МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12-12x$, четвёртый член равен $(x^2+4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x+5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x-3y| \leqslant 6, \\ |3x-2y| \leqslant 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 6$, $AN = 5$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a_1 = 12 - 11x$

$a_4 = (x^2+4x)^2$

$a_3 = -6x^2$

из пр. арифм. прогрессии

$\frac{a_4 - a_3}{a_4 - a_1} = 3 \Rightarrow \frac{-6x^2 - 12 + 11x}{(x^2+4x)^2 - 12 + 11x}$

$\Rightarrow \cancel{3}((x^2+4x)^2 - 12 + 11x) = \underset{-2}{\cancel{-6}}(x^2 - 2x + 1)$

$x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 12 + 44x = -2x^2 + 4x - 4$

$\Rightarrow x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$

$x(x^3 + 8x^2 + 18x) = 8$

$x(x^3 + 8x^2 + 16x + 2x + 8) = 8$

$x(x+4)x(x+4) + 2(x+4) = 8$

$\Rightarrow x((x(x+4)+2)(x+4) = 8$

$x(x^2+4x+2)(x+4) = 8$

$x(x+4)\ (x(x+4)+2) = 8$

$\Rightarrow x(x+4) = a$

$a(a+2) = 8$

$a^2 + 2a - 8 = 0$

$(a+4)(a-2) = 0$

$a = -4$; $a = 2$

$x(x+4) = -4$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$x = -2$

$x(x+4) = 2$

$x^2 + 4x - 2 = 0$

$x = x_1 = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$

оцен. при знаке x_1

$a_4 - a_1 \neq 0$, $a_4 - a_1 \neq 0$

$12 - 11x = 36$

$(x^2+4x)^2 = 16$

$-6x^2 = -24$

$\boxed{\text{Ответ: } x = -2;\ x = -2 \pm \sqrt{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Для построения обл. графика функции

$|2x-3y| \le 6$ и $|3x-2y| \le 4$ эквив.

найдем гр.-ние $|2x-3y|=6$

1) $2x \ge 3y \Rightarrow 2x-3y=6$

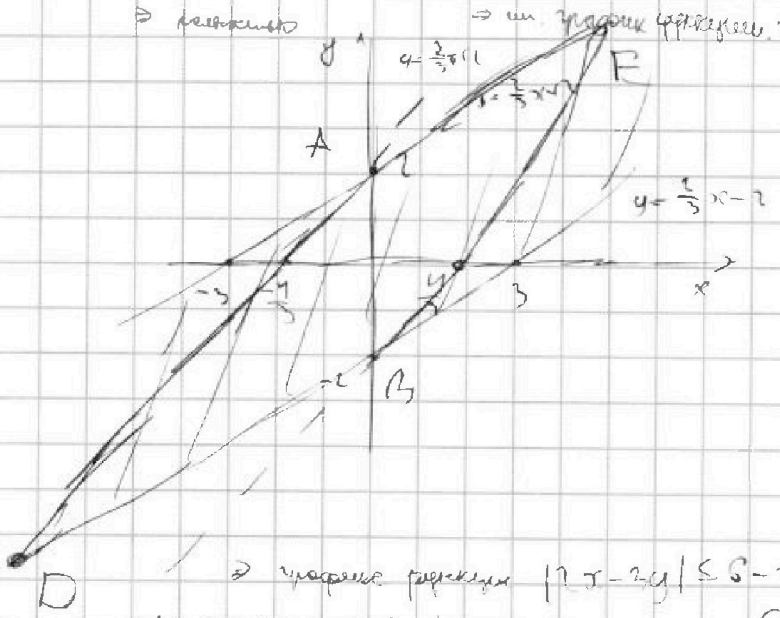
$y=\frac{2}{3}x-2$

при любом x

$y \ge \frac{2}{3}x$

$\Rightarrow$ полуплоскость

$\Rightarrow$ см. график функции:



2) $2x \le 3y \Rightarrow 2x-3y=-6$

$y=\frac{2}{3}x+2$ при $\forall x$, $x \le \frac{3}{2}y$

$\Rightarrow$ полуплоскость

$\Rightarrow$ Фигура гр. $|2x-3y|=6$ делит пл-ость на три части, эти части будут

$\Rightarrow$ при x сохранение знака ≥ 6, ≤ 6, $\Leftrightarrow (|2x-3y| \vee 6)$

на гр. $\Rightarrow$ при $x=0$; $y=3$

$|2x-3y|=9 \ge 6 \Rightarrow$

в верхней части $|2x-3y| \ge 6$

(внешняя прямая)

$\Rightarrow$ график решения $|2x-3y| \le 6$ – прямоугольник часть между двумя гр., аналогично для $|3x-2y| \le 4$, ее гр.: $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x-1 \\ y=\frac{2}{3}x-2 \end{cases}$ при $x=0$; $y=3$,

$|3x-2y|=6 > 4 \Rightarrow$ гр. функции $|3x-2y| \le 4 \to$ часть между прямыми.

