



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$\frac{15x+6}{(x-3)^3}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases} \quad y=35 \quad z=0$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

$(a-b)^2 = p^2$
 $a-b = p$
 $a+b^2 = 820$
 $a = 820 - b^2$
 $820 - b^2 - b = p$
 $820 - b^2 - b = p^2$
 $820 - b^2 - b = (a-b)^2$
 $820 - b^2 - b = a^2 - 2ab + b^2$
 $820 - b^2 - b = a^2 - 2b(a-b) + b^2$
 $820 - b^2 - b = a^2 - 2b(a-b) + b^2$
 $820 - b^2 - b = a^2 - 2b(a-b) + b^2$

819, 1
816, 2
811, 3
808

1 → 1
2 → 2
0 → 0
0



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
{ ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \quad b_{10} = x+4, \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} (15x+6)(x-3) \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$$

имеем систему если $b_4, b_{10}, b_{12} \neq 0$

$$b_4 \cdot q^8 = b_{12}$$

$$q^8 = \frac{b_{12}}{b_4} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2$$

$$q^4 = |x-3|$$

1 случай: $x-3 > 0 \Rightarrow 15x+6 > 0$

$$q = \sqrt[4]{x-3} \Rightarrow 3 < x$$

$$b_{10} = b_4 \cdot q^6$$

учтем $x-3 > 0$

$$b_{10} = b_4 \cdot \sqrt[4]{(x-3)^6} = b_4 \cdot \sqrt{(x-3)^3} = \sqrt{15x+6} = x+4$$

$$\sqrt{15x+6} = x+4, \quad x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$$

$$15x+6 = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$\begin{cases} x=2 - \text{не удовлетворяет } x > 3 \\ x=5 - \text{удовлетворяет} \end{cases}$$

2 случай: $x-3 < 0 \Rightarrow 15x+6 < 0$

$$\Rightarrow x < -0,4$$

$$q^8 = (x-3)^2 \Rightarrow q = \sqrt[4]{3-x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_{30} = b_4 \cdot q^6 = b_4 \cdot \sqrt[4]{(3-x)^6} \stackrel{\leftarrow \text{уเงื่อนไข } 3-x > 0}{=} b_4 \cdot \sqrt[4]{(3-x)^3} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt[4]{(3-x)^3} =$$
$$= \sqrt{\frac{6+15x}{(3-x)^3}} \cdot \sqrt{(3-x)^3} = \sqrt{-(6+15x)} = x+4, \quad x \geq -4$$

$$-(6+15x) = (x+4)^2$$

$$-6-15x = x^2+8x+16$$

$$x^2+23x+22=0$$

$$(x+22)(x+1)=0$$

$$\begin{cases} x = -1 \text{ (удов.)} \\ x = -22 < -4 \text{ - не удовлетворяет} \end{cases}$$

$$-4 \leq -1 \leq -0,4 \Rightarrow \text{удовлетворяет.}$$

Что мы имеем $x = -1; x = 5$

Ответ: $-1; 5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-z}$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad (1)$$

Рассмотрим (1)

1) если $y < 20$

$$20-y + 2(35-y) = \sqrt{225-z^2}$$

$$90-3y = \sqrt{225-z^2}$$

$$\geq 30$$

$$\leq 15$$

$$y < 20$$

$\rightarrow$ противоречие

2) если $y > 35$

$$y-20 + 2(y-35) = \sqrt{225-z^2}$$

$$3y-90 = \sqrt{225-z^2}$$

$$> 15$$

$$\leq 15$$

$\rightarrow$ противоречие

3) если $20 \leq y \leq 35$

$$y-20 + 2(35-y) = \sqrt{225-z^2}$$

$$50-y = \sqrt{225-z^2}$$

$$\geq 15$$

$$\leq 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 50-y=15 \\ \sqrt{225-z^2}=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=35 \\ z=0 \end{cases}$$

единственное
решение при



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим в 1 ур-ние: $y=35$
 $z=0$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

