



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парту рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$gt^2 - g > 0$$

$$g(t^2 - 1) > 0$$

$$(t-1)(t+1) > 0$$

$$\begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases}$$

№1
Произведение корней в квадратном трёхчлене равно $gt^2 - g$, знаем,

$x_1 + x_2 = 4\sqrt{2}t$ При этом, т.к. имеются два корня, то

$x_1 \cdot x_2 = g(t^2 - 1)$ дискриминант $(D) > 0$, а $D = \{$ это:

$$D = (4\sqrt{2}t)^2 - 4(g(t^2 - 1)) > 0$$

$$32t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

$$-t^2 + 9 > 0$$

$$9 - t^2 > 0$$

$$(3-t)(3+t) > 0$$

$$(t-3)(t+3) < 0$$

$$\begin{cases} t < 3 \\ t > -3 \end{cases}$$

Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + (a+b) \cdot 3 = (a+b)(a+b+3)$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$a+b$ и $a+b+3$ если и имеют общий множитель, то ~~предполо~~

он делит 3. Ил.к. по алгоритму Евклида; $\text{НОД}(a+b;$

$a+b) = \text{НОД}(a+b; 3)$. Значит, если $p \neq 3$, то

$a+b$ и $a+b+3$ взаимнопросты, значит, каждое из них $\neq 1$, т.е. $a+b = 1$, но a и b — натуральные, значит $a \geq 1$ и $b \geq 1$, значит $a+b \geq 2$, но $a+b \neq 1$ — противоречие, значит $p = 3$.

Значит, есть два варианта $p = 3$ и $p \neq 3$. Если $p = 3$,

то т.к. одно из чисел делится на 3, то и второе тоже.

При этом они не могут оба $\equiv 9$, т.к. их НОД делит 3.

Ил.е. либо $a+b = 3$; $a+b+3 = 19 \cdot 27$, но $3+3 \neq 19 \cdot 27$,

либо $\frac{27}{19} = a+b$; $a+b+3 = 19 \cdot 3$, но $27+3 \neq 19 \cdot 3$

Если $p \neq 3$, то $a+b$ и $a+b+3$ — взаимнопросты, т.е.

либо $a+b = 1$; $a+b+3 = 19 \cdot p^4$, но $19 \cdot p^4 \geq 19 \cdot 2^4 > 1+3$,

либо $a+b = 19$; $a+b+3 = p^4$, но $19+3 = 22 \neq p^4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 (продолжение)
либо $a+b=p^4$; $a+b+3=19$; $19-3=16=2^4$,

т.е. $a+b=2^4=16$.

III-е. $\begin{cases} a+b=16 \\ a-b=12 \end{cases}$
 $\begin{cases} a=14 \\ b=2 \end{cases}$

Ответ: 14; 2.

