



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Дано:

a - арифмет. прогр.

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = (-3x^2)$$

Решение:

$$1) a_7 = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

2) назовем P - разности нашей прогрессии

$$3) \text{ формула } a_7 = a_5 + 2P, a_{11} = a_5 + 6P, a_{11} = a_7 + 4P$$

$$4) a_{11} - a_7 = 4P : -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 4P$$

$$5) 2(a_7 - a_5) = 4P : 2(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18) = 4P$$

$$6) -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36$$

$$0 = 3x^4 - 24x^3 + 31x^2 - 12x - 36 \quad | :3$$

$$0 = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$$

$$0 = (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6)$$

$$0 = (x-2)(x-2)(x^2 - 4x - 3)$$

$$0 = (x-2)(x-2)(x-2)(x+1)$$

$$\text{корни } x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

7) Заметим, что $a_7 \geq 0, a_{11} \leq 0 \Rightarrow a_5 \geq 0$ т.к. арифмет. прогр. монотонна.

8) Подставим найден. $x : x_0 = 2; x_1 = 2 + \sqrt{7}; x_2 = 2 - \sqrt{7}$

Проверим x_0 :

$$a_5 = 30$$

$$a_7 = (4 - 8)^2 = 16$$

$$a_{11} = -3 \cdot 4 = -12$$

$$2P = 14 \Rightarrow P = 7$$

$$4P = -28 \Rightarrow P = -7$$

$$x = 2 - \text{не подходит}$$

x_1 :

$$a_5 = 12 + 6\sqrt{7} + 18 = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = (4 + 4\sqrt{7} + 7 - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 9$$

$$a_{11} = -3(4 + 4\sqrt{7} + 7) = -33 - 12\sqrt{7}$$

$$2P = -21 - 6\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 - 3\sqrt{7}$$

$$4P = -42 - 12\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 - 3\sqrt{7}$$

$$x = 2 + \sqrt{7} - \text{подходит}$$

x_2 :

$$a_5 = 12 - 6\sqrt{7} + 18 = 30 - 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = (4 - 4\sqrt{7} + 7 - 8 + 4\sqrt{7})^2 = 9$$

$$a_{11} = -3(4 - 4\sqrt{7} + 7) = -33 + 12\sqrt{7}$$

$$2P = -21 + 6\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 + 3\sqrt{7}$$

$$4P = -42 + 12\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 + 3\sqrt{7}$$

$$x = 2 - \sqrt{7} - \text{не подходит}$$

Ответ: $x = 2; x = 2 + \sqrt{7}; x = 2 - \sqrt{7}$ подходят.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Других корней нет т.к. все они дают не удов. П.4, 5, 6, а мы нашли все решения ур-ния из П.6. $\Rightarrow$ мы нашли все корни.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2:

Дано:

$$|4x - 3y| \leq 6$$

$$|3x - 4y| \leq 8$$

Найти:

$$14x + 7y - \min = ?$$

Решение:

1) Две параболы системы:

$$|4x - 3y| \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \\ 4x - 3y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 + \frac{3}{4}y \\ x \leq 1,5 + \frac{3}{4}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [-1,5 + \frac{3}{4}y; 1,5 + \frac{3}{4}y]$$

$$|3x - 4y| \leq 8 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y \geq -8 \\ 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \\ x \leq 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [-2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y; 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y]$$

$$\Downarrow$$

$$x \in \begin{cases} [-1,5 + \frac{3}{4}y; 1,5 + \frac{3}{4}y] \\ [-2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y; 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y] \end{cases} \quad (I)$$

2) $14x + 7y = 7(2x + y) \Rightarrow$ если мы хотим, чтобы выражение $14x + 7y$ было $\min$, то это будет выполняться при $2x + y - \min$ (II)