Координаты всех точек на см. графике когда эти две прямые пересекаются в чем искать: DEAB, $A=(0;2)$ $B=(0;-2)$

D: найдем коорд. D: $\frac{3}{2}x+1=\frac{2}{3}x-2 \Rightarrow \frac{9-4}{6}x=-4 \Rightarrow x=\frac{-24}{5}$, $y=\frac{-72}{10}+2=\frac{-52}{10}=-\frac{26}{5}$

E: $x=\frac{24}{5}$, $y=\frac{52}{10}=\frac{26}{5}$ $\Rightarrow$

отв. AOBE – #

Все точки внутри пл-ди – и есть график ф. $\begin{cases} |2x-3y| \le 6 \\ |3x-2y| \le 4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ в отв. в т. D, x и y минимальны $\Rightarrow$ min и min $10x+5y$

$\Rightarrow$ min $10x+5y=-52-26=\boxed{-78}$ Ответ: -78

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(m, n)

$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26 = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n+13)(m-2n)$

$B = m^2 n - 2mn^2 - 2mn$ $\quad 17p^2, 15q^2 \quad p$ и q - пр.

$\parallel$

$mn(m-2n-2)$

$\Rightarrow A = (m-2n+13)(m-2n)$

$B = mn(m-2n-2)$ $\quad$ пр. $B = 15q^2 \,/\, 17p^2$

но - полн. $\Rightarrow$ м. б. m и n - нат.

$m > 2n+2, \Rightarrow m-2n > 2$, сделаем замену $m-2n = x$

$\Rightarrow A = (x+13)x = 15q^2 \,|\, 17p^2$ $\quad$ и p и q простые; и $x+13 > x$

у меньше 3.

1) $x+13 = 15q^2$
$x = 1$ X q - нат.

2) $x+13 = 17p^2$
$x = x = 1$
X p - нат.

3) $x+13 = 17p$
$x = p$
$\Rightarrow \frac{x+13}{x} = 17$
$\Rightarrow x = \frac{13}{16}$ - не нат. из $m-2n$ - целое

4) $x+13 = 15q$
$x = q$
$\Rightarrow \frac{x+13}{x} = 15$
$x = \frac{13}{14}$ - не нат. из $m-2n$ - целое.

5) $x+13 = 17$
$x = p^2$
$\Rightarrow x = 4$
$p = 2$ ✓
~~$\Rightarrow m-2n = 4$~~
рассмотрим нижн. сл. отдельно

6) $x+13 = 15$
$x = q^2$
$x = 1$
$\Rightarrow q$ - нат.

7) $x+13 = p^2$
$x = 17$
$\Rightarrow p^2 = 30$ X

8) $x+13 = q^2$
$x = 15$
$p^2 = 28$ X

$\Rightarrow$ нижн. меньше сл.

$p = 2, \quad x = 4 = m-2n$

$\Rightarrow (m-2n)(m-2n+13) = 17 \cdot 4$
$= 17 \cdot 2^2,$

тогда, $m-2n = 4$

$2mn = 15q^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow m = 2n+4$

$2(2n+4)n = 15q^2$

т.к. q - нечет., либо q - нечет. и тогда $2(2n+4)n$ - нечет. ✗

либо $q=2$

$\Rightarrow 2(2n+4)n = 60$

$4n^2+8n-60=0$

$n^2+2n-15=0$

$\Rightarrow (n+5)(n-3)=0$

т.к. n - нат

$n=3, \Rightarrow m=10$

$\Rightarrow A=(m-2n)(m-2n+13) = 4\cdot 17 = 2^2\cdot 17$

$B = m(m-2n-2) = 10\cdot 3(4-2) = 60 = 15\cdot 2^2$

Ответ: $\boxed{\begin{matrix} m=10 \\ n=3 \end{matrix}}$

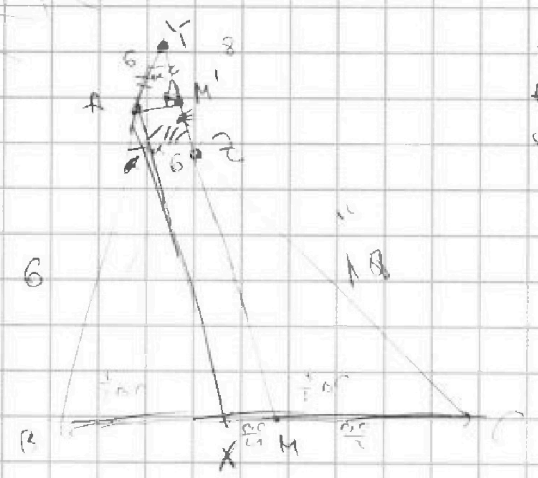
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

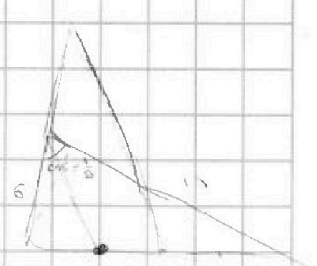
№4



$AC = 8$

$AZ = 6$

$YZ = 8$



AX - бисс $\Rightarrow \angle BAX = \angle CAX = \alpha$, т.к. $MZ \parallel AX$, $\angle ZAX = \angle AZX = \alpha$

$\Rightarrow \angle AYZ = \angle BAX = \alpha \Rightarrow AZX$ - р.б., M' - середина YZ, т.к. AZX - р.б.

