



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть первый элемент прогрессии $= a$, а шаг $= b$.

Тогда:

$$\begin{cases} a + b = 12 - 12x \\ a + 3b = (x^2 + 4x)^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 \\ a + 7b = -6x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 - (12 - 12x) \\ 4b = -6x^2 - (x^4 + 8x^3 + 16x^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 24x - 24 &= 4b = -x^4 - 8x^3 - 22x^2 \\ 3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 &= 0 \\ x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Заметим, что $x = -2$ — корень уравнения $\Rightarrow$ по теореме Безу:
 $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x + 2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$

Заметим, что $x = 2$ — корень $x^3 + 6x^2 + 6x - 4 \Rightarrow$ по теореме Безу:
 $(x + 2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = (x + 2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$

Решим уравнение $x^2 + 4x - 2 = 0$

$$D = 4^2 + 4 \cdot 2 = 16 + 8 = 24$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$

Наше исходное уравнение имеет корни:

$$\begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -2 \\ x = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{-2 - \sqrt{3}; -2; -2 + \sqrt{3}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

Возьмем $m = (x+y)/2$ и $\alpha = x-m = m-y$

Тогда перепишем условие:

$$10x + 5y = 10(m+\alpha) + 5(m-\alpha) = 15m + 5\alpha = \min$$

$$\begin{cases} |2x - 3y| = |2(m+\alpha) - 3(m-\alpha)| = |-m + 5\alpha| \leq 6 \\ |3x - 2y| = |3(m+\alpha) - 2(m-\alpha)| = |m + 5\alpha| \leq 4 \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} -6 \leq -m + 5\alpha \leq 6 \\ -4 \leq m + 5\alpha \leq 4 \end{cases}$$

↓

$$-4 - 6 \leq (m + 5\alpha) - (-m + 5\alpha) \leq 4 + 6$$

$$-10 \leq 2m \leq 10$$

$$-5 \leq m \leq 5$$

↓

$$15m + 5\alpha = 14m + (m + 5\alpha) \geq -5 \cdot 14 + (-4) = -74$$

↓

$$15m + 5\alpha \geq -74$$

Равенство достигается при $m = -5$; $\alpha = \frac{1}{5}$

↓

$$10x + 5y \geq -74 \text{ и } 10x + 5y = -74 \text{ при } x = -5 + \frac{1}{5} = -\frac{24}{5} \text{ и } y = -5 - \frac{1}{5} = -\frac{26}{5}$$

Мы оценили функцию снизу и нашли точку, где она минимум достигает $\Rightarrow$ мы нашли минимум

Ответ: -74



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle BAX = \angle CAX - \text{биссектриса} \quad \sim 4$$

$$AX \parallel MU$$

$\Downarrow$

$$\angle XAZ = \angle YZA - \text{накрест лежащий}$$

$$\angle BAX = \angle BUM - \text{соответственный}$$

$\Downarrow$

$$\angle AYZ = \angle YZA$$

$\Downarrow$

$$\triangle AYZ - \text{равнобедренный}$$

$\Downarrow$

$$AY = AZ = 6$$

Пусть $\angle YAZ = \alpha$, тогда найдем $\cos \alpha$ по теореме косинусов:

$$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cos \alpha \cdot AY \cdot AZ$$

$$8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cos \alpha \cdot 6 \cdot 6$$

$$64 = 72 - 72 \cos \alpha$$

$$72 \cos \alpha = 8 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$\text{Пусть } BC = 4\lambda \Rightarrow MC = 2\lambda$$

Рассмотрим $\angle ACB$. $AX \parallel MU \Rightarrow$ по теореме Фалеса:

$$\frac{ZC}{AZ} = \frac{MC}{XM} \Rightarrow \frac{18-6}{6} = \frac{2\lambda}{XM} \Rightarrow XM = 2\lambda \cdot \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow X \text{ середина } BM$$

$$AX \parallel MU \text{ и } BX = XM = \lambda \Rightarrow AX \text{ средняя линия для } \triangle UBM$$

$\Downarrow$

$$BA = AU = 6$$

$$\angle BAC = 180 - \angle YAZ = 180 - \alpha \Rightarrow \cos \angle BAC = \cos 180 - \alpha = -\cos \alpha = -\frac{1}{9}$$