3) Найдем, для каких y может выполняться (I):

$$1,5 + \frac{3}{4}y \leq -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y$$

$$1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} = (\frac{4}{3} - \frac{3}{4})y \Rightarrow \frac{6}{4} + \frac{8}{3} = \frac{5}{12}y \Rightarrow \frac{18+32}{12} = \frac{5}{12}y \Rightarrow \frac{50}{12} = \frac{5}{12}y \Rightarrow y = \frac{50}{5} = 10$$

$$-1,5 + \frac{3}{4}y \leq 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \Rightarrow -\frac{6}{4} - \frac{8}{3} = \frac{5}{12}y \Rightarrow y = \frac{-50}{5} = -10$$

Мы знаем это ~~интервал~~, посмотрев на графики. $\Rightarrow y \in [-10; 10]$ (II)

4) Найдем, что для каждого значения y , выражение (I) явл. $\min$, при наименьшем x , наименьшей возможной x при y удобн (III)

$x = \max(-1,5 + \frac{3}{4}y; -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y)$, очевидно, что чем меньше y , тем меньше $x \Rightarrow$ выр-ние (III) - $\min$ при $x = \max(-1,5 + \frac{3}{4}y; -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y)$

$$x = -\frac{6}{4} - \frac{150}{28} = -\frac{42}{28} - \frac{150}{28} = -\frac{192}{28} = -\frac{48}{7}$$

$$2x + y = -\frac{96}{7} + \frac{50}{7} = -\frac{46}{7} \Rightarrow 14x + 7y = -146$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Проверим, подходит ли $y = -\frac{50}{7}, x = -\frac{48}{7}$ для усл. :

$$|-\frac{102}{7} + \frac{150}{7}| = |-6| \leq 6 \quad (\checkmark)$$

$$|-\frac{144}{7} + \frac{200}{7}| = |-8| \leq 8 \quad (\checkmark)$$

Ответ: $14x + 7y - \min = -146$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Найти

$(m; n)$: ~~13p^2~~

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n \quad 13p^2$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn \quad 3q^2$$

Решение:

~~1) $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3)$ ①~~

$$\text{2) } A = (m - n)^2 + 9(m - n) = (m - n)(m - n + 9) \text{ ②}$$

~~3) Найдем, что если A или $B = 13p^2$ или $3q^2$, то будет на ~~13~~ делит. в A и в B может быть равно 3 крат числа.~~

~~4) Тогда посмотрим на B ①: $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3)$ если $m, n > 1$ то $m, n, (m - n + 3)$ - простые числа при чем два из них равны по модулю. если $m = n$, то $B = 3m^2$, если $m = m - n + 3 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow B = 3m^2$, если $n = m - n + 3$, то $2n = m + 3$, а т.к. m, n - простые, то $m = 13$ или $m = 3 \Rightarrow 2n = 6$ или $2n = 16 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$ или $2n = 16 \Rightarrow n = 8$ - не может быть $\Rightarrow$ тогда только $m = n = 3$, и тогда $B = 3m^2$~~

~~• если m, n или $(m - n + 3) = 1$, то~~

$$m = 1$$

$$B = 4$$

$$B = 3$$

$$B = n(4 - n) = 4n - n^2 \Rightarrow n < 4 \Rightarrow n = 2 \text{ или } n = 3, \text{ не подходит}$$

$$n = 1$$

$$B = m(m - 2) = m^2 - 2m = \begin{cases} B = 13 \\ B = 3 \end{cases}$$

~~3) Найдем, что если $A = 3q^2 = (m - n)(m - n + 9)$, то $m - n : 3$ или $m - n + 9 : 3$, но если $m - n : 3$, то и $m - n + 9 : 3$ и тогда $m, k : 3 \Rightarrow A = 3q^2 = 3k \cdot 3 \Rightarrow q^2 = 3k \Rightarrow q = 3 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow A = 27$, ~~но~~ посмотрим, как мы можем получить $A = 27 = k(k + 9) = 3^3 \Rightarrow k = 1, 3, 9$ или $-1, -3, -9$, $(k + 9) = 1, 39$ или $-1, -3, -9$, найдем $m - n = k$ это никак мы не можем найти k и $k + 9$ в $\mathbb{Z}$ условию, т.к. они оба на 9, а среди $-1, -3, -9, 1, 3, 9$ нет чисел отн. на 9 $\Rightarrow A \neq 3q^2 \Rightarrow A = 13p^2 \Rightarrow B = 3q^2$~~

