



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
3. [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парты перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколько способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$Q = 32t^2 - 4 \cdot 9t^2 + 36 = 36 - 4t^2 > 0$$

$x_1, x_2$  - корни уравнения

$$9 - t^2 > 0$$

$$0 < x_1, \quad x_2 = 9t^2 - 9$$

$$\begin{array}{c} (3-t)(3+t) > 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ t \in (-3, 3) \end{array}$$

$$0 < 9t^2 - 9$$

$$(t-1)(t+1) > 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & -1 & -1 & + & + \\ & & \curvearrowleft & & & \end{array}$$

$$\begin{cases} t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ t \in (-3, 3) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } t \in (-3, -1) \cup (1, 3)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = b + 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(3+a+b)(a+b) = 19p^4$$

$$(15+2b)(12+2b) = 19p^4$$

$$2(15+2b)(6+b) = 19p^4$$

$$\sqrt{19p^4} : 2 \quad 19 : 2 \Rightarrow p^4 : 2 \quad \text{деление}$$

$\Rightarrow p : 2$  мн. р. чисел

$$p = 2$$

$$2(15+2b)(6+b) = 19 \cdot 2^4$$

~~$$(15+2b)(6+b) = 19 \cdot 8$$~~

$$15+2b \text{ нечётно} \Rightarrow 12+2b : 16$$

$$\Rightarrow 12+2b \geq 16 \Rightarrow b \geq 2 \quad \text{значит } b > 2 \quad 15+2b > 19$$

$$12+2b > 16 \quad 19 \cdot 16 = (15+2b)(12+2b) > 19 \cdot 16 \quad \text{т.к. } b > 2 \Rightarrow 2 \leq b < 2$$

$$b=2 \quad (15+4)(12+4) = 19 \cdot 16 \quad \checkmark$$

$$a = 2+12 = 14$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Diagram showing geometric constructions and calculations:

- Top left: A diagram of a circle with center O. A chord AB is drawn. A point M is on the circle such that OM is perpendicular to AB. A point N is on the circle such that ON is perpendicular to AB. A point D is on the circle such that OD is perpendicular to AB. A point E is on the circle such that OE is perpendicular to AB. A point F is on the circle such that OF is perpendicular to AB. A point G is on the circle such that OG is perpendicular to AB. A point H is on the circle such that OH is perpendicular to AB. A point I is on the circle such that OI is perpendicular to AB. A point J is on the circle such that OJ is perpendicular to AB. A point K is on the circle such that OK is perpendicular to AB. A point L is on the circle such that OL is perpendicular to AB. A point M is on the circle such that OM is perpendicular to AB. A point N is on the circle such that ON is perpendicular to AB. A point P is on the circle such that OP is perpendicular to AB. A point Q is on the circle such that OQ is perpendicular to AB. A point R is on the circle such that OR is perpendicular to AB. A point S is on the circle such that OS is perpendicular to AB. A point T is on the circle such that OT is perpendicular to AB. A point U is on the circle such that OU is perpendicular to AB. A point V is on the circle such that OV is perpendicular to AB. A point W is on the circle such that OW is perpendicular to AB. A point X is on the circle such that OX is perpendicular to AB. A point Y is on the circle such that OY is perpendicular to AB. A point Z is on the circle such that OZ is perpendicular to AB.
- Top right:  $r^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 60^\circ$
- Middle left: A diagram of a triangle ABC with vertices A, B, C. A point M is on side BC. A point N is on side AC. A point K is on side AB. A point L is on side BC. A point P is on side AC. A point Q is on side AB. A point R is on side BC. A point S is on side AC. A point T is on side AB.
- Middle right:  $\cos(\angle QAN) = -\frac{3}{4}$
- Bottom left: A diagram of a triangle ABC with vertices A, B, C. A point M is on side BC. A point N is on side AC. A point K is on side AB. A point L is on side BC. A point P is on side AC. A point Q is on side AB. A point R is on side BC. A point S is on side AC. A point T is on side AB.
- Bottom right:  $BM = MN = NC = \frac{1}{3} BC = 2$
- Annotations:
  - K - пересечение DM и AB
  - KL и AN средние
  - Медианы ABK и NCD симб.  $\Rightarrow$  m.k. II сторонами
  - $\angle BAC = 2 \angle CAN$   $AB = 2 AC$   $AK = KB$
  - $AB = CD = 2 AC = 2 KB$   $KB = AK = AC = DA$
  - $\angle KAN = \angle DKA = \angle ABK$   $\angle KAC = 2 \angle DKA$
  - $\angle KAC = 2 \angle DKA - \angle DKA = \angle DKA$
  - $6^2 = AC^2 + 4AC^2 - 2AC \cdot 2AC \cdot \cos \angle BAC = 5AC^2 + 8AC^2 = 28AC^2$
  - $\frac{9}{2} = AC^2$   $AC = \frac{3}{\sqrt{2}}$   $AB = 2AC = 3\sqrt{2}$
  - Ответ:  $AB = 3\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача ч.то если имеются учеников  
не один ряд, то их порядок определен  
так т.к. пустые парты нет они будут упорядочены  
по росту. Всех этих учеников с места и т.р.  
допустим, они распределяются  $\frac{n}{m}$   $n < m$ , в таком они  
распределяются едином согласии способом.