$\Downarrow$

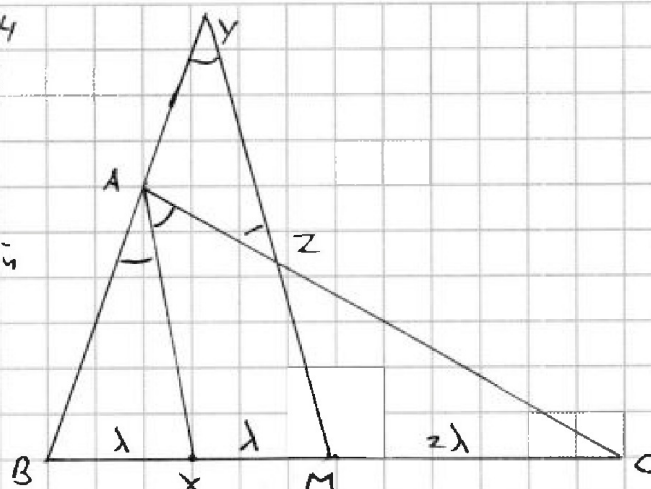
По теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle BAC \cdot AB \cdot AC$$

$$BC^2 = 6^2 + 18^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot 6 = 36 + 324 + 24 = 384$$

$$BC = \sqrt{384}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \sqrt{384}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5

Посмотрим на уравнение:

$$2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2$$

Возьмем $a = \sqrt[4]{3x}$ и $b = \sqrt[4]{3y}$, тогда:

$$2 \cdot \frac{a^{20}}{3^5} + 4 \cdot \frac{a^8}{3^2} + a - 2 \cdot \frac{b^{20}}{3^5} - 4 \cdot \frac{b^8}{3^2} - b = 0$$

Распишем как разности n -ых степеней:

$$\frac{2}{3^5} (a-b)(a^{19} + a^{18}b + \dots + b^{19}) + \frac{4}{3^2} (a-b)(a^7 + a^6b + \dots + b^7) + a - b = 0$$

Вынесем $(a-b)$:

$$(a-b) \left(\frac{2}{3^5} (a^{19} + a^{18}b + \dots + b^{19}) + \frac{4}{3^2} (a^7 + a^6b + \dots + b^7) + 1 \right) = 0$$

Заметим, что a и b - корни четной степени $\Rightarrow a \geq 0$ и $b \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ во 2 скобке выражение ≥ 1 (там все знаки - плюсы)

$\Downarrow$

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \sqrt[4]{3x} = \sqrt[4]{3y} \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y$$

Тогда запишем 1 уравнение:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{12-x-x^2} - 5$$

$$x+4 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 48-4x-4x^2 - 20\sqrt{12-x-x^2} + 25$$

$$18\sqrt{(x+4)(3-x)} = 56 - 4x - 4x^2$$

$$9\sqrt{(x+4)(3-x)} = -(2x^2 + 2x - 33)$$

$$81(-x^2 - x + 12) = 4x^4 + 4x^3 - 66x^2 + 4x^3 + 4x^2 - 66x - 66x^2 - 66x + 33^2$$

$$4x^4 + 8x^3 - (132 + 81)x^2 - (132 + 81)x + 1089 - 392 = 0$$

$$4x^4 + 8x^3 - 51x^2 - 51x + 117 = 0$$

Производная

$$16x^3 + 24x^2 - 102x - 51 = 0$$

В $x=2$ меньше 0, в $x=3$ больше $\Rightarrow$ экстремум между ними

то в этом отрезке $117 + 4x^4 + 8x^3 \leq$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Заметим, что если узлы сетки, которые мы
выбрали, симметричны относительно центра квадрата,
то они при поворотах дают 2 различных картинки,
которые мы считаем одинаковыми. Если они несимметрич-
ны, то 4 различные, так как при повороте узлы не могут
занять места друг друга $\Rightarrow$ вариантов всего =
 $= \text{симметричных} / 2 + \text{несимметричных} / 4 = \frac{64}{2} / 2 +$
 $+ \left(\frac{64 \cdot 63}{2} - \frac{64}{2} \right) / 4 = \frac{64}{4} + \frac{64 \cdot 62}{8} = 16 + 8 \cdot 62 =$
 $= 496 + 16 = 512$

