 = \sqrt{-25x+9}$$

$$x^2+6x+9 = -25x+9$$

$$x^2+31x=0$$

$$x(x+31)=0$$

$$x=0$$

$x \neq -31$ - не проходит проверку

Ответ: $x=0$

$$x=7$$

~~х=7~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 7

$$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$b_9 = x+3$$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^8$$

$$\frac{1}{(x-6)^2} = q^8$$

$$\frac{7}{\sqrt{|x-6|}} = q^2$$

$$b_9 = b_7 q^2$$

$$x+3 = \cancel{\sqrt{\frac{25x-9}{x-6}}} \cdot \sqrt{\frac{(25x-9)(x-6)}{|x-6|}}$$

$x \geq 6$:

$$x+3 = \sqrt{25x-9}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$(x-18)(x-1) = 0$$

$$x = 18$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 18 \\ x = 1 - \text{не подходит} \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☒ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{7-x} + 4 = 2$$

$$a = x + 2$$

$$\sqrt{a+3} - \sqrt{-a+3} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{a+3} \sqrt{-a+3}$$

$$a+3 - (-a+3) - 2\sqrt{a+3} \sqrt{-a+3} = 16 + 4(a+3)(-a+3) -$$

$$- 16\sqrt{a+3} \sqrt{-a+3}$$

$$6 - 2\sqrt{a+3} \sqrt{-a+3} = 16 + 4(a+3)(-a+3) - 16\sqrt{a+3} \sqrt{-a+3}$$

$$4(a+3)(-a+3) = (\sqrt{a+3} - \sqrt{-a+3})^2$$

$$\sqrt{a+3} \sqrt{-a+3} = t \geq 0$$

$$6 - 2t - 16 = 4t^2 + 16t = 0$$

$$2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$\Delta = 49 - 40 = 9$$

$$t = 2,5 \text{ или } t = 1$$

$$\sqrt{a+3} \sqrt{-a+3} = 1$$

$$-a^2 + 9 = 1$$

$$a^2 = 8$$

$$a = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{a+3} \sqrt{-a+3} = 2,5$$

$$-a^2 + 9 = 6,25$$

$$a^2 = 2,75$$

$$a = \pm \sqrt{2,75}$$

$$\Delta = 49 - 40 = 9$$

$$t = 2,5 \text{ или } t = 1$$

$$\text{Ответ: } x = \pm 2\sqrt{2} \text{ или } x = \pm \sqrt{2,75}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
} из }

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $x = \pm 2\sqrt{2} - 2$

$x = \pm \sqrt{2,75} - 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 2

рассмотрим 2-е уравнение

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{87-z^2}$$

н. к. модуль - расстояние от точки 90

точки, $|y+4| + |y-5| \geq 9 \Rightarrow |y+4| + 9|y-5| \geq 9$

т.е. $87-z^2 \leq 87 \Rightarrow \sqrt{87-z^2} \leq 9$

находим

$$|y+4| + 4|y-5| \geq 9 \geq \sqrt{87-z^2}$$

тогда $\begin{cases} y=5 \\ z=0 \end{cases}$

вернемся к первому равенству

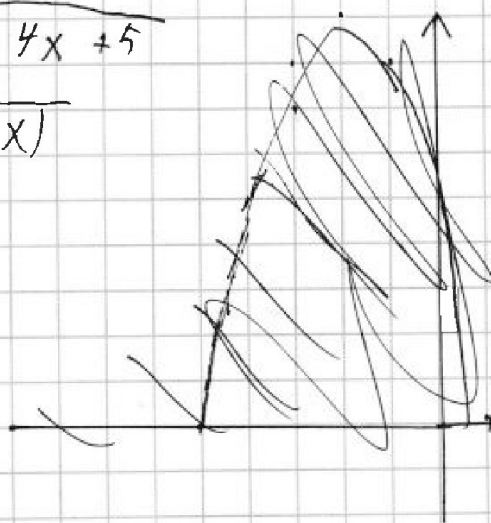
$$\sqrt{x+5} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{-x^2-4x+5}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+5)(7-x)}$$

$\sqrt{x+5}$ - монотонно возр.