Пусть $\sqrt{x+7} = a \geq 0$

$\sqrt{5-x} = b \geq 0$

$$a-b + \frac{a^2+b^2}{2} = 2ab$$

$$a-b + \frac{a^2+b^2}{2} = (a+b) \frac{a^2+b^2}{2} - (a-b)^2$$

$$(a-b) + (a-b) \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$(a-b)(a-b-1)$$

Пусть $a = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}$,

$$\text{тогда } a^2 = x+7 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} + 5-x$$

$$\text{Значит } 2\sqrt{35-2x-x^2} = 12-a^2$$

$$a+6 = 12-a^2$$

$$a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0$$

$$\begin{cases} a=-3 \text{ ①} \\ a=2 \text{ ②} \end{cases}$$

① $a=-3$

Подставим обратную замену.

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = -3$$

Пусть $5-x=t$, тогда $x+7=12-t$

$$\sqrt{12-t} = \sqrt{t} - 3, \sqrt{t} \geq 3$$

$$12-t = t - 6\sqrt{t} + 9$$

$$2t^2 - 6\sqrt{t} - 3 = 0$$

Пусть $k = \sqrt{t}, k \geq 3$

$$2k^2 - 6k - 3 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 60$$

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{60}}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} k = \frac{3+\sqrt{15}}{2} \\ k = \frac{3-\sqrt{15}}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{3+\sqrt{15}}{2} \Rightarrow t = k^2 = \frac{(3+\sqrt{15})^2}{4} = \frac{9+15+6\sqrt{15}}{4} = 6 + \frac{3}{2}\sqrt{15}$$

не удовлетворяет.

$k \sqrt{3}$

$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} \sqrt{3}$$

$\sqrt{15} \sqrt{3}$

$15 > 9$ - верно

$$x = 5 - t \Rightarrow x_2 = 5 - \left(6 + \frac{3}{2}\sqrt{15}\right) = -1 - \frac{3}{2}\sqrt{15} < 0$$

$$x_1 + 7 > 0$$

$$x_1 > -7$$

$$-1 - \frac{3}{2}\sqrt{15} > -7$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{15} > -6$$

$$6 > \frac{3}{2}\sqrt{15}$$

$$4 > \sqrt{15}$$

$$16 > 15 \text{ - верно}$$

$$5 - x_2 > 0$$

$$6 + \frac{3}{2}\sqrt{15} > 0 \text{ - верно.}$$

② $a = 2$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2$$

$$\text{Пусть } 5-x=t, \text{ то}$$

$$\sqrt{12-t} - \sqrt{t} = 2$$

$$\sqrt{12-t} = \sqrt{t} + 2$$

$$12-t = t + 4\sqrt{t} + 4$$

$$2t + 4\sqrt{t} - 8 = 0$$

$$k = \sqrt{t}, k \geq 0$$

$$2k^2 + 4k - 8 = 0$$

$$D = 16 + 64 = 80$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k = \sqrt{10} - 1 > 0 \\ k = -\sqrt{10} - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{не удовлетворяет.}$$

$$k = \sqrt{10} - 1 \Rightarrow t = k^2 = 5 + 1 - 2\sqrt{10} = 6 - 2\sqrt{10}$$

$$x = 5 - t = 2\sqrt{10} - 1$$

~~$6 - 2\sqrt{10} > 0$~~
 ~~$2\sqrt{10} > 4$~~
 ~~$4\sqrt{10} > 8$~~ - верно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6/2\sqrt{5} < 5$$

$$1 < 2\sqrt{5}$$

$$1 < 4.5 \text{ - верно}$$

$$2\sqrt{5} - 1 < 5$$

$$2\sqrt{5} < 6$$

$$\sqrt{5} < 3$$

$$5 < 9 \text{ - верно}$$

$$2\sqrt{5} - 1 > -2$$

$$2\sqrt{5} > -6$$

$$\sqrt{5} > -3 \text{ - верно}$$

Итого: верно для x получаем 2 значения, удовлетворяющих ОДЗ: $x = 2\sqrt{5} - 1$

$$x = -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Итого: ответ вида $(x; y; z)$

