



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть $a_1, a_2, \dots$ - арифм. прогрессия, d - ее разность. Тогда по условию $a_3 = 3x+3$, $a_5 = (x^2+2x)^2$, $a_9 = 3x^2$. Известно, что

$$\begin{cases} a_5 = a_3 + 2d \\ a_9 = a_5 + 4d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_9 - a_5 = 2(a_5 - a_3) \\ a_9 - 3a_5 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$

Решим это ур-е.

$$3x^2 - 3(x^2+2x)^2 + 2(3x+3) = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - (x^2+2x)^2 + 2x+2 = 0$$

$$x^2 - 4x^2 - x^4 - 4x^3 + 2x+2 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Заметим, что $x = -1$ - корень, разложим на множители:

~~$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$~~

$$(x+1)(x^3+3x^2-2) = 0$$

$$(x+1)(x+1)(x^2+2x-2) = 0$$

$$(x+1)^2(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -1+\sqrt{3} \\ x = -1-\sqrt{3} \end{cases}$$

Проверим полученные значения x :

~~$x = -1$~~ $x = -1$: $a_3 = 0$, $a_5 = 1$, $a_9 = 3$ - арифм. пр.

$x = -1+\sqrt{3}$: $a_3 = 3\sqrt{3}$, $a_5 = 4$, $a_9 = 12-6\sqrt{3}$ - арифм. пр.

$x = -1-\sqrt{3}$: $a_3 = -3\sqrt{3}$, $a_5 = 4$, $a_9 = 12+6\sqrt{3}$ - арифм. пр.

Ответ: $x \in \{-1; -1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ 3 \geq 3y-9x \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -3 \leq 3y-9x \leq 3 \end{cases} \quad \oplus \quad \begin{cases} -6 \leq -8x \leq 6 \\ 6 \geq 8x \geq -6 \end{cases}$$

~~получили ограничение на x~~

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad | \cdot (-3) \quad \begin{cases} 3 \geq 9y-3x \geq -9 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \geq 9y-3x \geq -9 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -9 \leq 9y-3x \leq 9 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad \oplus \quad \begin{cases} +10 \leq 8y \leq 10 \\ -5 \leq 4y \leq 5 \end{cases}$$

~~получили ограничение на y.~~

Нам необходимо максимизировать

$4y+8x$.

$$\begin{cases} -5 \leq 4y \leq 5 \\ -6 \leq 8x \leq 6 \end{cases} \quad \oplus$$

$$4y+8x \leq \boxed{11}$$

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1/3

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

1. Если $A = 13p^2$, $B = 45q^2$:

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

а) либо $m+n = 13 \cdot k$, где k - натуральное число

б) либо $m+n-9 = 13 \cdot k$, где k - натуральное число

а): $13k(13k-9) = 13p^2$

$$k(13k-9) = p^2$$

$$k=1, 13k-9=p^2 \\ 4=p^2 \\ p=2$$

$$13k-9=1, k=p^2 \\ 13k=10, k=p^2 \\ p^2 = \frac{10}{13}$$

$$k=13k-9=p \\ 9=12k \\ k = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = p$$

Эти два варианта не подходят, т.к. p и q - простые.

Т.е. $m+n=13$. (в этом случае)

б): $13k(13k+9) = 13p^2$

$$k(13k+9) = p^2$$

$$k=1, 13k+9=p^2 \\ 22=p^2$$

$$13k+9=1, k=p^2 \\ 13k=-8 \\ p^2 = -\frac{8}{13}$$

$$k=13k+9=p \\ 12k=-9 \\ p = -\frac{9}{12}$$

Разобрав варианты, получили, что $m+n=13$.
Тогда:

$$mn \cdot 10 = 45q^2$$

$$mn \cdot 2 = 15q^2$$

$$m \cdot n \cdot 2 = 3 \cdot 5 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 : 2 \Rightarrow q=2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2mn = 60 \Rightarrow mn = 30$$

Получили систему:

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m \cdot n=30 \end{cases}$$

Т.к. $m, n \in \mathbb{N}$, то 30 в произв. 2х натур. дают 1 и 10, 2 и 15, 3 и 10, 5 и 6.