$\sqrt{7-x}$ - монотонно убав.

$\sqrt{x+5} - \sqrt{7-x}$ - монот. возр.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
7 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

$$p(4\cos^3(x) - 3\cos(x)) + 3(p+4)\cos(x) - 6(2\cos^2(x) - 1) + 70 = 0$$

$$4p\cos^3(x) - 72\cos^2(x) + 72\cos(x) - 4 = 0$$

$$p\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если вычитаются сим 1 и 3, то применим
начало 1, затем 3. т.к. сим. 3 состоит
из 1, 2, сим 7 будет применена дважды,
а сим. 2 останется. мы получили
~~множество~~ симметричный к исходному
относительно горизонтальной линии
и являющийся им же, $\Rightarrow$ ~~множество~~ образам
сим. 2.

аналогично из сим 2, 3 $\Rightarrow$ сим 7
тогда, ~~множество~~ множество образует
либо одной симметрией, либо тремя.
множество, обладающее тремя симметри-
ями можно восстановить, зная его
левую верхнюю четверть, т.к. в каждой четв.
кол-во точек равное, в верхн. лев. их будет 2
получим $\binom{4}{100 \cdot 200} + \binom{4}{50 \cdot 400} + \binom{4}{100 \cdot 200} - 2 \binom{2}{50 \cdot 200} =$
 $= 3 \binom{4}{20000} - 2 \binom{2}{10000}$ Ответ: $3 \binom{4}{20000} - 2 \binom{2}{10000}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6

обозначим $b-a=k$ где $k \in \mathbb{N}$

из условия 2 $k \neq 3$

из условия 4:

$$a^2 + (a+k) = 770$$

$$a^2 + a = 770 - k$$

$a^2 + a$ - квадрат. (вероятно в $a = -0,5$)

$$a^2 + a \geq -0,25$$

$$\Downarrow$$
$$770 - k \geq -0,25$$

~~кратко~~ $k \leq 770$

целые

если произведение двух ^{целых} чисел - квадрат
простого, то либо они оба это простое,
либо одно из них 7 (или -7), т.к. $a \neq b$, одно
из них $\neq 7$ и $\neq -7$, а второе $= p^2$, где p - простое число
~~тогда $k = p^2 - 7$~~

$$\text{тогда } (b-c) - (a-c) = p^2 - 7 = b-a = k$$

перепроверим все p , при которых $k \leq 770$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

p	2	3	5	7	77	73	77	79	23	29	29
p^2	4	9	25	49	721	769	289	361	529	841	841
k	3	8	24	48	720	768	288	360	528	840	840

из них только 8:3

тогда $k = 8$

$$a^2 + a = 770 - 8$$

$$a^2 + a - 702 = 0$$

$$\begin{cases} a = 26 \\ a = -27 \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} \begin{cases} a = 26 \\ b = 34 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -27 \\ b = -79 \end{cases} \end{cases}$$

подставив в 3 уравне,
найдем по 2 решения

для каждого a, b . Ответ: $(a=26; b=34; c=25)$,

$(a=26; b=34; c=35), (a=-27; b=-79; c=-78), (a=-27; b=-79; c=-28)$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1



2



3



4



5



6



7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{x+5} - \sqrt{7-x}$$

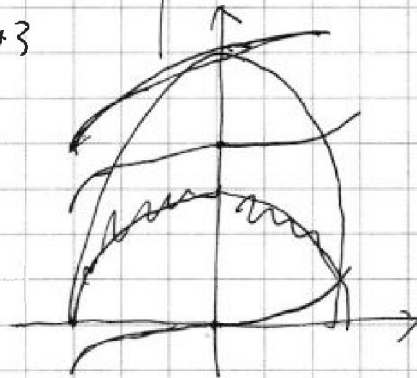
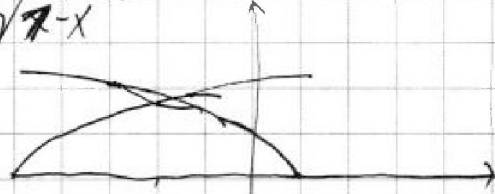
~~12/12~~