$\Rightarrow AM'$ - высота в $\triangle AYZ \Rightarrow AY = 2YM'$, $YM' = AY \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow 4 = 6 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \boxed{\frac{1}{9}}$

$\boxed{\frac{1}{9}}$, тогда $\frac{AZ}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CZ}{AC} = \frac{2}{3}$, т.к. $ZM \parallel AX$, $\frac{MC}{CX} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CM}{CX}$

$MC = \frac{BC}{2} \Rightarrow \frac{BC}{2CX} = \frac{2}{3}$, $\frac{CM}{CX} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow CX = \frac{3}{4}BC \Rightarrow BX = \frac{1}{4}BC$

$\Rightarrow$ т.к. AX - бисс., $\frac{AB}{AC} = \frac{CX}{BX} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB = 6$

~~$\Rightarrow AB = AZ = AY = 6 \Rightarrow \angle BZY = 90^\circ \Rightarrow BC$~~ по т. cos

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha} = \sqrt{13^2 + 6^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 13 \cdot 6}$

$= \sqrt{13^2 + 6^2 + 24} = \sqrt{384} = \boxed{16\sqrt{3}}$

Ответ: $\boxed{16\sqrt{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{AM'' = \frac{AB \cdot AB'}{B'B} \Rightarrow \sqrt{(5+x)^2 - 4x^2} = \frac{6 \cdot \sqrt{(10+2x)^2 - 36}}{10+2x}} \quad \Big| \, n^2$$

$$\cancel{(5+x)^2 - 4x^2 = \frac{6 \cdot ((10+2x)^2 - 36)}{10+2x}}$$

$$\cancel{5+x=y}$$

$$\cancel{y^2 - 4(y-5)^2 = \frac{6(4y^2-36)}{(4y)^2}}$$

$$\cancel{n:5.}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}} \\ \cancel{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(x} \end{cases}$$

т.к. мно. $\sqrt[4]{3y}$ и $\sqrt[4]{3x}$, $x, y \geq 0$,

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x} + 4 = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt[4]{3y}$$

пусть $x \neq y$, все функции x^5, x^2, $\sqrt[4]{3x}$ ~~использовать на полож.~~

$\times$, $\Rightarrow$ при $x > y$, $2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x} > 2y^5 + 4y^2 + \sqrt[4]{3y}$

$\Rightarrow x \leq y$, аналогично $y \leq x \Rightarrow \boxed{x = y}$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\cancel{\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{(x+4)(3-x)}\right)}$$

$x \geq -4$
$x \leq 3$,

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+4)(3-x)} - 5 \quad \Big| \, n^2,$$

[учитывая в номере мн., мы ум. корни двем мрачно.

$$7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4(x+4)(3-x) - 20\sqrt{(x+4)(3-x)} + 25$$

$$\sqrt{(x+4)(3-x)} = a$$

$$7 - 2a = 4a^2 - 20a + 25$$

$$\overset{4}{2}\cancel{8}a^2 - \overset{18}{\cancel{22}}a + 18 = 0$$

$$\cancel{a^2 - a + 9 = 0}$$

$$\cancel{2a^2 - 9a + 9 = 0}$$

$$\cancel{a = 9 \pm \sqrt{36}}$$

$$a = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 8 \cdot 9}}{4}$$

$a = 3$ $\quad$ $a = \frac{3}{2}$

$$\cancel{a = 10 \pm \sqrt{(4a)^2 - 10(4a) + 72} = 0}$$

$$2a^2 - 9a + 9 = 0$$

$$\cancel{D = 1 \pm \sqrt{36}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) $\sqrt{(x+4)(3-x)} = 3 \Rightarrow 2\sqrt{(x+4)(3-x)} - 5 = 1 > 0$

$12 - x - x^2 = 9$

$x^2 + x - 3 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ осв. $x > -4$

~~1) $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x+4 = \frac{-1-\sqrt{13}+8}{2} = \frac{4-\sqrt{13}}{2}$~~

$3 - x = \frac{6+1+\sqrt{13}}{2} = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{3-x} > \sqrt{4+x} \Rightarrow \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} < 0$

$x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

т.к. $x > 0$, это осв., и, т.к. $\sqrt{16} < 5$, осв. $\boxed{x < 3}$

$\Rightarrow$ корень $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ $y = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