Заметим, что подходит только пара (3, 10) и (10, 3).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Если ~~...~~ $A = 45q^2$, $B = 13p^2$:

$$\begin{cases} m \cdot n (m+n-9) = 13p^2 \\ (m+n)(m+n+9) = 45q^2 = 5 \cdot 5 \cdot 3q^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow (m+n)(m+n-9) : 3$$

$$\text{Если } m+n \not\div 3, \text{ то } m+n-9 \not\div 3 \Rightarrow m+n : 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m+n)(m+n-9) : 9 \Rightarrow q^2 : 3 \Rightarrow q = 3.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 45 \cdot 9 \\ (m+n)^2 - 9(m+n) - 45 \cdot 9 = 0 \end{cases}$$

$$(m+n) = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 45 \cdot 9}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{2481}}{2} \notin \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ такой вариант невозможен.

Ответ: $(3, 10)$ и $(10, 3)$.



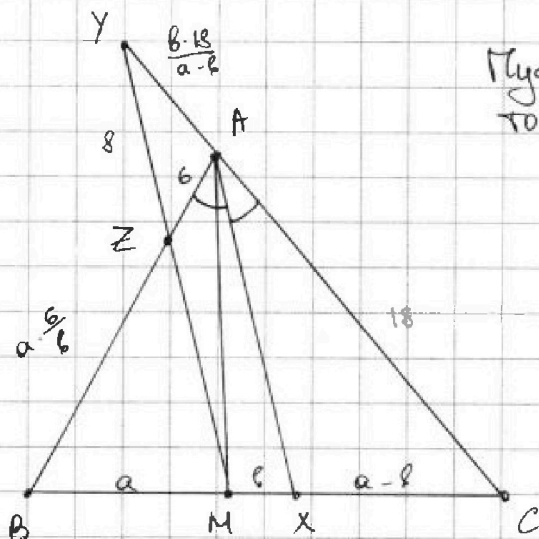
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4



Пусть $BM = a$, $MX = b$,
тогда $XC = a - b$.

$YM \parallel AX \Rightarrow$ по т. о пропорц. отрезках: $\frac{BM}{BZ} = \frac{MX}{AZ}$

$$\frac{a}{BZ} = \frac{b}{6}$$

$$BZ = \frac{a \cdot 6}{b}$$

$AX \parallel YM \Rightarrow$ по т. о пропорц. отрезках: $\frac{MX}{YA} = \frac{XC}{AC}$

$$\frac{b}{YA} = \frac{a - b}{18}$$

$$AY = \frac{18b}{a - b}$$

~~по т. о пропорц. отрезках:~~

По ~~т. о пропорц. отрезках:~~ Менемая:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{18b}{a - b} + 18 = 1$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{18a}{a - b} = 1$$

$$18b = a - b$$

$$17b = a$$

~~Значит, $BM = 17MX$.~~



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2): \quad & x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ & (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(x-y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \\ & (x-y)(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \\ & (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \\ & \quad + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \\ & (\sqrt{x} - \sqrt{y})((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} & (3) \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Заметим, что $x, y \geq 0$ (т.к. стоят под корнем), то $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$, $x+y \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow (4)$ ур-е не имеет корней.

$$x = y, \quad x, y \geq 0 \text{ (запомним это!)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (1): \quad & \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ & \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} \\ & \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + x+1+6-x-2 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} \end{aligned}$$

Пусть $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{6-x}$:

$$a - b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab$$

$$a - b + (a-b)^2 - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a - b = 1 & \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \\ a - b = -2 & \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \end{cases}$$

Подставим в ур-е (1):

$$\begin{cases} 6 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} \\ 3 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = \sqrt{(6-x)(x+1)} & |^{\wedge 2} \\ 3 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} & |^{\wedge 2} \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 = 6+5x-x^2 \\ 9 = 12+10x-2x^2 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 - 10x - 3 = 0 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{31}}{2} \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{31}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}), (\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}), (\frac{5+\sqrt{31}}{2}, \frac{5+\sqrt{31}}{2}), (\frac{5-\sqrt{31}}{2}, \frac{5-\sqrt{31}}{2})$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

