



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Член арифметической прогрессии $a_i = a_0 + d(i-1)$ d - разность прогрессии

$$\Rightarrow (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + 2d$$

Также $3x^2 = 3x + 3 + 6d \quad | :3$

$$x^2 = x + 1 + 2d$$

$$2d = x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + x^2 - x - 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - x^2 + x - 3 + 1 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0^*$$

Заметим, что $x = -1$ обращает выражение в верное равенство $\Rightarrow -1$ - один из корней

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -3x^3 + 3x^2 \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | x+1 \\ \hline x^3 + 3x^2 - 2 \end{array} \quad * (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 3x^2 \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

Заметим, что при $x = -1$ $x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$ разделим это выражение на $x+1$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ 2x^2 + 0x \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | x+1 \\ \hline x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 0x \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$* (x+1)^2 (x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x \in \{-1; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$$

Ответ: $-1; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$|x - 3y| \leq 3$ - область на координатной плоскости, ограниченная

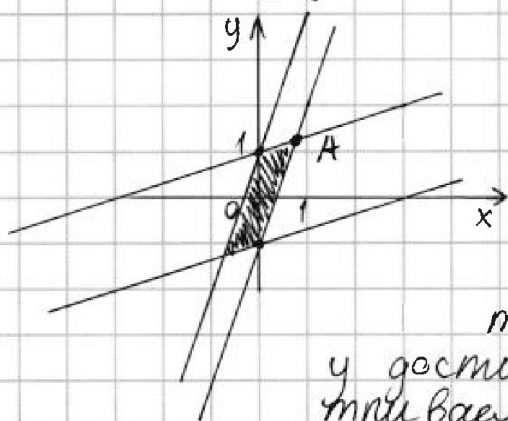
прямыми с уравнениями

$$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \quad \text{и} \quad x - 3y = 3 \\ \downarrow & \qquad \qquad \downarrow \\ x + 3 &= 3y \\ \downarrow & \qquad \qquad \downarrow \\ y &= \frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{3}x - 1$$

Аналогично с $|3x - y| \leq 1$: это область между прямыми $y = 3x - 1$ и $y = 3x + 1$

По условию дана система $\Rightarrow$ оба условия выполняются одновременно $\Rightarrow$ надо найти и рассмотреть пересечение двух областей.



Заметим, что значение выражения $4y + 8x$ больше, чем y и x

$\Rightarrow$ заметим, что в точке A (на картинке) x и y достигают максимума (рассмотрим выделенную область)

$\Rightarrow$ найдём координаты точки A:

$$y = 3x - 1 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{3}x + 1 \quad \Rightarrow \quad 3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1; \quad \frac{8}{3}x = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow 4y + 8x = 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Если (m, n) - решение, то и (n, m) тоже решение

~~$$\text{Пусть } B = 13p^2 \Rightarrow mn(m+n-3) = 13p^2$$~~

Пусть $A = 13p^2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot p \cdot p$

	$m+n$	$m+n-9$
1)	1	$13p^2$
2)	13	$p \cdot p$
3)	$13p$	p
4)	$p \cdot p$	13
5)	$13p^2$	1
6)	p	$13p$

1) $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m+n \geq 2$, а $m+n=1$ $\textcircled{\text{W}}$

2) $m+n=13 \Rightarrow m+n-9 = 13-9=4$
 $\Rightarrow 13 \cdot 4 = 13p^2 \Rightarrow p=2$

$$\Rightarrow mn(m+n-3) = mn(13-3) = 10mn = 75q^2$$

$\Rightarrow mn = 30 \Rightarrow$ если такие m и n существуют, то они корни ур-я $x^2 - (m+n)x + mn = 0$:
откуда m и n это 10 и 3 и $q=2$

3) $m+n=13p$
 $\Rightarrow (m+n) - (m+n-9) = 9 = 12p \Rightarrow p = \frac{9}{12}$
 p - не простое $\textcircled{\text{W}}$

4) $m+n-9=13$
 $\Rightarrow m+n=22 \Rightarrow mn(22-3) = 19mn = 75q^2$

$$19mn = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2 \Rightarrow q=19 \Rightarrow mn = 3 \cdot 5^2 \cdot 19$$

Если m и n существуют, то это корни ур-я $x^2 - (m+n)x + mn = 0$
 $\Delta = 22^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19 < 0$
 $\Rightarrow$ таких m и n нет