$$\text{Ответ: } (2\sqrt{5} - 1; 35; 0); (-1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}; 35; 0)$$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 3(2 \cos^2 x - 1) + p$$

$$4 \cos^3 x + 4 - 6 \cos^2 x + 3 \cos x = p - 3$$

Ищем попарным разложением в куб

$$a+b(a \cos x + b)^3 = a^3 \cos^3 x + 3a^2 \cos^2 x \cdot b + 3a \cos x \cdot b^2 + b^3$$

$$\begin{cases} 4 = a^3 \\ -6 = 2a^2b \\ 3 = 2ab^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ -6 = 2 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot b \\ 3 = 2 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ b = -\frac{6}{2 \cdot \sqrt[3]{4}} \\ b^2 = \frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = a^3 \\ -6 = 3a^2b \\ 3 = 3ab^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2^{\frac{2}{3}} \\ -2 = a^2b \\ 1 = ab^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2^{\frac{2}{3}} \\ -2 = 2^{\frac{4}{3}} \cdot b \\ 1 = 2^{\frac{2}{3}} \cdot b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2^{\frac{2}{3}} \\ b = -2 \cdot 2^{-\frac{4}{3}} \\ b^2 = 2^{-\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2^{\frac{2}{3}} \\ b = -2^{-\frac{1}{3}} \\ b^2 = 2^{-\frac{2}{3}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{система верна}} \quad b^3 = -2^{-1}$$

$$\left(2^{\frac{2}{3}} \cdot \cos x - 2^{-\frac{1}{3}} \right)^3 + \frac{1}{2} = p - 3$$

$$\left(2^{\frac{2}{3}} \cdot \cos x - 2^{-\frac{1}{3}} \right)^3 = p - \frac{5}{2} \quad | \cdot 2$$

$$(2 \cos x - 1)^3 = 2p - 5 \quad 2p - 7$$

$$2 \cos x - 1 = \sqrt[3]{2p - 7}$$

$$\cos x = \frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{1 + \sqrt[3]{2p-7}}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq 1 + \sqrt[3]{2p-7} \leq 2$$

$$-3 \leq \sqrt[3]{2p-7} \leq 1$$

$$-27 \leq 2p-7 \leq 1$$

$$-20 \leq 2p \leq 8$$

$$\boxed{-10 \leq p \leq 4} \Rightarrow p \in [-10; 4]$$

$$\cos x = \frac{1 + \sqrt[3]{2p-7}}{2}$$

$$1) \text{ при } p=4 \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \text{ при } p=-10 \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3) \text{ при } p \in (-10; 4) \quad \cos x = \frac{1 + \sqrt[3]{2p-7}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p-7}}{2}\right) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p-7}}{2}\right) + 2\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Уточню: при $p < -10$ решений нет

$$\text{при } p = -10 \quad x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } -10 < p < 4 \quad \begin{cases} x = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p-7}}{2}\right) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p-7}}{2}\right) + 2\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{при } p = 4 \quad x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

при $p > 4$ решений нет.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

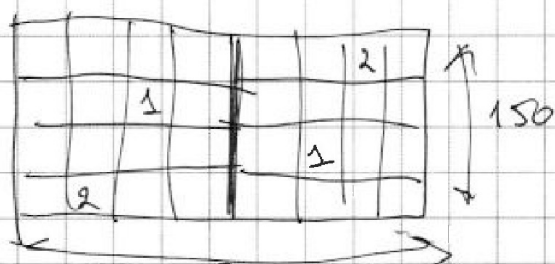
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим способ^{ами} ~~ами~~ способами можно выбрать точки для каждого из видов симметрии.