2) $\sqrt{(x+4)(3-x)} = \frac{3}{2}$, $\Rightarrow 2\sqrt{(x+4)(3-x)} - 5 = -2 < 0$

$(x+4)(3-x) = \frac{9}{4}$

$12 - x - x^2 = \frac{9}{4}$

$x^2 + x - \frac{27}{4} = 0$

$\sqrt{3-x} < \sqrt{4+x}$

$\Rightarrow 4x^2 + 4x - 27 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16\cdot 27}}{8}$

$= \frac{-4 \pm 4\sqrt{28}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{28}}{2}$

$\frac{-1+\sqrt{28}}{2} < 3$, $3 - \left(\frac{-1+\sqrt{28}}{2}\right) = \frac{7-\sqrt{28}}{2}$

$3 > 4 + \left(\frac{-1+\sqrt{28}}{2}\right) = \frac{7+\sqrt{28}}{2}$

т.к. $\frac{-1-\sqrt{28}}{2}$, осв. $3 - x > 4 + x$

т.к. $x < 0 \Rightarrow \times$

Итоговый ответ: $x = y = \frac{-1+\sqrt{28}}{2}$

$x = y = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

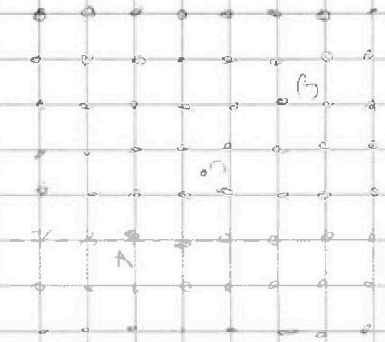
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

кол-во способов выбрать два цвета из 8 × 8 = 64 клеток у нас есть:

$C_{64}^2 = \frac{64 \cdot 63}{2}$, при этом мы не учли, что раскраски, получ. друг из друга поворотами (симметриями) эквив.



анализ центра симм. заметим, что если мы перекр. пару A B, то можем, что если A B и центр симметрии ~~симметрично перекрасить ее~~ 4 раза (4 раза 4 клетки повернули, если хоть центр симметрии на мы перекрасили 2 раза:

центр симм. пар: $\frac{64}{2 \cdot 2} = 16$ ⇒ (н.р. нужно выбрать одну из пары чтобы повернуть на 90° и получить (A, B) = пара (B, A))

⇒ ~~сколько~~ пусть несимм пар x

$= 4x + 16 \cdot 2 = C_{64}^2 \to x = \frac{C_{64}^2 - 32}{4}$

в ответ: $\frac{C_{64}^2 - 32}{4} + 16 = \frac{C_{64}^2}{4} + 8$

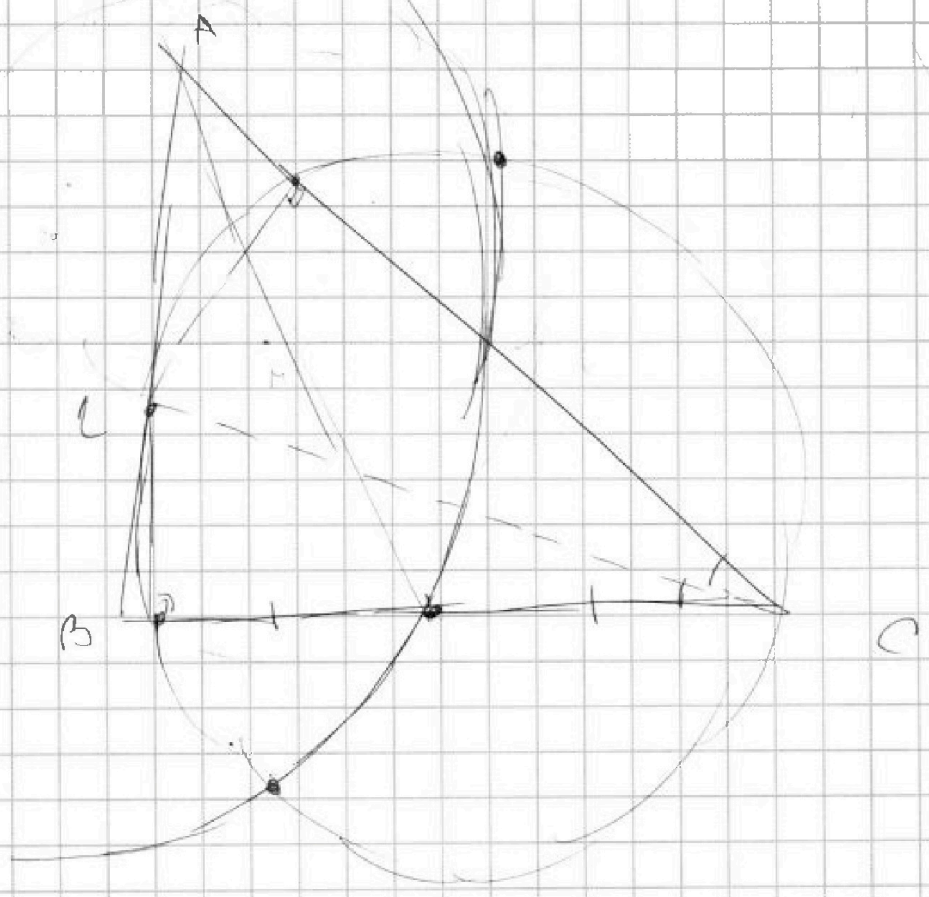
$= \frac{21 \cdot 63 + 8}{21^2 \cdot 3 + 8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