5) $m+n-9=1 \Rightarrow m+n=10 = 13p^2$ $p = \sqrt{\frac{10}{13}}$ - не простое $\textcircled{\text{W}}$

6) $m+n=p$ $m+n-9=13p \Rightarrow (m+n-9) - (m+n) = -9 = 12p$
 $\Rightarrow p = -\frac{9}{12} < 0$ - не простое $\textcircled{\text{W}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $B = 13p^2 \Rightarrow mn(m+n-3) = 13p^2$

Пусть $m=1$ (m и n взаимно простые $\Rightarrow$ можно рассмотреть один вариант)

$\Rightarrow n(n-2) = 13p^2 > 0$
 $\Rightarrow$ ~~также~~ $n > 2$

	n	$n-2$
1)	13	p^2
2)	$13p$	p
3)	p^2	13
4)	p	$13p$

1) $n(n-2) = 13 \cdot 11 = 13p^2$
 $p = \pm\sqrt{11}$ - не прост. число $\textcircled{\times}$

2) $n = 13p$ $n-2 = p$
 $\Rightarrow n - n + 2 = 2 = 12p$
 $p = \frac{1}{6}$ - не простое $\textcircled{\times}$

4) $n = p$ $n-2 = 13p$
 $n-2 - n = -2 = 12p$
 $p = -\frac{2}{12} < 0$ - не простое $\textcircled{\times}$

3) $n-2 = 13 \Rightarrow n = 15$
 $\Rightarrow n(n-2) = 15 \cdot 13 = 13p^2$
 $\Rightarrow p = \pm\sqrt{15}$ - не простое $\textcircled{\times}$

$\Rightarrow m > 1 \Rightarrow n > 1$

Пусть $m+n-3 = 1 \Rightarrow m+n = 4 \Rightarrow$ т.к. m и $n \in \mathbb{N}$,

то $mn = 3$ или $mn = 4 \Rightarrow 13p^2 = 3 \Rightarrow p$ - не прост. число $\textcircled{\times}$

или $13p^2 = 4 \Rightarrow p$ - не прост. число $\textcircled{\times}$

$\Rightarrow m+n-3 > 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Дорча QR-кода недопустима!

Рассмотрим все варианты m
(n можно не рассматривать, т.к. m и n
взаимозаменяемые)

$$m \neq n \quad 1) \quad m = 13 \Rightarrow n = (13 + n - 3) \cancel{= p} = p$$

$$0 = 10 \quad (\text{X})$$

$$2) \quad m = p \Rightarrow$$

$$a) \quad n = 13$$

$$\Rightarrow m = (13 + m - 3) = p$$

$$0 = 10 \quad (\text{X})$$

$$b) \quad n = p \Rightarrow m + n - 3 = 13$$

$$\Rightarrow m + n = 16 = 2p \Rightarrow p = 8$$

p - не простое
(X)

$\Rightarrow$ есть только 2 решения:
(10; 3) и (3; 10)

Ответ: (10; 3) и (3; 10)

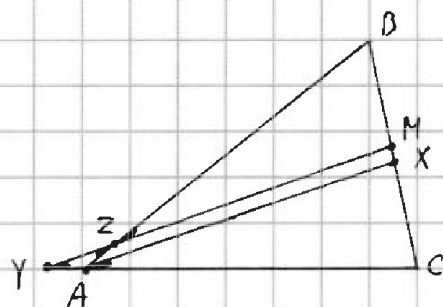


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AX \parallel YM, AZ$ - секущая

$\Rightarrow \angle XAB = \angle YZA$
как какрест лежащие углы

$AX \parallel YM, AY$ - секущая $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ZYA = \angle XAC = \angle XAB$ как
(AX - бисс.) соответ. углы

$\Rightarrow \triangle YAZ$ - равнобедр. $\Rightarrow YA = AZ = 6$

Запишем теорему Чева для $\triangle ABC$ и секущей YM :

$$\frac{YA}{YC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = 1 \quad CM = MB \text{ (M - основание медианы)}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{6+18} \cdot \frac{BZ}{6} = 1 \Rightarrow BZ = 24$$

$\Rightarrow AB = 30$. Пусть $\angle CAH = \alpha \Rightarrow$ найдем $\cos \alpha$

из $\triangle YAZ$: $\cos \alpha = \frac{YZ^2 + AZ^2 - YA^2}{2 \cdot YZ \cdot AZ} = \frac{8^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \cos \angle BAC = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2 \cdot 4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