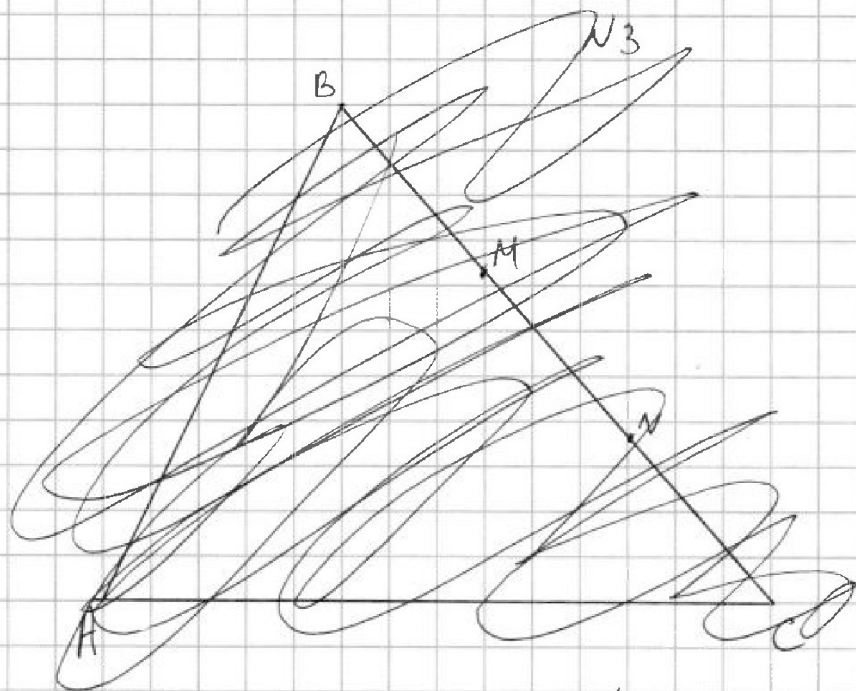


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

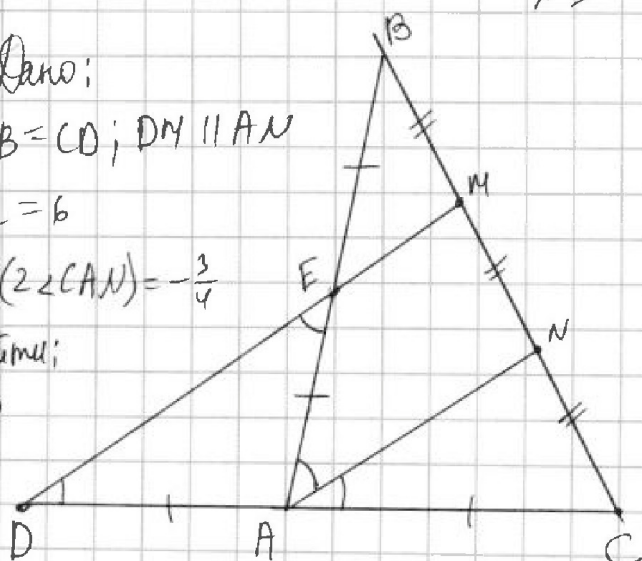
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N3

Дано:
 $AB = CD$; $DM \parallel AN$
 $BC = 6$
 $\cos(\angle CAN) = -\frac{3}{4}$

Найти:
 AB



~~Решение:~~
~~1) так как DM || AN, то ∠DMN = ∠ANM~~
~~по AB, по теореме о параллельных~~
~~на AB, а ∠CAN = ∠CAN~~
~~ABC - равнобедренный~~
~~то AD = AC = 1/2 CD = 1/2 AB~~
~~то AB = 6~~

Решение: Пусть E - точка пересечения AB и DM

1) м.к. $AN \parallel DM$; а $NC = NM$, то AN - ср. лин. $\triangle CDN$,
значит $AD = AC = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB$ ($AB = CD$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

2) т.к. ~~DM~~ $DM \parallel AN$, то $EM \parallel AN$, более того $BM = MN$,
значит EM — ср. лин. $\triangle ANB \Rightarrow EB = EA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$.

~~т.к. $AD = AE$~~ , значит $EB = EA = AD = AC$

3) т.к. $AD = AE$, то $\angle ADE = \angle DEA$

4) т.к. $DM \parallel AN$, то $\angle DEA = \angle EAN$ (как накр. лежа с секущей EA)

5) т.к. $DM \parallel AN$, то $\angle EDA = \angle NAC$ (как соответств., с секущей AD)

6) получим $\angle NAE = \angle DEA = \angle ADE = \angle NAC$, значит

$$\angle BAC = \angle NAE + \angle NAC = 2\angle CAN \Rightarrow \cos \angle BAC = \cos (2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$$

7) по теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$

$$\text{также } AC = \frac{1}{2}AB; \cos \angle BAC = -\frac{3}{4} \mid BC = 6 \text{ (по условию)}$$

$$\text{значит } 36 = AB^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 - 2 \cdot AB \cdot \frac{1}{2}AB \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$36 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{3}{4}AB^2$$

$$36 = 2AB^2$$

$$AB = 3\sqrt{2} \quad (AB > 0, \text{ т.к. } AB - \text{сторона треугольника})$$

Ответ: $3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

размерами учеников по росту: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$,
где a_n — самый высокий ученик, а a_1 — самый
низкий. При этом, замечим, что т.к. парты
12, а учеников 11, то ровно одна партка останется
пуста. Школьники не видят доску только в
том случае, если на ближайшей партке спереди него сидит
ученик выше, чем он сам. Таким как во всех
остальных случаях он доску видит. (ученик ниже, чем
ученика; нет парты). То есть каждый ученик видит
доску в трёх случаях из четырёх. То есть количество
способов, умноженное на $\frac{3}{4}$ есть количество способов,
в которых ученики хорошо видят доску. Всего
способов расставить 11 различных школьников на 12 различных
мест это $12!$; т.е. ответ будет $12! \cdot \frac{3}{4} = 11! \cdot 9$