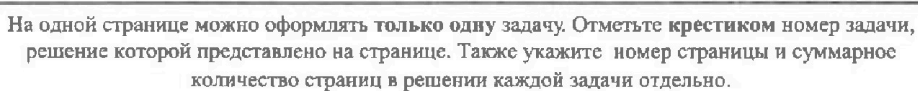
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

Всего покрашено в чёрный цвет 81 узел. Чтобы выбрать 2 узла цепки для покраски в белый цвет ~~существует~~ существует C_{81}^2 способа, при этом ~~перестановки~~ перестановки этих 2-х узлов местами уже учтено. У квадрата ~~есть~~ 4 стороны $\Rightarrow$ есть 4 поворота, при котором узлы этого квадрата переходят друг в друга $\Rightarrow$ полученное число способов необходимо поделить на 4, т.к. каждую пару узлов мы считаем 4 раза:

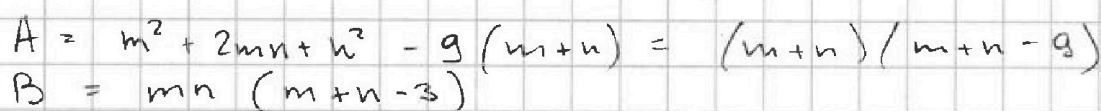
$$\frac{C_{81}^2}{4} = \frac{81 \cdot 80}{2! \cdot 4} = \frac{80 \cdot 81}{8} = 810 \text{ способов.}$$

Ответ: 810.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если: $(m+n)(m+n-a) = 13p^2$

$$m+n=13k$$

$$13k(13k-9) = 17p^2$$

$$k(13k - 9) = 7^2$$

also $k=1$, $13k-9=p^2$
 $4=p^2$, $p=2 \Rightarrow m+n=13$

$$\begin{array}{l} \text{also } k = p \\ 13k - 9 = p \end{array} \quad \begin{array}{l} k = 13k - 9 \\ 9 = 12k \end{array}$$

$$m n \cdot \frac{10}{2} = \frac{75}{15} q^2$$

$$m \cdot n \cdot 2 = 3 \cdot 5 \cdot 9^2 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \Rightarrow mn = 30$$

$$\Downarrow q:2 \rightarrow q=2$$

$$\begin{aligned} m+n &= 20, 13 \\ mn &= 30 \end{aligned}$$

1.30
2.15
3.10
5.6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ из __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Model by Assessment~~