Запишем теорему косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha = 18^2 + 30^2 + 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow BC = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $BC = 8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}^* \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2^{**} \end{cases}$$

$$^{**} x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$1) \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow 0 \leq x = y ; y \leq 6 \text{ т.к. } \sqrt{6-y} \text{ иначе не определен}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x = y \leq 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow 2\sqrt{6+5x-y^2} \geq 6$$

$$\sqrt{6+5x-y^2} = \sqrt{6+5x-x^2} \geq 3$$

$$\Rightarrow 6+5x-x^2 \geq 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 6 \leq -9$$

$$x^2 - 5x + 3 \leq 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow y, x \in \left[\frac{5-\sqrt{13}}{2} ; \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right]$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 - 2\sqrt{6+5x-x^2}^2 =$$

$$= x+1 + 6-x - 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

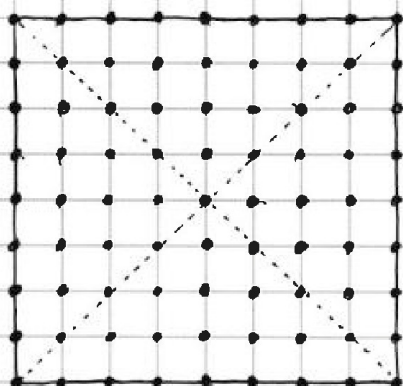


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Разобьем квадрат на 4 части как показано на картинке: некоторые узлы принадлежат только одной части, а некоторые - нескольким.

П.к. картинки, полученные переворотом считаются одинаковыми, то ~~первый узел для перекрашивания~~ можно сказать, что первый узел для перекрашивания находится в, например, в центральной четвертинке.

Если второй узел тоже находится в этой же четвертинке, то способов выбрать их $\frac{25 \cdot 24}{2}$ способов

Если второй узел находится не в этой же четвертинке, то он не должен соприкасаться с этой четвертинкой никак $\Rightarrow$ способов выбрать его - 56. Но тогда первый узел должен принадлежать только одной четвертинке $\Rightarrow$ способов выбрать его только 16 $\Rightarrow$ всего способов $16 \cdot 56$

$\Rightarrow$ ~~есть~~ суммарно число способов $16 \cdot 56 + \frac{25 \cdot 24}{2} = 1196$.

Ответ: 1196 способов



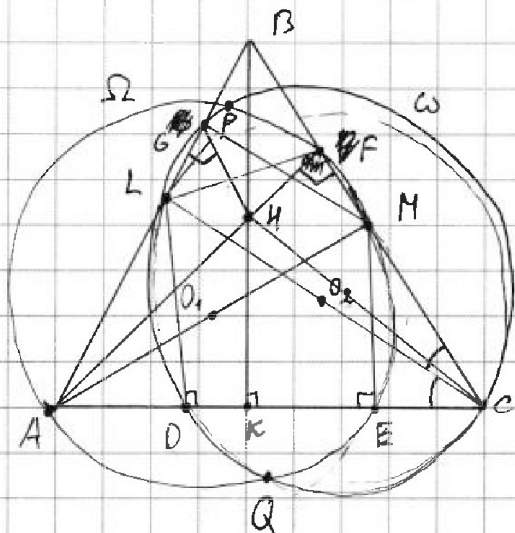
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle LDC$ опир. на диаметр

$\Rightarrow$ он прямой.

Аналогично $\angle AEM =$

$$= \angle AFM = \angle CPF = 90^\circ$$

$\Rightarrow CP, AF$ - высоты $\triangle ABC$

PQ - радикальная ось окружностей Ω и $\omega \Rightarrow O_1O_2 \perp PQ$

По условию $PQ \parallel BK, BK \perp AC \Rightarrow O_1O_2 \perp AC$

$\Rightarrow$ так по т. Фалеса $LM \parallel AC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