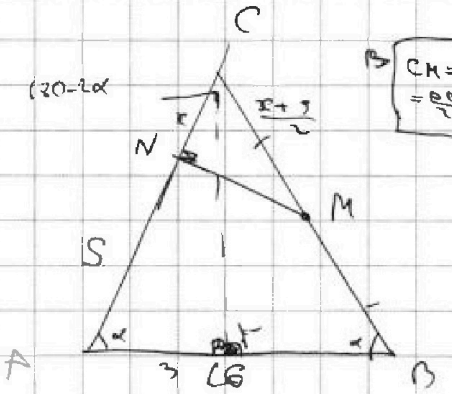
$AN = 5$ пусть $CN = x$

$AB = 6$

$\angle CNM = 90°$

CL – высота, медиана на AB

$\Rightarrow AL = 3$



$\Rightarrow CM = \frac{BC}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{5+x}{2}$

$\Rightarrow$ пусть $\angle CAB = \alpha$

$\Rightarrow \cos 2\alpha$

$\angle ACB = 180 - 2\alpha$

$\Downarrow$

$\cos\alpha = \frac{3}{x+5}$

$\cos(180-2\alpha) = \frac{2x}{x+5}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$= 2\frac{9}{(x+5)^2} - 1$

$\Rightarrow \cos 180 - 2\alpha = 1 - \frac{18}{(x+5)^2}$

$= \frac{2x}{x+5}$

$\Rightarrow \frac{2x}{x+5} = 1 - \frac{18}{(x+5)^2}$

$\frac{2x}{\cancel{x+5}} = \frac{(x+5)^2 - 18}{(x+5)\cancel{2}}$ $\quad x+5 \neq 0 \ (x>0) \Rightarrow$

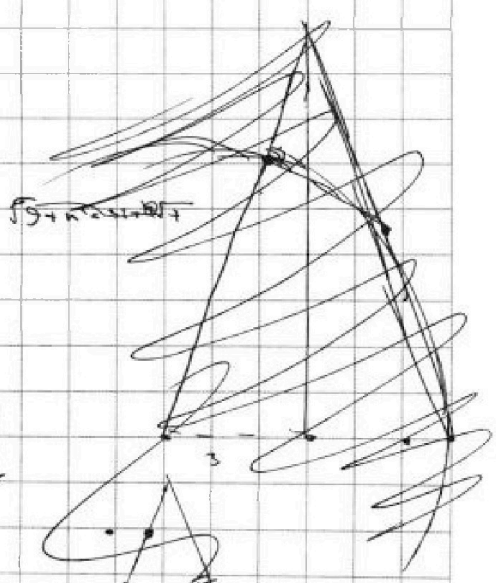
$2x = \frac{(x+5)^2 - 18}{x+5}$

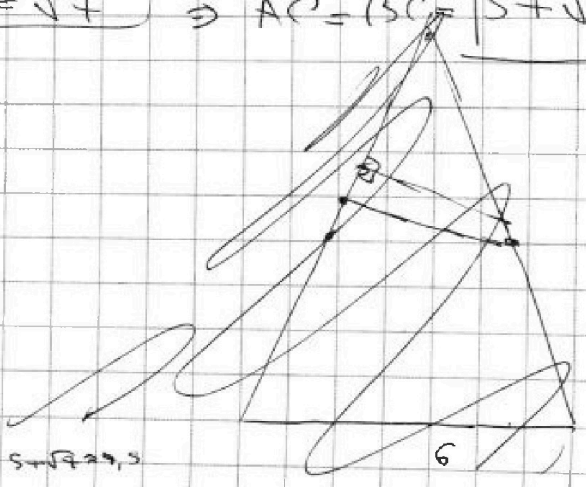
$2x(x+5) = (x+5)^2 - 18$

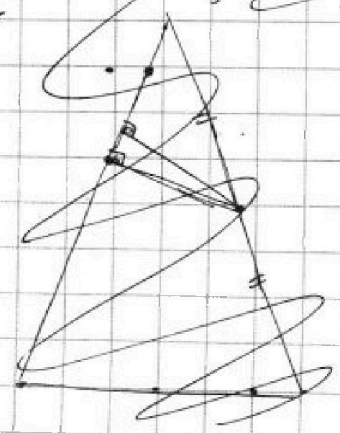
$2x^2 + \cancel{10x} = x^2 + \cancel{10x} + 7$