$$a = x+2$$

$$\sqrt{a+3} + \sqrt{-a+3} + 4 = 2\sqrt{a+3} - \sqrt{-a+3}$$

$$a+3 + a+3 + 2\sqrt{a+3}$$

2 5
2 5
7 2 5
5 1
6 2 5



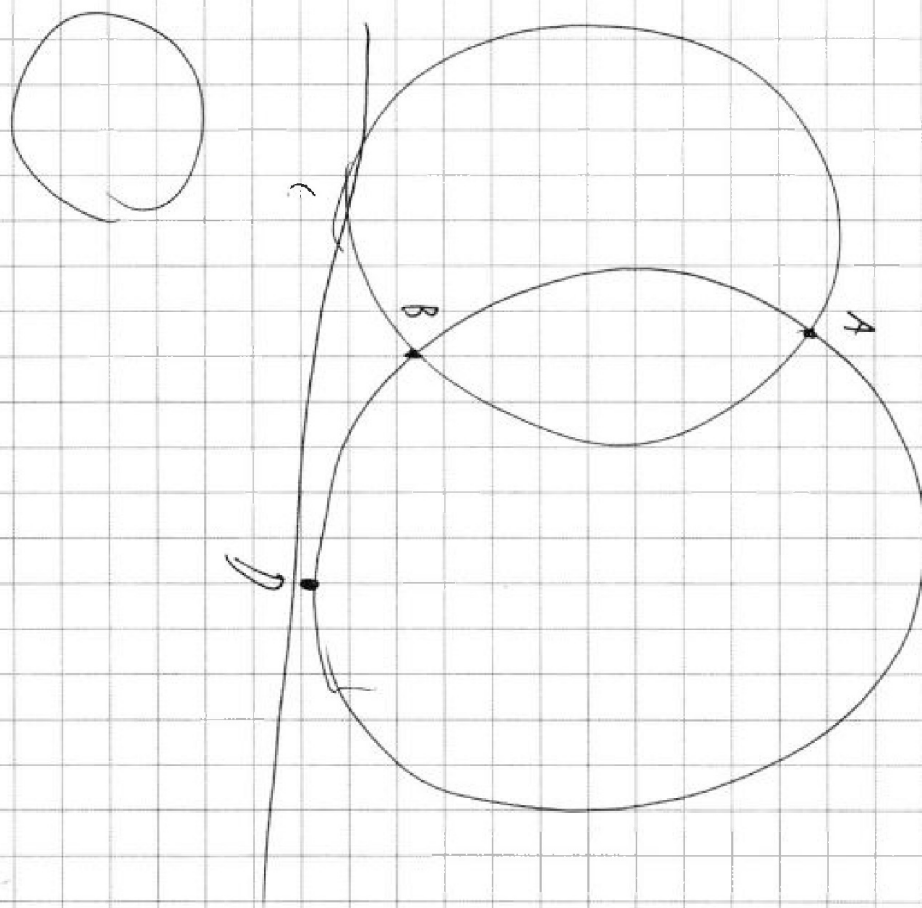


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c = 4$$

$$77$$

$$2$$

$$25$$

$$77$$

$$25 \cdot 77$$

$$25$$

$$b = p^2$$

$$a - c = p^k$$

$$b - c = p^l$$

$$\begin{cases} a = p^k + c \\ b = p^l + c \end{cases}$$

$$p^l + c - p^k + c \div 3$$

$$p^l - p^k \div 3$$

$$p \div 3$$

$$a^2 + b = 77 \cdot 25$$

$$b = a + k$$

$$a^2 + a + k = 770$$

$$a^2 + a = 770 - k$$

$$a(a+1) \leq 0,25$$

$$770 - k \leq 0,25 - n.n$$

$$770 - 0,25$$

impl

$$\left(\frac{b_9}{b_7}\right)^4 = \left(\frac{b_{15}}{b_7}\right)$$

$$\frac{b_9}{b_7} = q^2$$

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^8$$

$$b_2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^8 \quad \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = q^8$$

$$\frac{7}{(x-6)^4} = q^8$$

$$\frac{7}{x-6} = q^2$$

$$\sqrt{25x-9} = x+3$$

$$25x-9 = x^2+6x+9$$

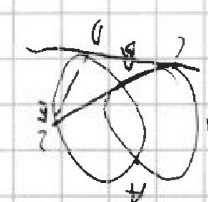
$$x^2$$

$$-37$$

$$x \neq \frac{9}{25}$$

$$x \neq 6$$

$$= q^8$$



$$x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 6 + x - \frac{1}{x} = \frac{5+x}{x}$$