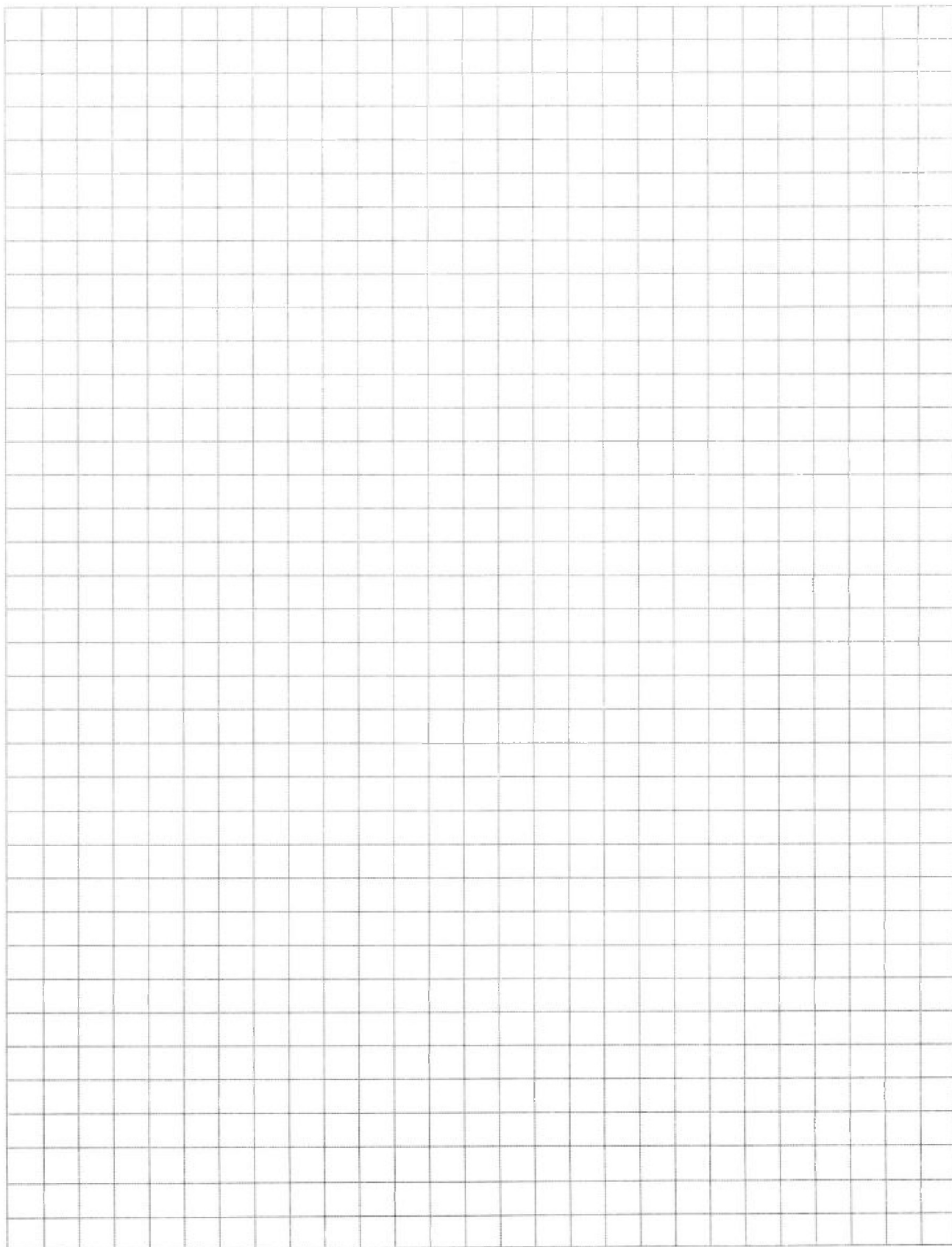
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{8^2 + 6^2 - 6^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{8^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$(x^2 + 2x)^2 = 3x + 2d + 3 \quad x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + 2d$$

$$\frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$3x^2 = 3x + 3 + 2d$$

$$x^2 - x - 1 = 2d$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + x^2 \cdot x - 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(3 \pm 3y) \leq 3$$

$$13.4$$

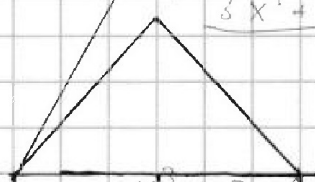
$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \mid x+1$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ -(3x^3 + 3x^2) \\ \hline 0 - 2x - 2 \\ -(-2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$



$$x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \mid x+1$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline 2x^2 + 0x - 2 \\ -(2x^2 + 2x) \\ \hline -2x - 2 \\ -(-2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$4 \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 1.5 = 6.5$$

$$x^2 + 2x - 2 \quad x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$D = 4 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$y = 3 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