Ответ: 512

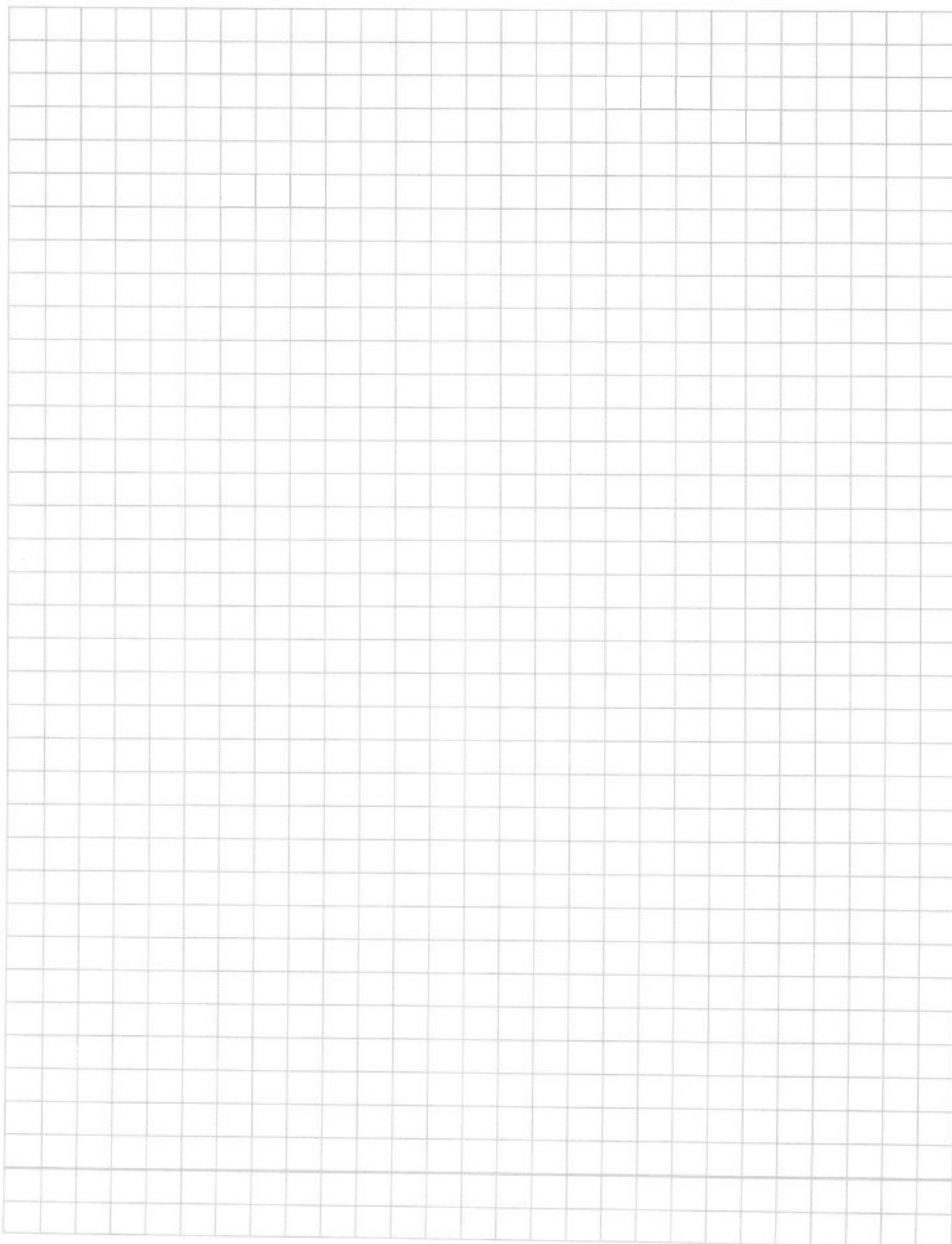


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b = 12 - 12x$$

36

$$12 + 24 - 12x \quad 36 - 12x$$

$$a + 3b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 \quad 16 \quad 2(a - b) = 2 - 6$$

$$a + 7b = -6x^2 \quad -24$$

$$3b - c = a^2 \quad c + b - 2a = 0$$

$$2b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12$$

$$(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x - 2)$$

$$4b = -x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 6x^2$$

$$(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 12x - 2)$$

$$2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$16 \quad -64 \quad 72 \quad -16 \quad -8$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 \mid x+2 \\ x^4 + 2x^3 \\ \hline 6x^3 + 16x^2 \\ -6x^3 + 12x^2 \\ \hline 6x^2 + 8x \\ -6x^2 + 12x \\ \hline -4x - 8 \\ -4x - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$-8 \quad 24 \quad -12 \quad -4$$

$$3x^2 + 12x + 6 = 0$$

$$(x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 2 = 8$$

$$(x+2)^2 \mid$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 6x - 4 \mid x+2 \\ x^3 + 2x^2 \\ \hline 4x^2 + 6x \\ -4x^2 + 8x \\ \hline -2x - 4 \\ -2x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$13p^2 - 15q^2$$

$$|x - \frac{3}{2}y| \leq 3$$

$$16(p^2 - q^2) + q^2 + p^2$$

$$x - \frac{2}{3}y$$

$$m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$$

$$|y - \frac{2}{3}x| \leq 2$$

$$(m - 2n)^2 + 13(m - 2n)$$

$$|y - \frac{1}{2}x| \leq 4$$

$$(m - 2n + 13)(m - 2n)$$

$$x(x+13) = 13p^2$$

$$mn(m - 2n - 2) \quad 12 \mid$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including a diagram of a triangle and various algebraic calculations.

Diagram: A triangle with vertices A, B, and C. Side AB is labeled 6, side AC is labeled 8, and side BC is labeled 18. Angles at vertices A and B are labeled 1 and 2 respectively. A line segment AY is drawn from vertex A to side BC, with Y on BC. The length of AY is labeled 11. The length of BY is labeled 11. The length of CY is labeled 7. The length of AX is labeled 6. The length of CX is labeled 8. The length of BX is labeled 18.