~~4) Из 1) найдем, что $(m - n) : 13$ или $(m - n + 9) : 13$, а $m : 3$ или $n : 3$ или $(m - n + 3) : 3$, причем если $(m - n + 3) : 3$, то и $m - n : 3$ и $(m - n + 9) : 3 \Rightarrow A : 9 \Rightarrow A = 13 \cdot 9 = 117$, при этом $B = 3q^2 = m \cdot n \cdot 3l \Rightarrow m \cdot n \cdot l = q^2$~~

$$\begin{cases} m - n = 13 \cdot 9 \\ m - n + 9 = 13 \cdot 9 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Попробуем, что $m > n$, т.е. если $m = n$, то $A = 0$, если $m < n$, то $A > 0 \Rightarrow m - n + 9 < 0 \Rightarrow m - n + 3 < 0$, а $m, n > 0$ по условию $\Rightarrow \times$

6) (из п. 5) Попробуем, что если $m > n$, то $(m - n + 9) > 9$, $(m - n) \geq 1$, $(m - n + 3) \geq 4$ так же попробуем, что $m > 1$

7) Попробуем, что если $B = 3q^2$, то пусть $m \equiv 3$, пусть $n \equiv 3$ пусть $(m - n + 3) \equiv 3$, то $(m - n) \equiv 3$ и $(m - n + 9) \equiv 3$ тогда пусть $(m - n) = 3l$
 $A = 13q^2 = 9l(l+3)$

$13 \quad l(l+3) = 13$ не имеет решений в $\mathbb{Z} \Rightarrow (m - n + 3) \not\equiv 3$.

$\Rightarrow m \not\equiv 3$ либо $n \equiv 3$ или же $(m - n) \equiv 3$

8) $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3) = 3q^2$ если $n \equiv 3$, то $n = 3s$

$$B = m \cdot 3s(m - 3s + 3) = 3q^2$$

$$m \cdot s(m - 3s + 3) = q^2$$

m - простое, $(m - n + 3)$ тоже простое $\Rightarrow s = 1$

$$m \cdot (m - 3) = q^2 \Rightarrow m = q, n = 3$$

если $m \equiv 3$, то $m = 3r$

$$B = 3r \cdot n(3r - n + 3) = 3q^2 \Rightarrow r \cdot n(3r - n + 3) = q^2$$

$n = 1 \Rightarrow 2(3r + 2) = q^2$
Возможны ли решения в $\mathbb{Z}$

n - простое $\Rightarrow r = 1$

$$n(6 - n) = q^2$$

Итак, образцы $n = 3, m = q$ - ус. д. в. $q > 13$ (из п. 5)

9) Посмотрим на A :

$$A = 13p^2 = (m - n)(m - n + 9) \Rightarrow (m - n) \equiv 13 \text{ или } (m - n + 9) \equiv 13$$

$$\text{если } m - n \equiv 13 \quad q - 3 \equiv 13 \quad q - \text{прост.}, q > 3 \Rightarrow q - n \cdot 2 = q - 3 - \text{прост.}$$

$$\Rightarrow q - 3 \equiv 13, 2 \Rightarrow p = 2, \text{ так же мы знаем, что } (m - n + 9) > (m - n) \geq 1 \Rightarrow$$

$(m - n + 9)$ простое $\Rightarrow m - n + 9 = 2$, чего не может быть т.к. $(m - n) > 0$.

$$(m - n + 9) \equiv 13 \quad (q + 6) \equiv 13 \quad q = 7 \quad A = (7 - 3)(7 - 3 + 9) = 13 \cdot 4 \Rightarrow (\text{не } p^2)$$

$$A = (q - 3)(q + 6) = q^2 + 3q - 18 = 13p^2$$

$q > 7$:

$$A = (q - 3)(q + 6), q + 6 \text{ больше чем простое} \Rightarrow q - 3 - \text{прост.}$$

$$(q + 6) = 13 \cdot m \quad A = 13 \cdot m \cdot (q - 3) = 13p^2 \Rightarrow m(q - 3) = p^2$$