~~$\frac{BX}{BA} = \frac{CX}{CA}$~~

~~$\frac{a+b}{6a+c} = \frac{a-b}{\frac{18b}{a}+18}$~~

~~$\frac{18b}{6a+c} = \frac{16b}{\frac{18b}{a}+18}$~~

~~$\frac{18b}{6a+c} = \frac{16b}{\frac{18b}{a}+18}$~~

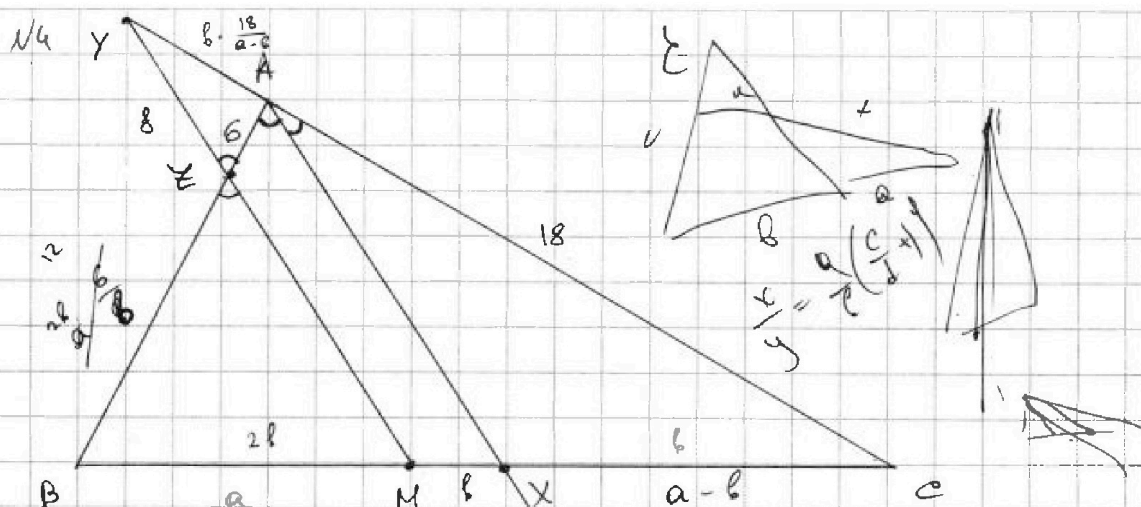
~~$\frac{18b}{6a+c} = \frac{16b}{\frac{18b}{a}+18}$~~



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{36}{18} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{MZ}{8} \cdot \frac{AY}{18} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha} = 1$$

$$HZ \cdot AY = 4 \cdot 18 = 72 \rightarrow 32 = 72$$

$$\frac{a \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{d}}{6} = \frac{AY}{18} \left(\frac{a}{b} + c \right)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{Ay}{g}, \quad Ay = \frac{ga}{b} = b \cdot \frac{18}{a-b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2b}{a-b}$$

$$2b^2 = a^2 - ab$$

$$a^2 - ab - 2b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab + ab - 2b^2 = 0$$

$$a(a+b) - 2b(a+b) =$$

$$(a-1)(a-2b) = 0$$

$$a = 2b$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

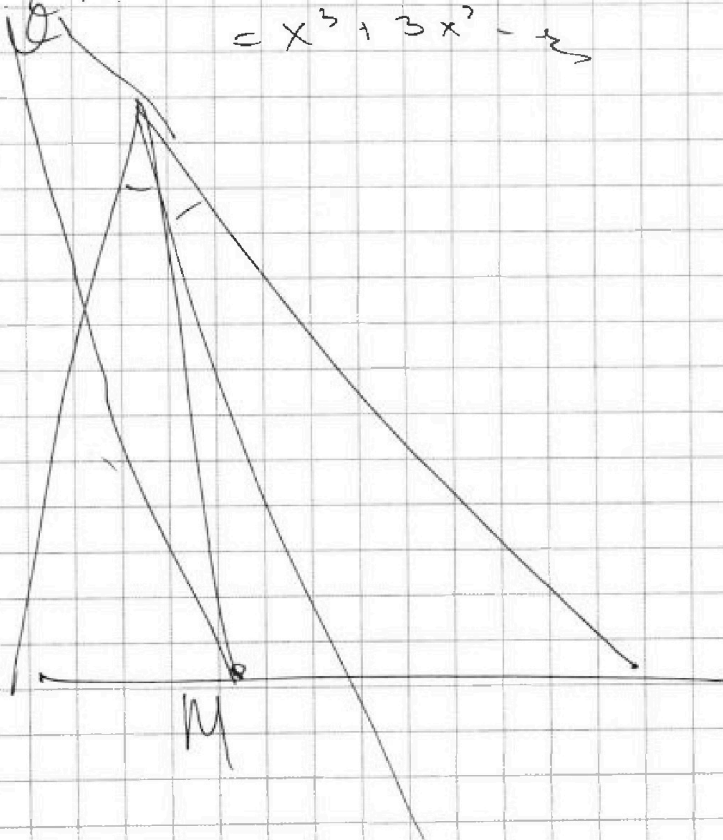
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+1) \cdot (x^2 + 2x - 2) = x^3 + 2x^2 - 2x + x^2 + 2x - 2 = x^3 + 3x^2 - 2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+1)(x^2+2x-2) = x^3 + 2x^2 - 2x + x^2 + 2x - 2 =$$