$x^2 = 7$

$\boxed{x = \sqrt{7}} \Rightarrow AC = BC = \boxed{5+\sqrt{7}}$





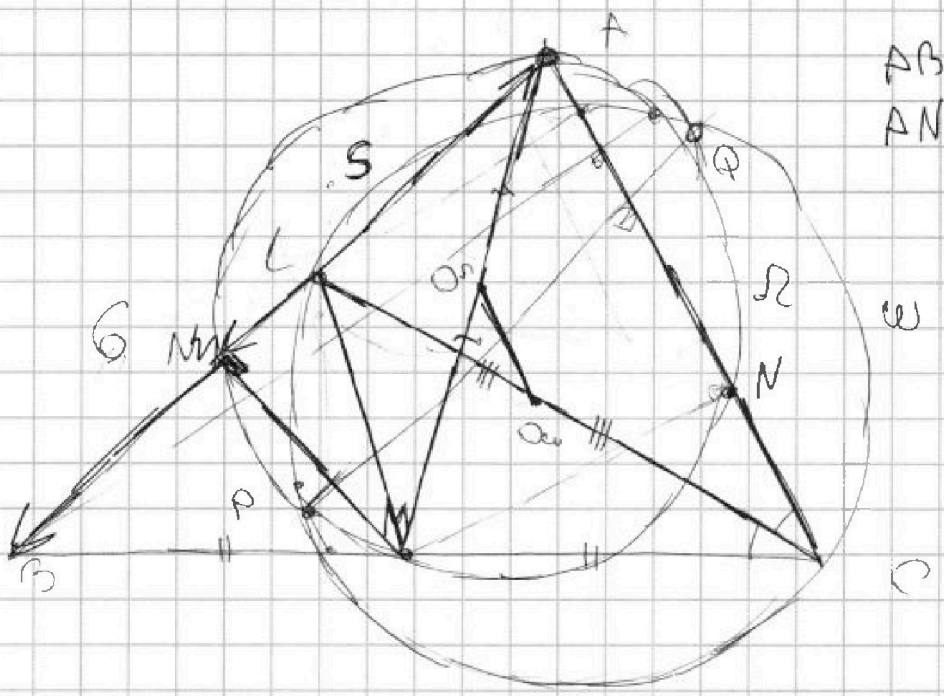


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

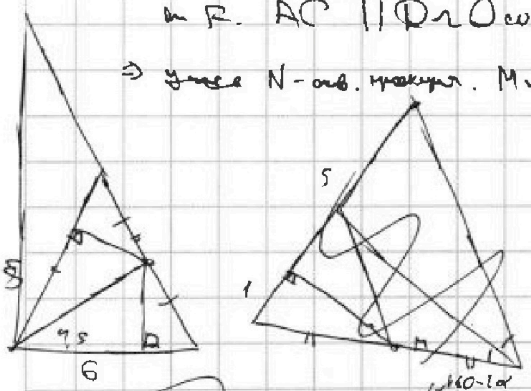
СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



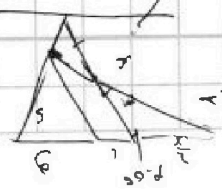
$AB = 6$
$AN = S$

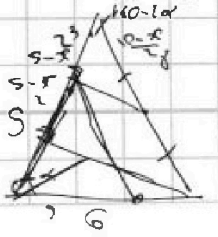
т.к. $PQ \parallel AB$, можно провести $\Omega\omega \perp$ под оси (ось симм. PQ)
$\Rightarrow O_\omega O_\Omega \perp$ все из B на $AC \Rightarrow O_\omega O_\Omega \parallel AC$, O_ω - сер. CL
O_Ω - сер. AM (т.к. это диаметры)
~~т.к.~~ рассмотрим вектора. $\overline{LM}$ и $\overline{CA}$, тогда, т.к. O_Ω, O_ω - сер. AM и LC соотв., $\overline{O_\omega O_\Omega} = \frac{\overline{AC} - \overline{LM}}{2}$ (из - фиг)
т.к. $\overline{AC} \parallel O_\Omega O_\omega$, из этого следует, что $LM \parallel AC$
$\Rightarrow$ ~~у нас~~ N - сер. прямых. M на AB, ~~перпендикуляр~~ т.к. M - сер BC и $LM \parallel AC$, L - сер. AB и CL - биссек
$\Rightarrow \triangle ABC$ - р/б $\Rightarrow BC = AC$, и AL - ~~высота~~:
$\Rightarrow$ ~~ось~~ $AN = 6$, S $AB = 6$.