если в ряду 2 ученика то возможных есть 2 способа  
распределения. Но эти ряду 4: 3 когда меньший впереди  
и 1 когда меньший переду сзади

Всего способов входит ряд в коридоре  
н.р. учеников 11, а места 12  $\Rightarrow$ udem 1 пустая парты  
 $\Rightarrow$  1 ряд с 2 учениками  
способов входит такой ряд 4

способ распределяет учеников по рядам

$$4 \cdot \left( \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{0} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{0} \right) = \frac{11!}{6^3 \cdot 2} \cdot 4 = \frac{11 \cdot 2}{6^3} \cdot \frac{11!}{(11-3)!3!} = \frac{(11-3)!}{(11-3)!3!} \cdot \frac{11 \cdot 2}{6^3} = \frac{(11-3)!}{(11-3)!3!} \cdot 4$$

способ входит ряд из 2х

способ распределяет по

трёх рядам

$$\Rightarrow \text{всего способов } 4 \cdot \left( \frac{11 \cdot 2}{6^3} \right) = \frac{11!}{6^3}$$

способ распределяет по трём рядам

$$\text{Следем: } \frac{11!}{6^3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

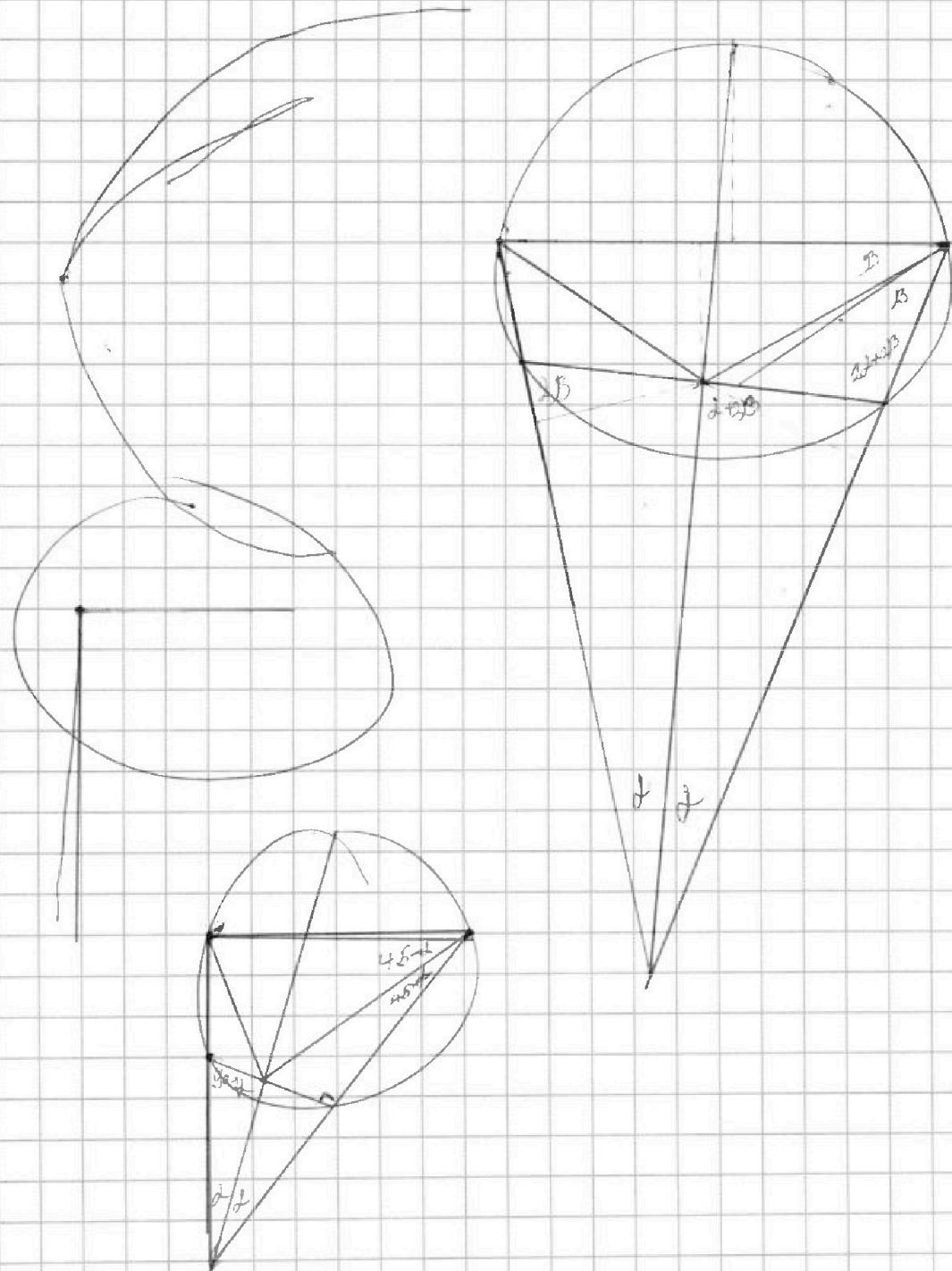
5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