$m \neq 1, m \geq 1$

m простое, $q - 3$ простое: $q > 7, q$ - простое

$$\Rightarrow q - n \cdot 2 \Rightarrow q - 3 - \text{прост.}, q > 4 \Rightarrow$$

$q - 3$ - простое или простое $\Rightarrow$

$$m(q - 3) = p^2 \Rightarrow q \leq 7 \Rightarrow q = 7$$

Ответ: $m = q = 7, n = 3$



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Дано:

$l \parallel AX$

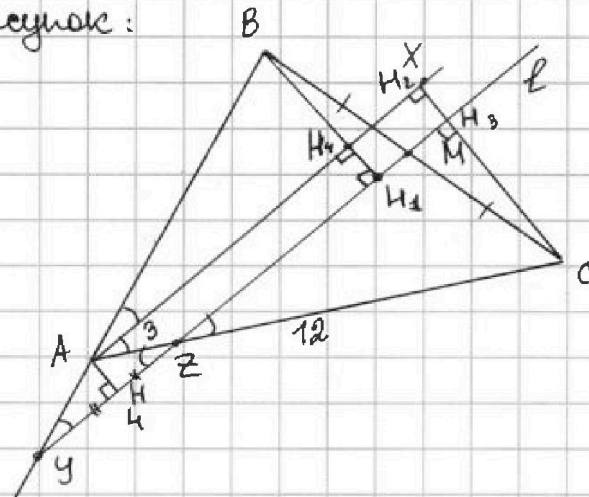
$|AZ| = 9$

$|AC| = 12$

$|YZ| = 4$

$|BC| = ?$

Рисунок:



Решение:

1) П.к. $l \parallel AX \Rightarrow \angle BAX = \angle BYZ$, $\angle CAX = \angle AZY = \angle BAX \Rightarrow \triangle YAZ$ - п/б (по кресту)

2) Тогда найдем высоту в $\triangle YAZ$, пров. из $\{A\}$: По Тх. Пифагора и св-ву

$\text{п/б } \triangle AH = \sqrt{AZ^2 - YZ^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

3) Проведем $\perp$ из $\{B\}$ на l , получим $\{H_1\}$ и из $\{C\}$ на AX , получим $\{H_2\}$, обозначим за $\{H_3\}$ и $\{H_4\}$ пересек. CH_2 с l и BH_1 с AX соответственно.

4) $\angle AZY = \angle MZC$ как вертикальные $\Rightarrow \triangle H_3CZ \sim \triangle H_2CA$ по к-ву 3х углов
к. подобие = $\frac{CZ}{AC} = \frac{AC - AZ}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = k_1$

5) $\angle BAN_4 = \angle BAH_1 \Rightarrow \triangle ABH_4 \sim \triangle YBH_1$ по к-ву 3х углов, k_2 подобие = $\frac{BH_4}{BH_1}$

6) Найдем, что $|H_1H_4| = |AH| = |H_2H_3| = \sqrt{5}$, $|H_2C| \cdot k_1 = |H_3C| \Rightarrow |H_2C| - |H_1H_3| = |H_3C| - |H_1H_3|$
 $|H_2C|(k_1 - 1) = -|H_1H_3| = -\sqrt{5} \Rightarrow |H_2C| = \frac{-\sqrt{5}}{-\frac{1}{4}} = 4\sqrt{5} \Rightarrow |H_3C| = 3\sqrt{5}$

7) $\angle BMH_1 = \angle CMH_3 \Rightarrow \triangle BMH_1 \sim \triangle CMH_3$ по 2м углам ($\angle BMH_1 = \angle CMH_3$ и $\angle MBH_1 = \angle MCH_3$) и стороне ($|BM| = |MC| = \frac{1}{2}BC$) $\Rightarrow |CH_3| = |BH_1| = 3\sqrt{5}$