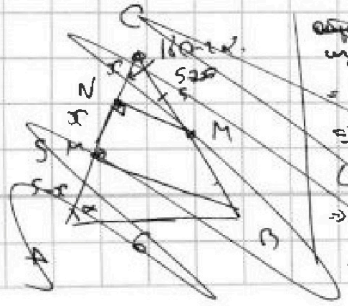


~~Опустим из B высоту BH, из свойств ср. линий CM = 2x, ⇒ AN = S, ⇒ AM = S - x~~
~~$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{S-x}{6}$~~
~~$\angle ACM = 180 - 2\alpha$~~
~~$\Rightarrow CN = x$, $CM = \frac{CA}{2} = \frac{S+x}{2}$~~
~~$\Rightarrow \cos 180 - 2\alpha = \frac{S-x}{2x}$~~ $\boxed{\frac{2x}{S+x}}$

$\frac{127\sqrt{x^2 + 8x + 16}}{} =$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$\max\limits_{x,y} (10x+5y)$

$$\begin{cases} |2x-3y| \le 6 \\ |3x-2y| \le 4 \end{cases}$$

1) $2 \le x \le \frac{3}{2}y$, напр.

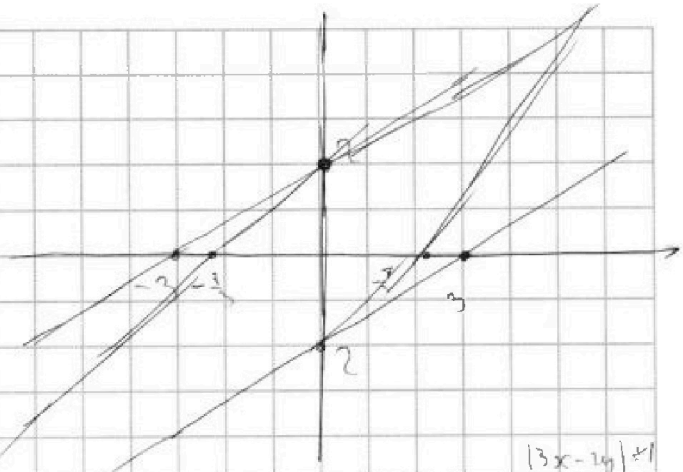
$|2x-3y| = 2x-3y$

$|3x-2y| \le 3x-2y$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x-2y \le 4 \\ 2x-3y \le 6 \end{cases} \Rightarrow x \le \frac{2y+4}{3}$

$y \ge \frac{3x-4}{2}$

$\Rightarrow \boxed{y \ge \frac{2x-6}{3}}$



$|3x-2y| \le 4$

$|2x-3y|$

$x \ge \frac{3}{2}y$

$3x-2y=4$

$\Rightarrow y = \frac{3x-4}{2}$

$\boxed{10x+5y \ge 10x + \frac{5}{2}\cdot(3x-4)}$

$\Rightarrow 17{,}5x - 10$

$\Rightarrow$ ~~при~~ $x=0$

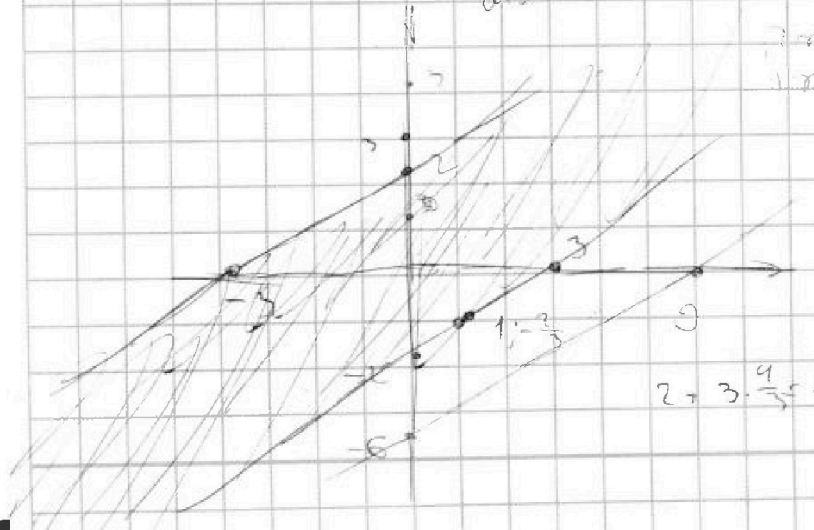
$\boxed{10x+5y \ge 10x + \frac{5}{3}(2x-6)}$

В общ. случае min при $x=0$, и равен -10

~~при этом справедливо, что $2x-3y \ge 0$~~

$3x-2y \ge 0$

$\Rightarrow$ ВСЕГДА точка



$|2x-3y| = 6$

$x \ge \frac{3}{2}y$

$x = \frac{2y-6}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$

$x \le \frac{3}{2}y$

$3x-2y-2x=6$

$y = \frac{2x-6}{3}$

$2 + 3\cdot\frac{4}{3} = 6$

$x=0$

$3=3$

$2x-3y$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

~~при вторем члене мы выразили~~ – k

$\Rightarrow$ 1 член – 2 член = $2k = (x^2+4x)^2 - 12 - 12x$

~~1 член – 2 член = 6k = $-6x^2 - (x^2+4x)^2 = -6x^2 - 12 + 12x$~~

$\Rightarrow \frac{4k}{2k} = 3 = \frac{\cancel{-6x^2 - (x^2+4x)^2} - 6x^2 - 12 + 12x}{(x^2+4x)^2 - 12 - 12x}$ ~~мусор знам $\neq 0$~~