Ответ: ~~12! \cdot \frac{3}{4}~~ $11! \cdot 9$

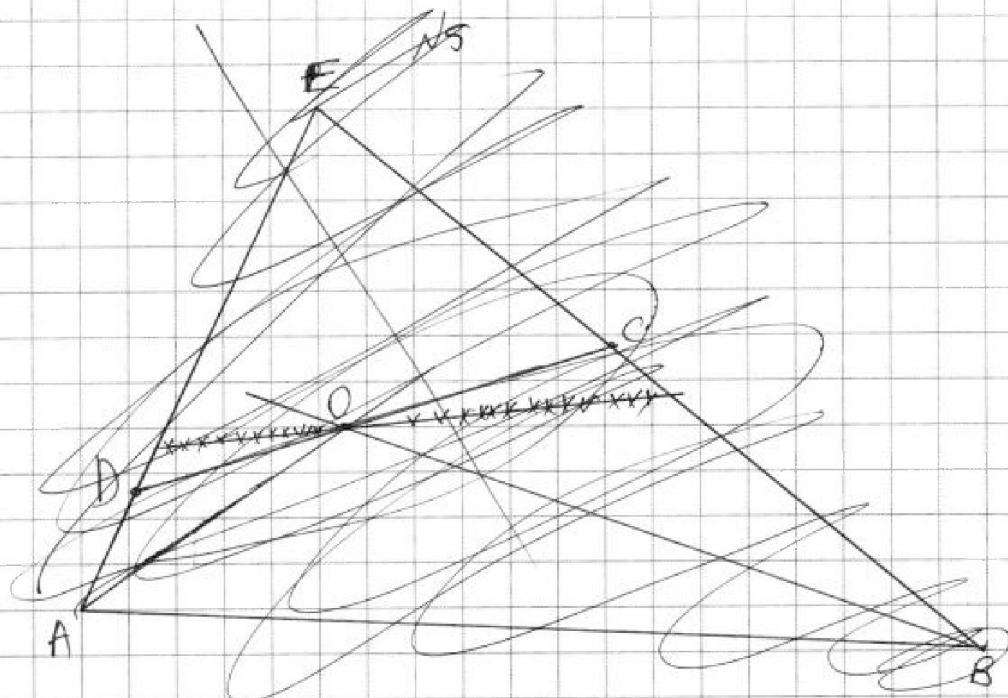


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

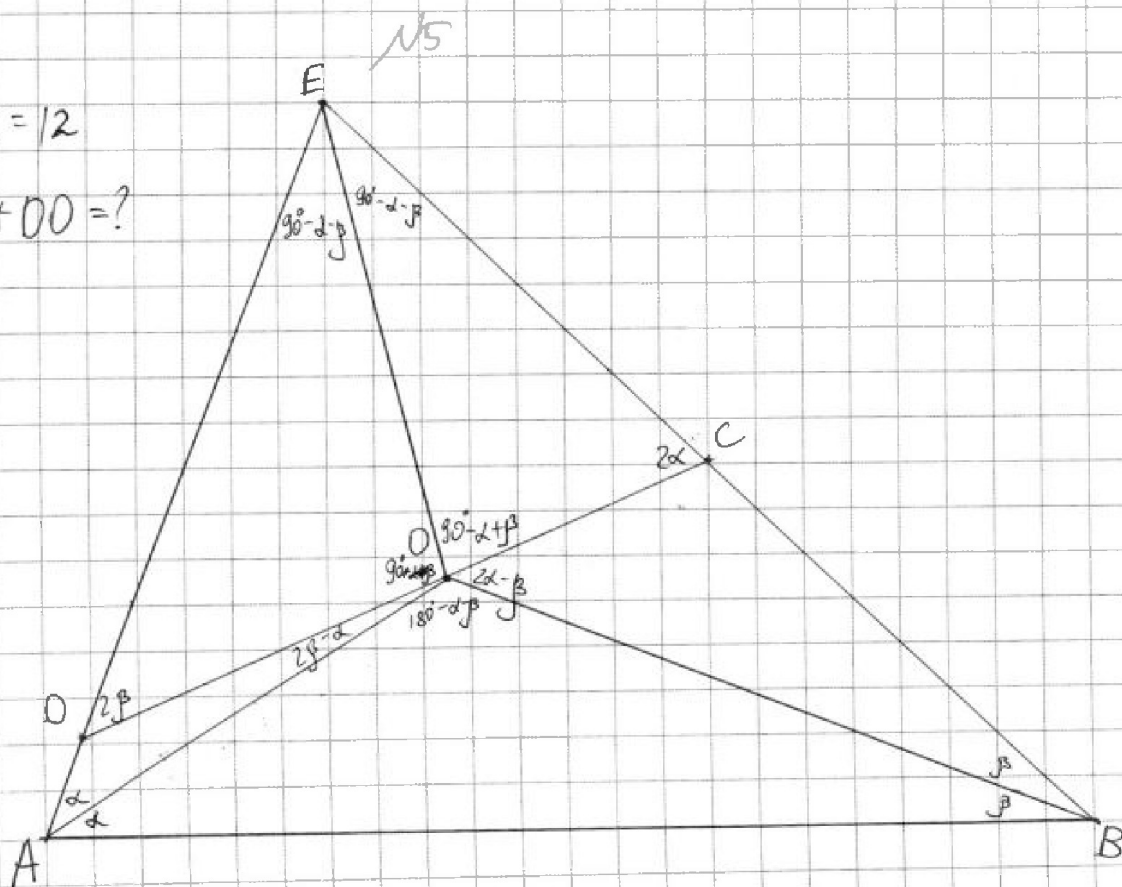
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BE = 1/2$$
$$ED + DO = ?$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 (предложение)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть n - количество деревьев, из которых выходит по одной дороге. Тогда всего дорог -

$$\frac{5+6+7+9+n}{2}, \text{ т.к. каждую дорогу мы посчитали}$$

дважды (как исходящую и как входящую).