8) $|BH_4| = |BH_1| - |H_1H_3| = 2\sqrt{5}$

9) Из п. 5, 8 $k_2 = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BH_4}{BH_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{|BH_4|}{|BH_1|} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{|BH_4|}{|BH_1|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |BH_4| = \frac{2}{3} |BH_1| = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
 $|BY| \cdot \frac{2}{3} = |BY| - |AY| \Rightarrow -\frac{1}{3} |BY| = -|AY| \Rightarrow |BY| = 9 \Rightarrow |AB| = 6$

10) По Тх. Пифагора в $\triangle ZCH_3$: $|ZH_3| = \sqrt{|ZC|^2 - |CH_3|^2} = \sqrt{81 - 45} = \sqrt{36} = 6$

11) По Тх. Пифагора в $\triangle YBH_1$: $|YH_1| = \sqrt{|YB|^2 - |BH_1|^2} = \sqrt{81 - 45} = \sqrt{36} = 6$

12) $|H_1H_3| = 2|H_1M| = |YH_3| - |YH_1| = |YZ| + |ZH_3| - |YH_1| = 4 \Rightarrow |H_1M| = 2 = |MH_3|$

13) По Тх. Пифагора в $\triangle MH_3C$: $|CM| = \sqrt{|MH_3|^2 + |CH_3|^2} = \sqrt{4 + 45} = \sqrt{49} = 7$

14) $|CM| = \frac{1}{2} |BC|$ (по кр.) $\Rightarrow |BC| = 2|CM| = 14$

Ответ: $|BC| = 14$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

Решение:

$$1) 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y$$

$$4x^4 + 5\sqrt{x} + x = 4y^4 + 5\sqrt{y} + y$$

$$4x^4 - 4y^4 = (2y^2 + 2x^2)(2y^2 - 2x^2) = 4(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 4(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

ОДЗ: (по крестикам):

$$x \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$y \geq -6; y \leq 5 \Rightarrow y \in [0; 5]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

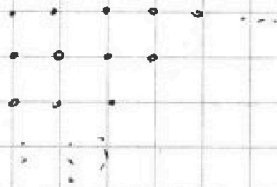
Задача 6

Дано:

квадрат 9×9

N раскрасок - ?

Рисунок:



Решение:

- 1) Найдем, что всего узлов в таком квадрате 100 (посчитаем их несложно: ~~в каждом из 9 столбцов~~ в каждой строке их 10, строк тоже 10)
- 2) Тогда посмотрим, сколько способов мы можем выбрать 2 узла из 100. Будем красить: $\frac{100 \cdot 99}{2} = N_{\text{max}}$, тогда изначально (до поворотов раскраски) было столько раскрасок.
- 3) Теперь рассмотрим повороты: они будут совершаться отн. центра поворотной симметрии квадрата (перес. диаг.) на 90° , очевидно, что при повороте большинства раскрасок на 90° (кроме некоторых, их мы разберем далее) мы будем получать раскраску отлич. от начальной $\Rightarrow N' = \frac{N}{4}$ (т.к. поворот осущ. -ся 4-ре раза).
- 4) Теперь найдем, что еще - есть раскраски, переходящие сами в себя при повороте на π , где $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ такой раскраски нет, т.к. у нас красится 2 узла, а тогда 2 точки перейдут в 2 другие узла, т.е. их расст. от центра было разным, и тогда они перейдут не туда, куда были. Из центра линии. При 180° , т.е. они при любом повороте перейдут только на свое же место, но никак одновременно не поменяются местами.
- 5) Кол-во раскрасок подг. под π - $\frac{100}{2} = 50$ т.к. каждому узлу соотв. ровно 1 симм. элемент отн. центра $\Rightarrow$ в N мы посчитали 50 таких раскрасок, но их нужно делим пополам т.к. поворот на π и на $\frac{3\pi}{2}$ дает нам уже новую раскраску. $\Rightarrow N' + \frac{N}{4} = \text{итог} = \frac{100 \cdot 99}{8} + 12.5 = 1250$

Ответ: $N_{\text{раскрасок}} = 1250$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Дано:

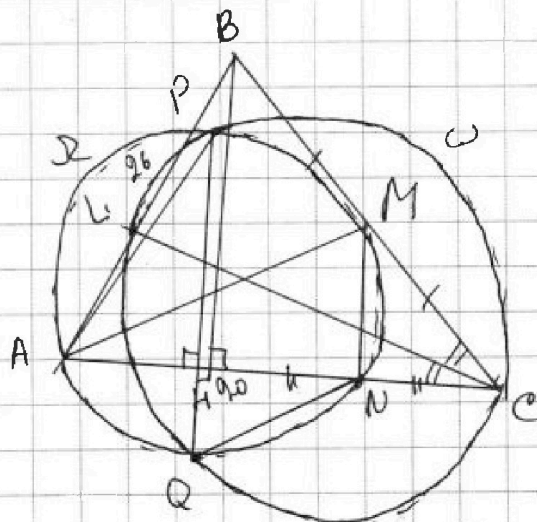
$$AP = 20$$

$$AB = 26$$

$$AC = ?$$

$$BC = ?$$

Рисунок:



Решение:

- 1) $MN \perp AC$ т.к. $\angle ANM$ опир. на диаметр $\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$
- 2) $\angle MNC = \angle ANM = 90^\circ = 180^\circ - \angle ANM$
- 3) $\triangle BNC \sim \triangle MNC$ по 2м углам, к подобия $= \frac{1}{2}$
- 4) ~~$AP = 20$~~