Calculations:

Left side:

$$\begin{array}{r} 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cdot \cos \alpha = 8^2 \\ 32 - 22 \cos \alpha = 64 \\ \cos \alpha = \frac{1}{3} \end{array}$$

Right side:

$$\begin{array}{r} 8^2 + 18^2 + 2 \cdot 8 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3} \\ 64 + 324 + 96 = 480 \end{array}$$

Bottom left:

$$\begin{array}{r} 102 \\ 36 \\ 324 \\ 29 \\ 548 \end{array}$$

Bottom right:

$$\begin{array}{r} 15m + 5x \\ -11 \leq 4x - 6y \leq 12 \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12 \\ -24 \leq 5x \leq 24 \\ -4.8 \leq x \leq 4.8 \end{array}$$

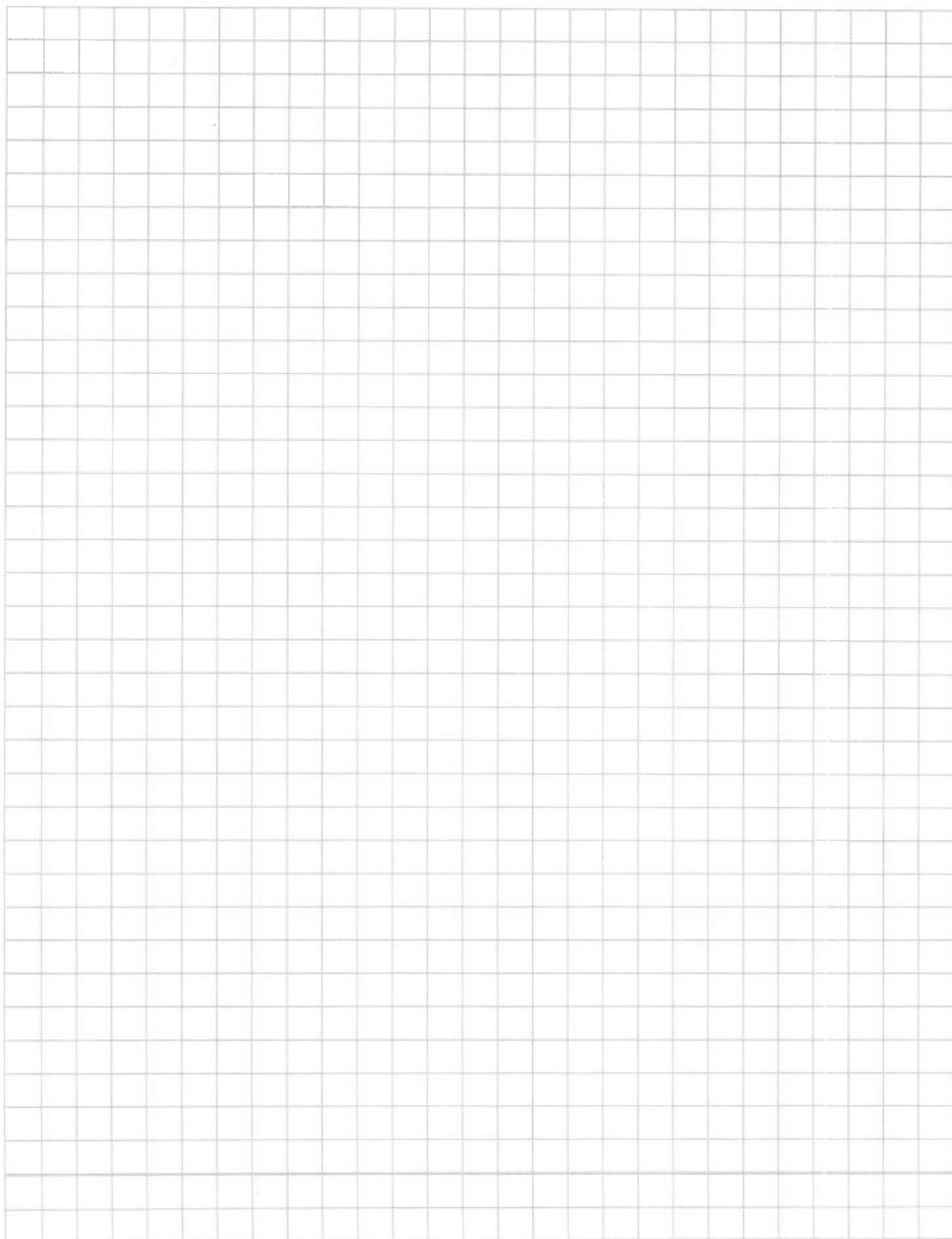


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