1) центральная симметрия:

Рассе~~е~~ Разделим прямоугольник на 2 части: по линии проходящей через центр и параллельной ~~одной~~ одной из сторон. (не учтем обычные баггет)



Если мы возьмем точку из левой половины ей однозначно соответствует симметричная из правой половины, аналогично в обратную сторону $(x; y) \leftrightarrow (201-x; 151-y)$

Т.е. выбрав 4 точки из левой половины мы получим 4 точки из правой, т.е. 8 точек. $\binom{4}{2} = \frac{150 \cdot 200}{2}$

2) симметрия относительно вертикальной средней линии.

Аналогично с разном^{ыми} пунктами мы делим прямоугольник на 2 равные части вертикальной линией.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

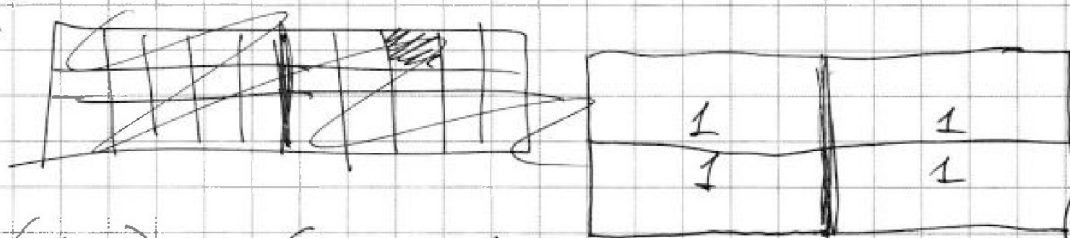
1) Из всех точек каждой из симметричных точек в точку $(x, y) \leftrightarrow (201-x, y)$

Т.е. нам нужно выбрать ровно 4 точки из набора $C_{\frac{200-150}{2}}^4$

3) Помогите аналогичные рассуждения для промежуточной симметрии $C_{\frac{200-150}{2}}^4$

Теперь докажем, что если есть хотя бы 2 симметрии, то есть и третья.

Допустим есть 2 симметрии относительно диагоналей.



$$(x, y) \leftrightarrow (201-x, y) \leftrightarrow (201-x, 151-y)$$
$$(x, y) \leftrightarrow (x, 151-y) \leftrightarrow (201-x, 151-y)$$

центральная симметрия



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2
□3
□

4

5

☒

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) пещь печь центрального и одна ^{свечная} с ^{свечной} средним мн.

$$(x, y) \leftrightarrow (201 - x; y) \leftrightarrow (x; 151 - y)$$

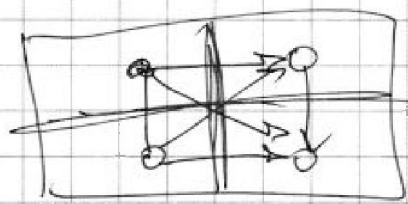
Answer

относительно лучше средств амин

3) Ассимиляция при преобладании среднего нит.

Итого: Выходит же семь бесчисленных
и ~~востановили~~ почитаемы 3 раза
т.е. тех или чужо воемь 2 раза.

такие случаи мы можем считать
разлив на 4 равные части при условии



Видеав 1 могу, но
изгугу могу даем есе 3,
Т-е. мы знаем видеав
также 2 там и зенити.
прелогани

Answer: $3C_{100-150}^4 - 2C_{50-150}^2$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$(a-c)(b-c) = p^2, p > 1, \text{ простое число.}$$

$$1) \begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b - \text{противоречие}$$

$$2) \begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases} \Rightarrow a=b - \text{противоречие}$$

$$3) \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c+1 \\ b=c+p^2 \end{cases}, \text{ тогда } a-b = 1-p^2 < 0 \text{ противоречие}$$

$$4) \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c-p^2 \\ b=c-1 \end{cases}, \text{ тогда } a-b = 1-p^2 < 0 \text{ противоречие}$$

Остается 2 варианта 1):

$$\begin{cases} \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} \quad (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (2)

$$a = c-1$$

$$b = c-p^2$$

$$a-b = p^2-1 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

если $p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2-1 \equiv 0 \pmod{3}$
 если $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2-1 \equiv 0 \pmod{3}$
 если $p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2-1 \equiv 2 \pmod{3}$