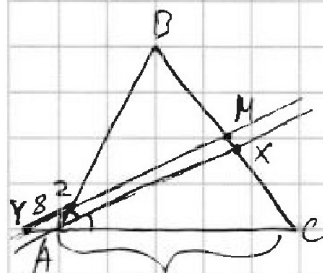
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|x - 3y| < 3$$

$$|3x - y| \leq 1$$

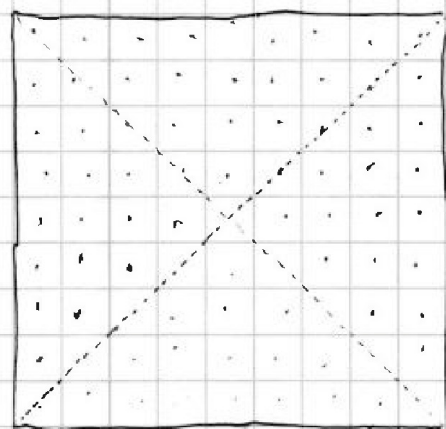
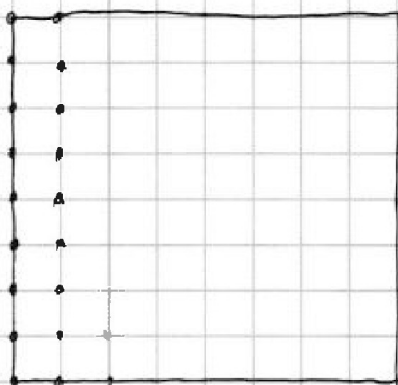
$$4 \geq |x - 3y| + |3x - y| \geq |4x - 4y|$$

$$1 \geq |x - y|$$



$$AZ = 6$$

$$YZ = 8$$



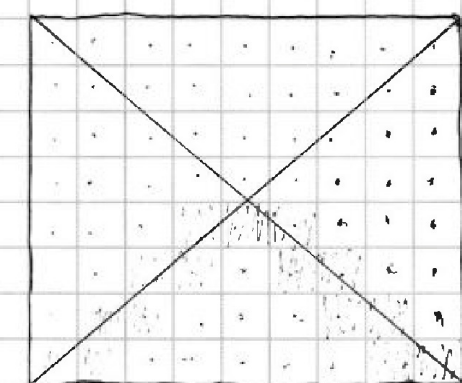
$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 5 \\ \hline 80 \\ + 80 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 12 \\ \hline 50 \\ + 250 \\ \hline 300 \end{array}$$

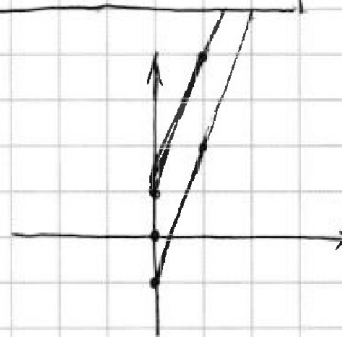
$$1196$$

$$\begin{array}{r} 9 \times 16 = 144 \\ 5 \times 16 = 80 \\ 3 \times 16 = 48 \\ 1 \times 16 = 16 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \cdot 24 \\ 2 \oplus \\ \hline 16 \cdot 56 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 12 \cdot 11 \\ 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \cdot 23 \\ 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \cdot 9 \\ \hline \end{array}$$



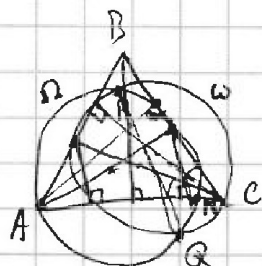


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = 13p^2 = 13 \cdot p \cdot p$$

$$mn(m+n-3) = 45q^2 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q$$

$$m+n \mid (m+n)^2 - 9(m+n) = 13p^2$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2 = 13 \cdot p \cdot p$$

$$\frac{45q^2 - 6mn}{3} = \frac{mn(m+n-9)}{3}$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot p \cdot p$$

$$mn(m+n-3) = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow 0 \leq x = y \leq 6$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \Rightarrow -x+4+y=0$$