$\cancel{2(x^4 + 16x^2 + 8x^3 - 12 - 12x) = -6x^2 - (x^4 + 16x^4 - 8x^3)}$

$\cancel{x^2(-6 - (x+4)^2)}$

$\cancel{-6x^2 + 12x - 12}$

$\cancel{-6(x^2 - 2x + 2)}$

$\Rightarrow$ $\cancel{3 = \frac{-6(x^2-2x+2)}{}}$

$(x^2+4x)^2 + 6x^2$

$= \cancel{x^4}\ x^2((x+4)^2 + 6)$

$= x^2(x^2 + 8x +$

$\cancel{11 - 2x^2}$

$\cancel{x^4 + x^2(x+4)^2}$

$\left(x^2 - \frac{8}{x^2}\right) + 8\left(x - \frac{1}{x}\right) + 18 = 0$

$\frac{-x^2 - 2x + 2}{x^2(-x^2 - 8x - 12)} = \cancel{\frac{3}{2}}\ \frac{-1}{-4}$

$-6x^2 - 12 + 12x = \cancel{6k}$

$= -6(x^2 - 2x + 2)$

$-4x^2 + 8x - 8 = \cancel{x^4} - x^4 - 8x^3 - 12x^2$

$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x - 8 = 0$

$= -6(x^2) - x^2(x+4)^2$

$= x^2(-6 - x^2 - 8x - 16)$

$= x^2(-x^2 - 8x - 22)$

$\frac{-6(x^2-2x+2)}{x^2(-x^2-8x-12)} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow -6(x^2 - 2x + 2)$

$-6x^2$

$= 6k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cos 180 - 2\alpha = -\cos 2\alpha$

$= -(2\cos^2\alpha - 1)$

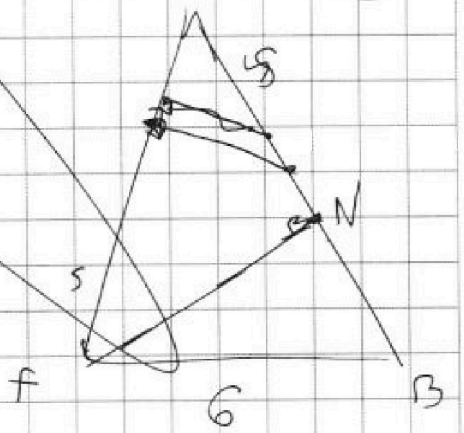
$= -\left(\frac{2(5-x)^2}{36} - 1\right)$

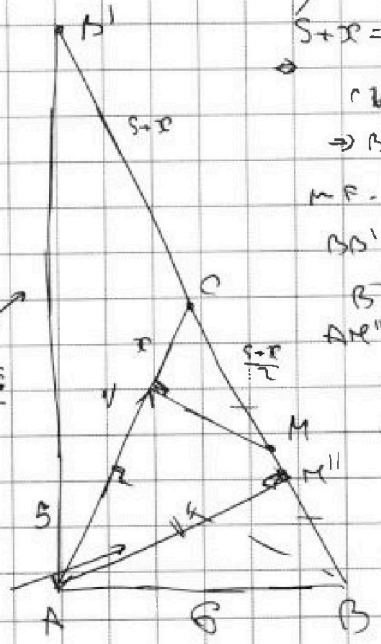
$= \left(1 - \frac{2(5-x)^2}{36}\right) = \frac{2x}{5+x}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{36 - 2(5-x)^2}{36} = \frac{2x}{5+x}$

$180 - 5x - 80(10+2x)(5-x)^2 = 72x$





$5+x = a$

$CN = x$

$\Rightarrow BC = 5+x$ продлим BC на свою дл. $\Rightarrow CB' = 5+x$

т.к. $CB = CA = CB'$, $\angle B'AB = 90°$

$BB' = 10+2x$, $AB = 6$,

$BA' =$

AM'' из сумм = все из B и из соотв. подобия

$= 2MN$, MN по теор. пифаг $= \sqrt{\frac{(5+x)^2}{4} - x^2}$

$\Rightarrow AM'' = \sqrt{(5+x)^2 - 4x^2}$

$AB' \overset{\text{пиф}}{=} \sqrt{(10+2x)^2 - 36}$

$\Rightarrow$ по изв. формуле для p прямоуг. Δ.

$\sqrt{x^2+10x+16}$

$2\sqrt{x^2+10x+16}$

$\sqrt{(5+x)^2 - 4x^2}$

$\frac{5+x}{2}$