Представим задачу в виде графа, где вершины - деревья, а ребра - дороги. Тогда по условию в этом графе нет циклов, т.к. иначе между двумя деревьями в цикле есть хотя бы два пути: в одну сторону цикла и в другую. Но при этом граф связен, т.к. из любой вершины можно добраться в любую. А связный граф без циклов - это дерево, которое имеет ребер на один меньше, чем вершин, т.е., в нашем случае $n+4-1=n+3$.

Тогда
$$\frac{5+6+7+9+n}{2} = n+3.$$

$$2n+6 = 27+n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 21$$

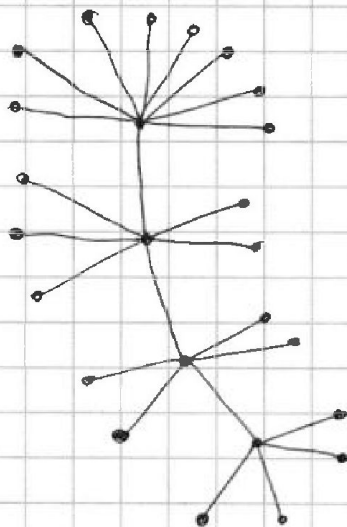
№ (продолжение)

2) $n + 4 = 25$ (всего деревьев на участке)

~~Пример:~~

Пример:

Путь из
ровно 25 и они
удовлетворяют условию.



Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{7}$

$$\left. \begin{aligned} 2x - x^2 &= -(x-1)^2 + 1 \\ -2y - y^2 &= -(y+1)^2 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x - 2y - x^2 - y^2 \leq 2, \\ \text{т.к. } \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ (y+1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$1 - |x - y - 1| \leq 1, \text{ т.к. } |x - y - 1| \geq 0.$$

При этом, т.к. x и y целые, то и $2x - 2y - x^2 - y^2$, и $1 - |x - y - 1|$ принимают только целые значения. Но $2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$, и $1 - |x - y - 1| \geq 0$, т.к. подкоренное выражение неотрицательно. III. е. $\Leftrightarrow 2x - 2y - x^2 - y^2$ принимает значения ~~0~~ 0; 1; 2, а $1 - |x - y - 1|$ — значения 0 и 1. Если первое выражение = 2, а второе = 1, то $\sqrt{2+1} \neq 2$; если первое = 2, а второе = 0, то $\sqrt{2} < 2$, нет равенства; если первое = 1, а второе = 1, то $2 = 2$ подходит; если первое 1, а второе 0, то $1 < 2$ не подходит; если первое 0, второе 1, не подходит, если первое 0 и второе 0, то не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7 (продолжение)

Итак, мы выяснили что $\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ 1 - |x - y - 1| = 1 \end{cases}$

т.е. $\begin{cases} -(x-1)^2 + 1 - (y+1)^2 + 1 = 1 \\ 1 - |x - y - 1| = 1 \end{cases}$

Заметим, что $-(x-1)^2$ и $-(y+1)^2$ — целые, т.е.

они принимают значения 0 и -1 ; и $-(y+1)^2$

больше -1 , т.к. если хотя бы одно из них < -1 , то второе — больше 0 , а это невозможно,

т.к. квадрат — неотрицателен, значит $-(x-1)^2$ и $-(y+1)^2$ принимают

значения -1 и 0 . При этом одно из них -1 ,

а другое 0 , т.к. в сумме они $= -1$.

Вспомогательное второе урав. сист.: $1 - |x - y - 1| = 1$

$$-|x - y - 1| = 0$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$x = y + 1$$

Вернёмся к первому. Есть два случая: $\begin{cases} -(x-1)^2 = 0 \\ -(y+1)^2 = 0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В первом случае $x=1$; во втором $y=-1$,
т.е. $N7$ (продолжение)

$$\begin{cases} x=1 \\ x=y+1 \\ y=-1 \\ x=y+1 \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Это и будут ответы.

~~Ответ: $x=1, y=0$~~

Ответ: $(1; 0)$ и $(0; -1)$

~~Ответ: $x=1, y=-1$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

~~max(ED+DO)=?~~

$$\max(ED+DO)=?$$

$$BE=12$$