значит единственный вариант $p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p=3k$, кот. к. p -простое,

то $\boxed{p=3} \Rightarrow \begin{cases} a=c-1 \\ b=c-9 \end{cases} \quad a-b=8/3 \Rightarrow a>b$
 $(a-c)(b-c)=3^2$

$$c-1+(c-9)^2=820; \quad c-1+c^2-18c+81=820$$

$$c^2-17c-740=0$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(c-37)(c+20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c=37 \\ c=-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=36 \\ b=28 \\ c=37 \\ a=-21 \\ b=-29 \\ c=-20 \end{cases}$$

Рассмотрим ④

$$a = c + p^2$$

$$b = c + 1$$

$$a - b = p^2 - 1 \quad \text{Аналогично с произведением укажем, что } p=3$$

$$\begin{cases} a = c + 9 \\ b = c + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} a - b = 8 \neq 3 \\ a > b \end{matrix} \quad (a-c)(b-c) = 3^2$$

$$c + 9 + (c + 1)^2 = 820$$

$$c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 820$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$(c+30)(c-27) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c=-30 \\ c=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-21 \\ b=-29 \\ c=-30 \\ a=36 \\ b=28 \\ c=27 \end{cases}$$

Ответ: $(36; 28; 37); (-21; -29; -30); (36; 28; 27)$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

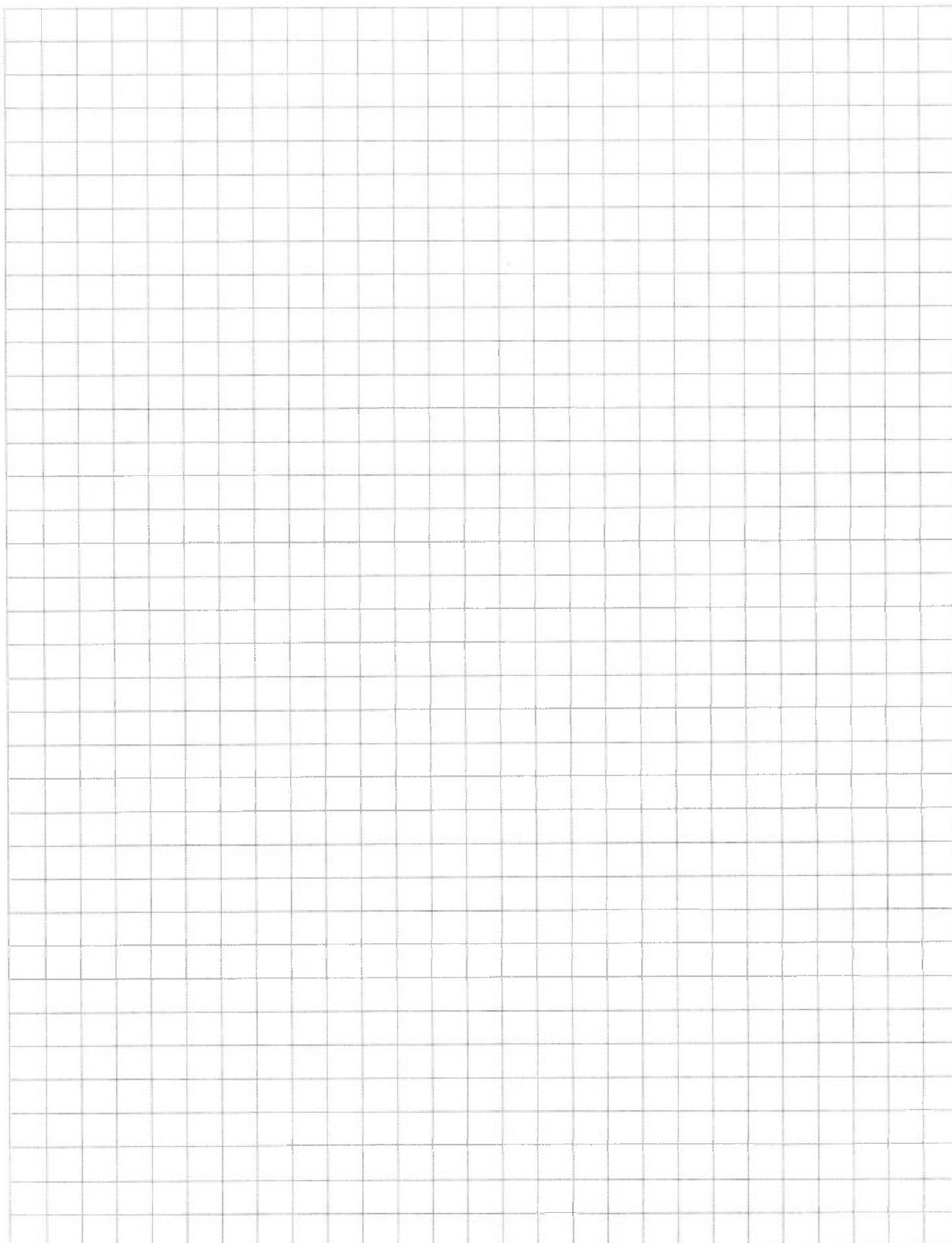
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 1$$