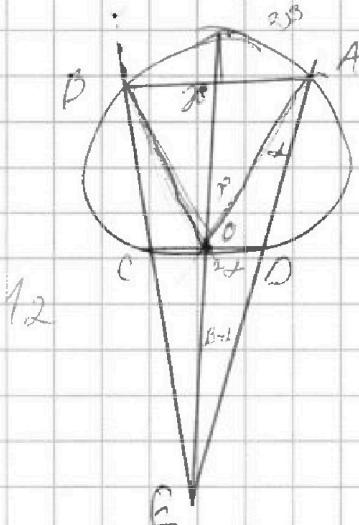
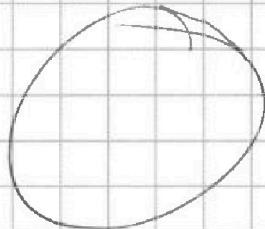


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



ЧЕБОЛДА

$$\frac{ED}{CE} \cdot \frac{DC}{CO}$$

$$DC = \frac{CO \cdot ED}{CE}$$

$$ED \left( \frac{CE + CO}{CE} \right)$$

$$12 \left( \frac{CE + CO}{AE} \right) = 12 \frac{CE + CO}{AE}$$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{AE}{EB} = \frac{CO}{OD} - \frac{AO}{OB}$$

$$ED \cdot EA^2 \cdot CE \cdot BE$$

$$ED = \frac{CE \cdot BE}{AE}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x}$

$$2x \geq x^2 + xy + y^2$$

$$1 - |x-y-1| \geq 0$$

$$1 \geq |x-y-1| \Rightarrow x-y-1 = \pm 1; 0$$

если  $x-y-1 = -1$

$$x = y$$

$$0 \geq x^2 + y^2 + x^2 \Rightarrow x=0$$

$0+0 \neq 2 \Rightarrow$  некорректно

если  $x-y-1=0$

$$x = y+1$$

$$2y+2 = 2y - y^2 - 2y - 1 - y^2 \geq 0$$

$$1 - 2y^2 - 2y \geq 0$$

$$\Delta \neq 2y(y+1)$$

$$\sqrt{1-2y^2-2y} + 1 = 2$$

$$\sqrt{1-2y^2-2y} = 1$$

если  $x-y-1=1$

$$x = y+2$$

$$1 - 2y^2 - 2y = 1$$

$$2y^2 + 2y = 0$$

$$2y(y+1) = 0$$

$$y = 0, -1$$

$$(1, 0) \text{ и } (-1, 0)$$

$$\sqrt{1-2y^2-4y-4} + \sqrt{1-1} = 2$$

$$\sqrt{-2y(y+2)} = 2$$

$$-2y(y+2) = 4$$

$$y(y+2) = -2$$

$$-1 \cdot 1 \neq -2$$

$$\text{Ответ: } (1, 0), (-1, 0)$$

если  $y \geq 0 \quad y(y+2) \geq 0 \quad \textcircled{*}$

если  $y \leq -2 \quad y(y+2) \geq 0 \quad \textcircled{*}$

$$\Rightarrow y = -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

представляли задачу виде графа деревья - вершины, дуги - ребра.

n - всего деревяно

Задачи по условию граф связный. Рассуждаем  
в нем есть циклы  $\Rightarrow$  если удалить 2 деревни из этого цикла способом попасть из одной в другую  
будут ходить 2  $\Rightarrow$  этот граф без циклов  
 $\Rightarrow$  граф - дерево  $\Rightarrow$  всего рёбер  $n-1$

$$\text{по их формуле } \frac{(n-1) \cdot 1 + 5 + 6 + 7 + 8}{2} = \frac{n+23}{2} = n-1$$

$$n+23=2n-2$$

$$n=25$$

Ответ: 25



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!