$$y = x-4$$

$$6+5x-x^2 \geq 36$$

$$x^2 - 5x - 6 \leq -36$$

$$m+n-9$$

$$m+n-m-n+9$$

$$9 = 13p \cdot p$$

$$= 12p$$

$$p = -12p$$

$$mn(m+n-9)$$

$$x^2 - 5x + 30 \leq 0$$

$$13+9=22$$

$$m+n=22$$

$$mn = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 9$$

$$mn = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 19$$

$$15 \cdot 19 \cdot 5$$

$$m+n=22$$

$$m+n \mid 13$$

$$m+n-9 \mid 13$$

$$m+n-3 \mid 13$$

$$m+n \quad m+n-9$$

$$13 \quad pp$$

$$13p \quad p$$

$$pp \quad 13$$

$$p \quad 13p$$

$$13-9=4$$

$$p=2$$

$$10mn = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 9$$

$$mn = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

$$m+n=13$$

$$15 \cdot 2 \quad 10 \quad 3$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$0 \leq y \leq 6$$

$$1 \leq x$$

$$6 + 5x - y^2 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 1344 \\ \times 13 \\ \hline 144 \\ 1344 \\ \hline 17472 \end{array}$$

$$1344 \sqrt{2} = 642 \sqrt{2}$$

$$m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3) = 13p^2$$

$$m = 13$$

$$m = p$$

$$\begin{aligned} n &= p = 13 + n - 3 \\ 0 &= 10 \text{ (W)} \\ n &= 13 \\ m &= m + 13 - 3 = m + 10 \\ n &= p = 13 \\ \Rightarrow m + n - 3 &= 13 \\ m + n &= 16 \\ m &= 8 = n \end{aligned}$$

$$mn(m+n-3) = 459^2$$

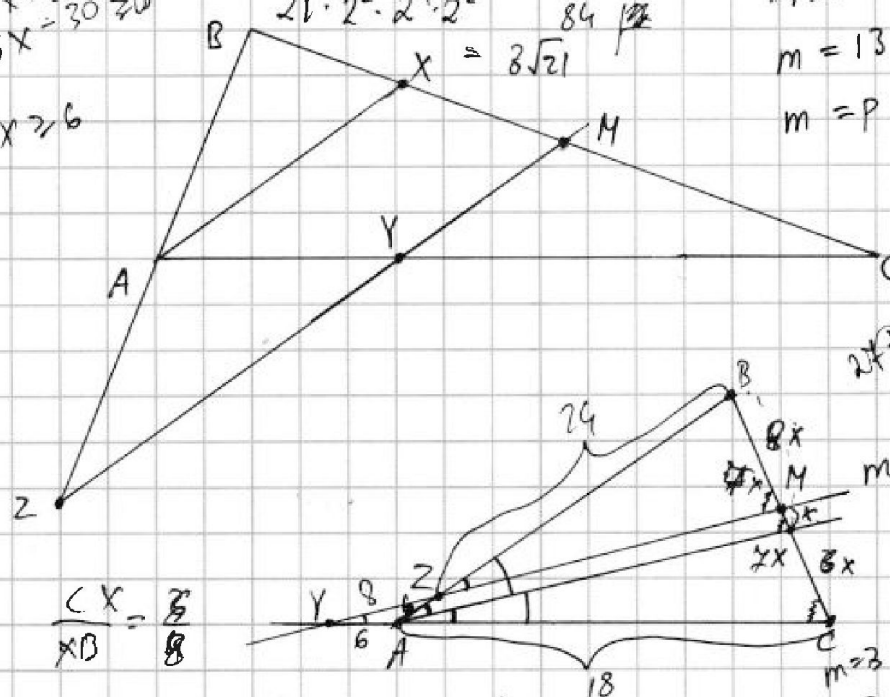
$$mn(m+n-3) = 3 \cdot 5 \cdot 59^2$$

$$m^2(2m-1) = 459^2$$

$$3 \cdot 5^2 = m^2(2m-1)$$

$$m = 3$$

$$m = 13p^2 = 25 \cdot 9$$



$$\frac{CX}{XB} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{AZ} = 1$$

$$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{BZ}{AZ} = 1$$

$$\frac{24 \cdot 8x}{12 \cdot 8x} = \frac{30 \cdot 4x}{15 \cdot 4x}$$

$$12 \cdot 8$$

$$\frac{6}{6+18}$$

$$\frac{6}{24}$$

$$\frac{BZ}{AZ} = 1$$

$$BZ = 24$$

$$\begin{aligned} m^2 + 2mn - n^2 - 9m - 9n &= 13p^2 \\ (m+n-3)(m+n-3) &= 13p^2 \\ m^2 + mn - 3m + nm + n^2 - 3n - 3m - 3n &= 13p^2 \\ m^2 + 2mn + n^2 - 6m - 6n + 9 &= 13p^2 \end{aligned}$$