$$\sin 2x = 2\sin^2 x - 1$$

$$\cos 2x + 6\cos x = 3\cos 2x + p$$

2x

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2}$$

$$\cos 6\cos^2 x - 3$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(3x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x =$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \left(-\frac{1}{1}\right)$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2(1 - \cos^2 x) \cos x =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2 + 2\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x = 3(2\cos^2 x - 1)$$

$$(a+b)(a^2+ab+b^2) =$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + b^3$$

$$\cos^2 x \cos x (4\cos^2 x - 3) = \cos x (2\cos 2x - 1) =$$

$$= \cos x (2\cos x \cos 2x - \cos x + 3\cos x)$$

$$2ab^2 + 2ab +$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x$$

$$- 3\sin^2 x$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x + 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = p$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x - 6\cos^2 x + 3 = p \quad 4\cos x (1 - \sin^2 x)$$

$$4 \cdot 25 + 9 - 64 + 3 = p$$

$$-4 - 3 \cdot 16 + 3 = -10$$

$$12t^2 + 3 - 12t = 0$$

4

$$4t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$p \in [-10; 4]$$

$$(2t-1)^2 = 0$$

$$4 \cdot \frac{1}{8} + 3 - \frac{3}{2} + \frac{6}{4} + 3$$

$$(a+b)^3$$

$$a^3 + 3a^2b$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_4 \cdot q^8 = b_{12} \Rightarrow q^8 = \frac{b_{12}}{b_4} \Rightarrow \text{очевидно, что } \boxed{x-3 \neq 0}$$

$$q^8 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = (x-3)^2 \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{x-3}$$

$$b_{10} = b_4 \cdot q^6 = \left(\sqrt[4]{x-3} \right)^6 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt[4]{(x-3)^3} = \sqrt{15x+6}$$

$$\sqrt{15x+6} = x+4$$

$$15x+6 = (x+4)^2 \quad \boxed{x+4 \geq 0}$$

$$15x+6 = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-5)(x-2) = 0$$

$$\begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x =$$

8

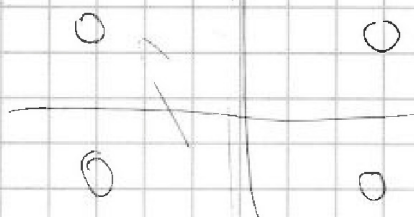
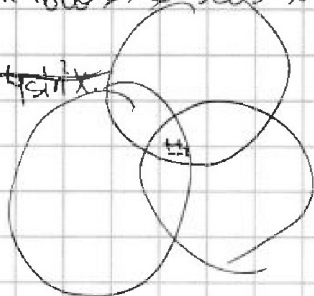
$$\sin 3x + \cos x = 2 \cos 2x + 1$$