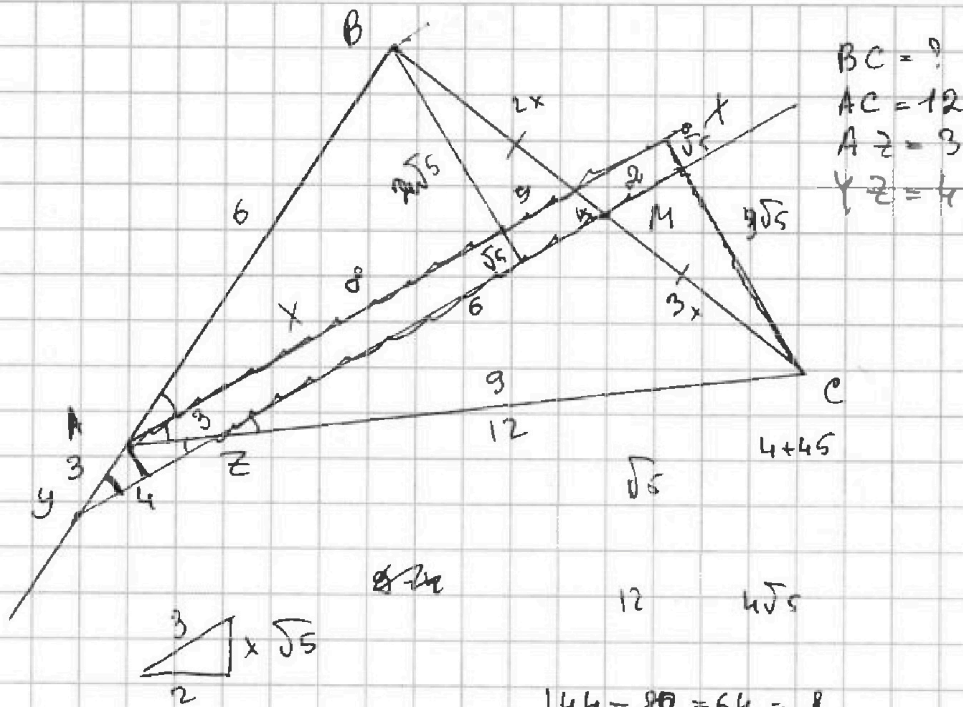


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

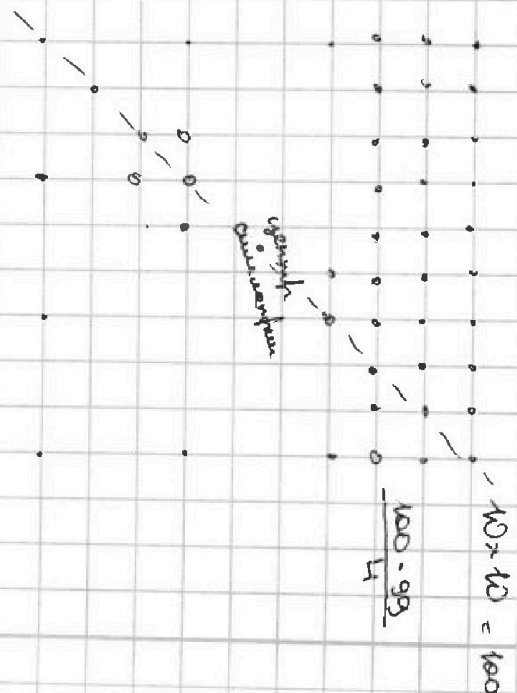
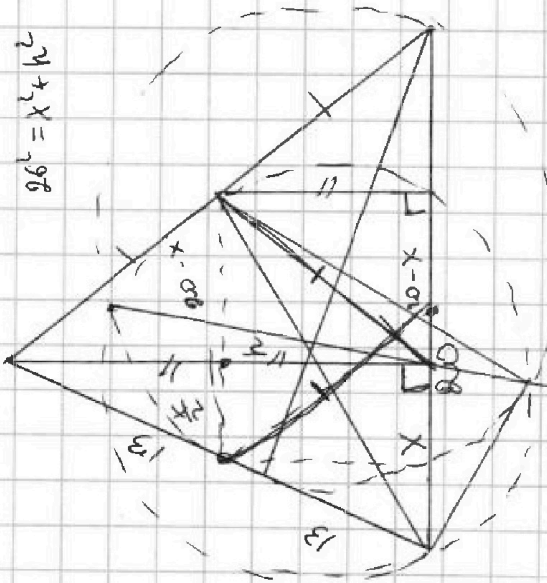
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$4x^2 + x - 5\sqrt{5} = 4y^2 - 5\sqrt{x} + y$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \\ x^4 - 2x^3 \\ \hline -6x^3 + 12x^2 \\ + 5x^2 - 10x \\ + 6x - 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} (x-2)(x^3 - 6x^2 + 12x + 6) = \\ = x^4 - 2x^3 - 6x^3 + 12x^2 + 5x^2 - 10x + 6x - 12 \\ x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 5x + 6 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline -4x^2 + 8x \\ - 3x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 4x - 3 \\ 4 \pm \sqrt{16+12} \\ \hline 2 \\ 2 \pm \sqrt{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad 2d \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{16-9}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\begin{array}{l} |-36-30| \leq 6 \\ |-27+40| \leq 13 \end{array}$$

$$x = \max\left(-1, 5 + \frac{3}{4} \cdot \frac{-50}{7}\right)$$

$$2 \cdot 3 \cdot (2)$$

$$|4k + 30| \leq 6$$

$$|3k + 40| \leq 8$$

$$-\frac{42}{2} = -6$$

$$x = \max\left(-1, 5 + \frac{3}{4} \cdot \frac{-50}{4}\right)$$

$$13 \cdot 9 = 90 + 27 = 117$$

$$48 \cdot 2 = 96$$

$$48 \cdot 4 = 192$$

$$48 \cdot 3 = 144$$

$$\left| -\frac{192}{4} + \frac{150}{4} \right| \leq 6$$

$$\left| -\frac{144}{4} + \frac{100}{4} \right| \leq 8$$

$$-56$$

$$\begin{array}{l} p = 3q^2 \\ A = 13p^2 \end{array}$$

$$A = 13q^2 = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = 3p^2 = m \cdot n \cdot (m-n+3)$$

$$A = 9k(k+9)$$

$$k^2 + 3k = 18$$

$$3 \pm \sqrt{9+51}$$

$$4 \pm 13 = 42$$

$$B = m \cdot n \cdot (m-n+3) = 3p^2$$

$$A = (m-n)(m-n+9) = 13p^2$$

$$m-n : 13$$

$$m-n+9 : 13$$

$$m : 3$$

$$n : 3$$

$$m-n : 3$$

$$B = m \cdot n \cdot (m-n+3) = 13p^2$$

$$A = (m-n)(m-n+9) = 3p^2$$