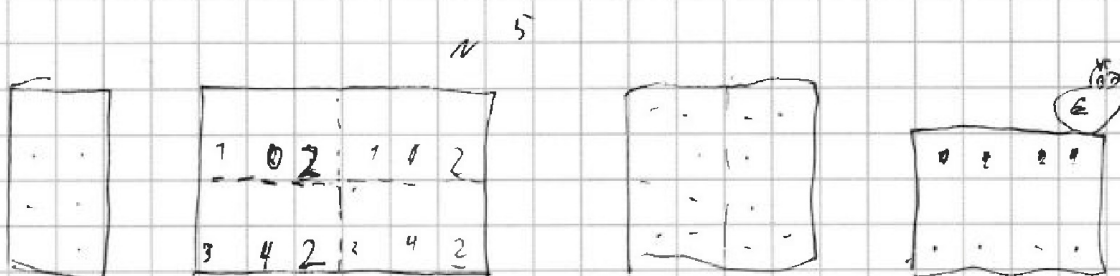


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$C_{100}^4 + 10 \cdot 2(10) \cdot C_{100}^3$$

$$C_{1000}^4 + C_{1000}^4$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$A + B + C$$

$$A \rightarrow C \quad 2+3$$

$$3 C_{2000}^4 - 2 C_{1000}^2$$

$$3 \cdot 72 \cdot 72 \cdot 272537$$

$$\cos(2\alpha + \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) =$$

$$\cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha) =$$

$$= (2\cos^2 - 1)\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$$

$$= 2\cos^3 - \cos - 2\cos(\sin^2) = 2\cos^3 - \cos - 2\cos(1 - \cos^2) =$$

$$= 2\cos^3 - \cos - 2\cos + 2\cos^3 = 4\cos^3 - 3\cos$$

$$p(4\cos^3 - 3\cos) + 3(p+4)\cos = 6(2\cos^2 - 1) + 70$$

$$4p\cos^3 - 3p\cos + 3p\cos + 72\cos - 72\cos^2 + 6 = 70 = 0$$

$$4p\cos^3 - 72\cos^2 + 72\cos - 4 = 0$$

$$p\cos^3 - 18\cos^2 + 18\cos - 1 = 0$$

$$p\cos^3 - 4\cos^2 + 4\cos - 1 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos^3 - 3 \cos^2 + 3 \cos - 7 \quad (\cos - 1)^3 + (p-7) \cos^3$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{7-x-4z} + 4 = \sqrt{-x^2-4x+4+2}$$

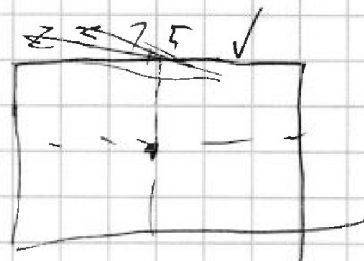
$$x \geq -5 \quad \checkmark$$

$$7-x-4z \geq 0$$

$$x+4z \leq 7 \quad \checkmark \quad 4z \leq 7-x \leq 7+5$$

$$x^2 + 4x - 4 - z \leq 0$$

$$-9 \leq z \leq 9 \Rightarrow -9 \leq z \leq 7,5 \quad \checkmark$$



~~z=0~~

$$z=0!$$

$$y=5!$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{-(x+5)(x-7)}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+5)(7-x)}$$



$$a-b \neq 4 = 2ab - 4$$

$$2ab - b + a - 4 = 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 32ab + 76$$

$$a^2 + b^2 + 30ab - 4a^2b^2 = 76$$

$$-5 \leq x \leq 7 \quad x \cdot \sqrt{a+2} - \sqrt{-a+9}$$

$$x = x+3$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{-x+2}$$