$$\sin 3x = \sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x$$

$$\sin 3x = \sin x (2 - 2\sin^2 x) + 2 \sin x (1 - \sin^2 x)$$

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\sin 3x = 4 \sin x$$



$$a + b + c - ab - bc - ac + abc$$

$$150 \cdot 100$$

$$150 \cdot 100$$

15

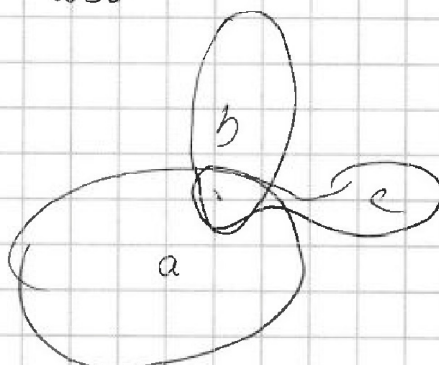
$$C_{150 \cdot 100}^4$$

$$C_n^4$$

$$C_n^k$$

$$3 C_{150 \cdot 100}^4 - C_{150 \cdot 50}^4$$

15



$$a + b + c - 2abc =$$

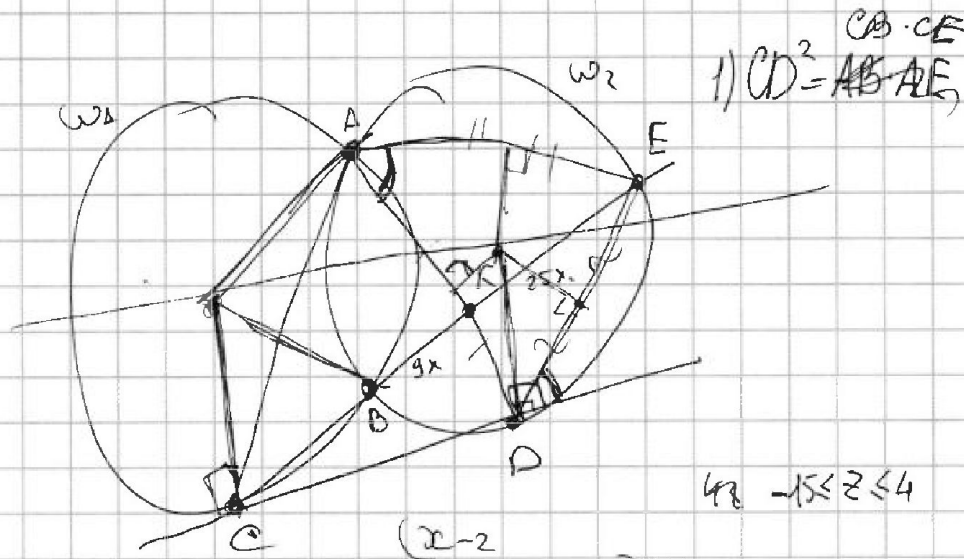
$$= 3 C_{150 \cdot 100}^4 - 2 C_{150 \cdot 50}^4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} = a^3 + 2a^2b + ab^2 +$$

$$\sqrt{7+x} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(7+x)(5-x)}$$

$$\sqrt{12-t} - \sqrt{t} + 6 = 2\sqrt{(12-t)t}$$

$$(\sqrt{12-t} - \sqrt{t})^2 - 12$$

$$12 - (\sqrt{12-t} - \sqrt{t})^2 = K$$

$$r + b = 12 - K^2$$

$$K^2 + K - 6 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$\frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$K_1 = -3$$

$$K_2 = 2$$

$$\sqrt{12-t} - \sqrt{t} = 2$$

$$12 - t = t + 4 + 4\sqrt{t}$$

$$2n^2 - 8 + 4n = 0$$

$$D = 16 + 64$$

$$\frac{\sqrt{80-4n}}{4} = \sqrt{5-2n}$$