$$= x^3 + 3x^2 - 2$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 + 2x - 2$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$3(-1-\sqrt{3})^2 =$$

$$= 3(1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) =$$

$$= 3 + 9 + 6\sqrt{3}$$

$$3x^2$$

$$-3 - 3\sqrt{3} + 3$$

$$1 \neq 3 \neq 4 \neq 6 \neq 7$$

$$-3 + \sqrt{3} + 3$$

$$((-1+\sqrt{3})^2 + 2(-1+\sqrt{3}))^2 =$$

$$= (1 + 3 - 2\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3})^2 = 4$$

$$3x^2 = 3(-1+\sqrt{3})^2 = 3(1 + 3 - 2\sqrt{3}) =$$

$$= 3 + 9 - 6\sqrt{3} =$$

$$= 12 - 6\sqrt{3}$$

$$1.6$$

$$12 - 6\sqrt{3} \neq 4$$

$$8 \neq 6\sqrt{3}$$

$$4 \neq 3\sqrt{3}$$

$$16 \cup 9 \cdot 8 = 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$-1 + 3 - 2$$

$$1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0$$

$$(x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d$$

$$3x^2 = \cancel{(x^2 + 2x)^2} - (x^2 + 2x)^2 + 4d$$

$$3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 2d$$

$$(x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 3x^3 - (x^2 + 2x)^2 = 0$$

$$a_5 \quad a_5 + d \quad a_5 + 2d \quad a_5 + d \quad a_5 + 2d \quad a_5 + 3d \quad a_5 + 4d$$

$$3x^2 - 2(x^2 + 2x)$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) =$$
$$= x^4 + 3x^3 - 2x + x^3 + 3x^2 - 2$$
$$= x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$x^4 + 3x^3 + x^3 + 3x^2 - 2(x+1) = 0$$

$$x^3(x+1) + 3x^2(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$x^4 + 3x^3 - 2x + x^3 + 3x^2 - 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

	1	3	0	-2
2	1	5	.	
-2	1	2	0	

	1	3	0	-2
-1	1	-2	0	-2
1	1	4	4	-2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2 $\max (4y + 8x) - ?$

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x - 3y \leq 3 \\ x < 3y \\ 3y - x \leq 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x \geq y \\ 3x - y \leq 1 \\ 3x < y \\ y - 3x \leq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x \leq 3(y+1) \\ x < 3y \\ x \geq 3(y-1) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x \geq y \\ 3x \leq y+1 \\ 3x < y \\ 3x \geq y-1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x - 3y \geq 0 \\ x - 3y \leq 3 \\ x - 3y < 0 \\ x - 3y \geq -3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x - y \geq 0 \\ 3x - y \leq 1 \\ 3x - y < 0 \\ 3x - y \geq -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a \geq 0 \\ a \leq 3 \\ a < 0 \\ a \geq -3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b \geq 0 \\ b \leq 1 \\ b < 0 \\ b \geq -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3 > 3y - x \geq -3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3 \leq 3x - 9y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -2 \leq -8y \leq 2 \\ -\frac{1}{4} \leq -y \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \geq y \geq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\max 4(y + 2x)$
 $\max (y + 2x)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{1} \quad a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$a_5 = a_3 + 2d$$

$$a_9 = a_5 + 4d$$

$$a_9 - a_5 = 2(a_5 - a_3)$$

$$a_9 - a_5 = 2a_5 - 2a_3$$

$$a_9 - 3a_5 + 2a_3 = 0$$

$$3x^2 - 3(x^2 + 2x)^2 + 3x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 3(x^2 + 2x)^2 + 3x + 3 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - (x^2 + 2x)^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - x - 1 = 0$$

$$4x^2(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) = 0$$

$$(x^2 + x + 1)(4x^2 - 1) = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$$

$$(2x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} = 4.5 = \frac{9}{2}$$

$$a_5 = (\frac{1}{4} + 1)^2 = \frac{25}{16}$$

$$a_9 = 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$a_3 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{40}{16}$$

$$a_5 = (\frac{1}{4} - 1)^2 = \frac{9}{16}$$

$$a_9 = 3 \cdot (\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{16} = \frac{12}{16}$$

$$\frac{40}{16} - \frac{25}{16} = \frac{15}{16}$$

$$x^3 + 3x^2 - 1$$

$$\frac{25 - 12 + 3}{16}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_5 = 1$$

$$a_9 = 3$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 3 & 0 & -1 & \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$4x^2 - 1$$

$$1 \quad 4 \quad 3 \quad -1 \quad -1$$

$$x = -1$$

$$1 - 4 + 3 + 1 - 1$$

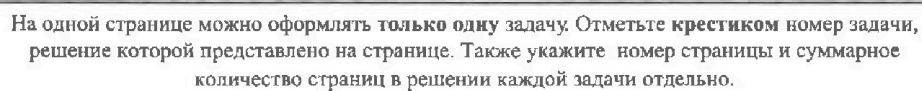
$$x^2 + 5x = 1$$

$$x^2(x + 3) = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

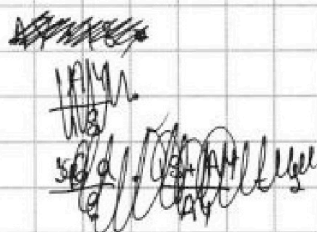
$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 4 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

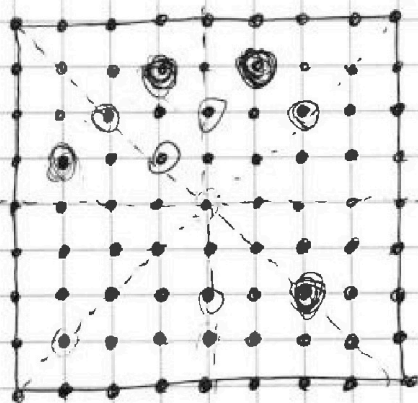


$$\frac{a}{a \cdot \frac{b}{c}} = \frac{a+b}{a \cdot \frac{b}{c} + bc}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{(a+b)b}{ba + cb}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{b}{b}$$

$$\frac{36a}{b} \cdot \frac{18 + AY}{AY} = 1$$

$$\frac{8}{7M} = \frac{AY}{18g} \cdot 2$$

$$\frac{8}{ZM} = \frac{AY}{9}$$



Ко-во способов покрасить 2 узла
в белый цвет

Si yzler

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{C_{81}}{4} = \frac{81!}{2 \cdot 4 \cdot 49!} = \boxed{1810}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= 0 \\ (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= 0 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= 0 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$x = y \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+5x+6}$$

$$-x^2 + 5x + 6$$

$$a+b = -6 = 6a - 2$$

$$a+b = 5$$

$$-(x^2 - 5x - 6) =$$

$$\begin{aligned} -(x-6)(x+1) &= \\ &= (6-x)(x+1) \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 &= 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 &= 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 &= 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + \sqrt{x+1} + 6-x - 2 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$a-b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab$$

$$a-b + (a-b)^2 - 2 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$1u - 2$$

$$\begin{cases} a-b = 1 \\ a-b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{6-x} \\ \sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{6-x} \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

$$2x^2 - 10x - 3 = 0$$

$$\text{пр } 6 \text{ суммиру}$$

$$\frac{10 \pm \sqrt{100+24}}{4} = \frac{10 \pm \sqrt{124}}{4}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 6 &= \frac{10 \pm \sqrt{124}}{4} \\ (x-6)(x+1) &= \frac{10 \pm \sqrt{124}}{4} \\ (6-x)(x+1) &= \frac{10 \pm \sqrt{124}}{4} \end{aligned}$$

$$x^2 - 5x + 3$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$a=3,5 \quad b=5/2$$

$$\sqrt{124} = 4\sqrt{31}$$

$$4\sqrt{25+6} = 4\sqrt{31}$$

